第13卷 第5期 电子科学学刊 Vol. 13, No. 5
1991年9月 JOURNAL OF ELECTRONICS Sept., 1991

S_{BOS} 相邻逻辑对称序列构造与实现方法

林柏钢
(福州大学电气工程系,福州)

摘要 本文基于布尔序集相邻逻辑对称关系的二分枝树（T_{BOS}）结构模型的研究,从中找出布尔序集相邻逻辑对称序列（S_{BOS}）关系的内在规律,进而提出用 S_{BOS} 构造的新方法,来实现 N 维布尔序集唯一相邻的逻辑路径问题. 文中介绍了"对跳定界搜索"方法，对工程应用有着实际意义.

关键词 布尔序集逻辑函子；S_{BOS} 序列;镜像映射函子;对跳定界搜索

一、引言

对于典型的具有良好特性的二元布尔函数相邻逻辑关系，经常见诸计算机科学和通讯编码等应用中[1]. 一个N维情形的二元布尔函数相邻逻辑关系，很难直接从其本身得到解决. 这一问题的难度还与时间和空间的复杂性理论有很大关系. 比如五维以上的卡诺图构造就说明了这一点. 如何填写相邻最小项，这是一个极其麻烦的事. 实际上这牵涉到一个逻辑路径问题. 一旦该唯一路径找到后,其最小项的排列顺序就确定下来,无须再逐一对照填写. 因此,如何给出一种简便的方法,来实现布尔序集相邻逻辑唯一路径构造,这在实际应用中有着极重要的实用意义[2]. 下面,我们将从理论上进一步介绍本文给出的一种新方法.

二、几个基本概念

定义1 设Q为一非空集合，$Q=\{(U, E)|: U=(v_0, v_1, \cdots, v_{2^n-1}), E=(e_1,e_2,\cdots,e_m)$, 且 $m\geqslant n\}$ 是一个由N维布尔函数 $x_1x_2\cdots x_n$（其中 $x_i(i=1,2\cdots,n)\in\{0,1\}$）所对应的顶点最小项（$U_t$）组成的布尔序集逻辑空间. 若 $U_t(t=0, 1, \cdots, 2^n-1)$ 是Q的一个子集族，其任意两个子集的交和并仍为Q中的元，即 $U_t\in Q$; U_{t_1}, $U_{t_2}\in Q$, 且 $U_{t_1}\wedge U_{t_2}\in Q$;对任意顶点子集族 $U_t\subset U$, 且 $U=\bigvee\limits_{U_t\in Q} U_t$ 则 U_{t_3} 称为集合Q上的一个拓扑 · 4 集合Q与它的一个拓扑 U_t 组成的偶（Q, U_t）称为逻辑拓扑空间,简记为Q[3,4].

定义2 满足二元布尔代数性质和运算关系的布尔序集在逻辑拓扑空间中的关

1990年6月11日收到,1991年2月25日修改定稿.

系，称为布尔序集逻辑函子，记作 BOS；所对应的逻辑拓扑空间记作 Q_{BOS}。

以下的讨论都是在 BOS 逻辑拓扑空间的关系下展开的。

定义 3　凡能一对一描述布尔序集构成的顶点最小项集合：$U_t = \{v_0, v_1, \cdots, v_{2^n-1}\}$，在 BOS 逻辑拓扑空间存在相邻逻辑对称关系的二分枝树状结构，称为布尔序集二分枝树结构，记作 T_{BOS}。

换句话说，假定逻辑拓扑空间 Q_{BOS} 为一非空集合，则 $Q_{BOS} = \{(U_t, E_v)|: t = 0, 1, \cdots, 2^n - 1; v = 1, 2, \cdots, m, m \geqslant n\}$ 总存在一个有规则的二分枝树结构 T_{BOS} 与 U_t 对应。见图 1。

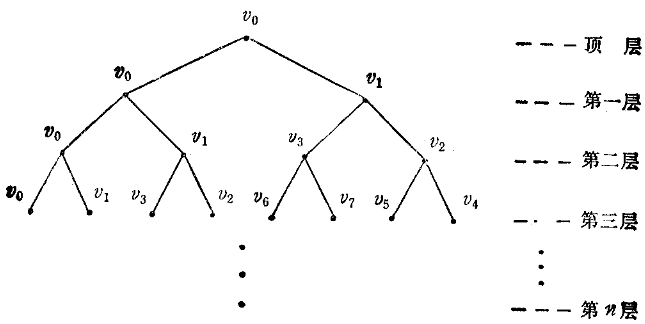

图 1　U_t 与 T_{BOS} 对应关系示意图

定义 4　形如 $R_{BOS}^c = \{(U_t, E_s)|: t = 0, 1, \cdots, 2^n - 1; s = 1, 2, \cdots, 2^n, t = s$; 且 $U_t \subset R_{BOS}^c \subset Q_{BOS}$, $E_s \subset R_{BOS}^c \subset Q_{BOS}\}$ 的任意逻辑拓扑空间闭环路径，其中 U_t 按给定相邻顺序依次排列，使得对于每一个 E_s 顺序不变，则称 U_t 为 BOS 逻辑拓扑空间序列，记作 S_{BOS}。

从 T_{BOS} 二分枝树结构关系可以看出，每一水平层均为一组限维内所对应的 BOS 相邻逻辑对称关系的 S_{BOS} 序列组合结构。也可以说，S_{BOS} 是 Q_{BOS} 逻辑拓扑空间闭环路径的开环分布形式。如果说随着维数 N 的增大，T_{BOS} 结构在 Q_{BOS} 逻辑拓扑空间是紧收敛过程的话，则 S_{BOS} 序列结构却是增幂扩张过程。当 $n \to \infty$ 时，$S_{BOS} \to \infty$。

三、S_{BOS} 序列构造模型分析

从分析图 1 结构中我们发现，直接从序列组合本身亦可构造 S_{BOS} 序列模型。

设 Q_{BOS} 逻辑拓扑空间顶点最小项集合 $U_{BOS} = \{v_t|: t = 0, 1, \cdots, 2^n - 1\}$，在 T_{BOS} 二分枝树结构中，v_0 分布有其特殊的内在联系，从中可以发现有下列限维内序列组合路径存在的规律。见图 2。

首先我们约定：v_0 是独立集，构成 S_{BOS} 序列的原点，亦是 R_{BOS}^c 路径的起点。

显然，限维内序列的顶点子集个数为 2^n，形成的新序列 S_{BOS} 正对应 T_{BOS} 的水平分布，并按 2^n 的倍数由二分枝树分离出来。当以顶点子集 v_0 为中心，并按 2^n 规则生成的 S_{BOS} 序列，将是一个增幂扩展的对称序列。下面将进一步讨论 S_{BOS} 序列构造的相互关系。

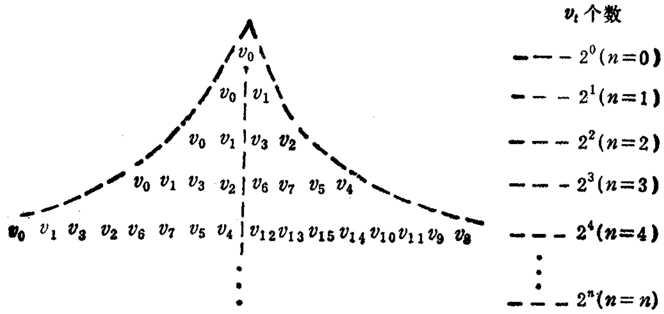

图 2　S_{BOS} 序列构造模型

定义 5　设顶点最小项集合 U_{BOS} 是 BOS 逻辑拓扑空间的一个 BOS 加法群，如果有一个规则 $\breve{B}k$：对 U_{BOS} 的每个元素 v'_l，恒有 U_{BOS} 中的一个唯一确定的元素 v'_r 与之对应，记为 $\breve{B}k \vee v'_l = v'_r$，则说 $\breve{B}k$ 是 U_{BOS} 的一个对折映射（或镜像映射）算子。符号 $\breve{B}$ 为对折（或镜像）映射函子，k 为系数，$k = 2^i (i = 1, 2, \cdots, n)$。如果

$$\breve{B}k \vee \left\{ \bigvee_{l=0}^{2^{n-1}-1} v_l \right\} = \left\{ \bigvee_{r=2^{n-1}}^{2^n-1} v_r \right\}$$

成立，则 v_r 是 v_l 通过对折映射算子“$\breve{B}k$”而变换得到的。

这样，根据上述定义，可以得到 S_{BOS} 序列关系：

$$S_{BOS} = S^l_{BOS} + S^r_{BOS} = \left\{ \bigvee_{l=0}^{2^{n-1}-1} v_l \right\} + \left\{ \bigvee_{r=2^{n-1}}^{2^n-1} v_r \right\}$$

$$= S^l_{BOS} + \breve{B}k \vee S^l_{BOS} = \left\{ \bigvee_{l=0}^{2^n-1} v_l \right\} + \breve{B}k \vee \left\{ \bigvee_{l=0}^{2^n-1} v_l \right\},$$

$$(k = 2^i|:\ i = 1, 2, \cdots, 2^n) \tag{1}$$

在 (1) 式中，只要 i 给定，S_{BOS} 就有一个确定的序列与之对应。例如，令

$$S^N_{BOS} (N = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

为对应的维数序列，当 $k = 2^i$，$i = 4$ 时，则有下列分解结果：

$$S^0_{BOS} = \left\{ \bigvee_{l_0=0} v_{l_0} \right\} = \{0\}$$

$$S^1_{BOS} = \left\{ \bigvee_{l_1=0} v_{l_1} = S^0_{BOS},\ \bigvee_{r_1=2^0} v_{r_1} = \breve{B}2^0 \vee S^0_{BOS} \right\} = \{0, 1\}$$

$$S^2_{BOS} = \left\{ \bigvee_{l_2=0}^{1} v_{l_2} = S^1_{BOS},\ \bigvee_{r_2=2^1}^{3} v_{r_2} = \breve{B}2^1 \vee S^1_{BOS} \right\} = \{0, 1, 3, 2\}$$

$$S^3_{BOS} = \left\{ \bigvee_{l_3=0}^{3} v_{l_3} = S^2_{BOS},\ \bigvee_{r_3=2^2}^{7} v_{r_3} = \breve{B}2^2 \vee S^1_{BOS} \right\} = \{0, 1, 3, 2, 6, 7, 5, 4\}$$

更一般地，当 $k = 2^i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 时，则有下式成立。

$$S^n_{BOS} = \left\{ \bigvee_{l_n=0}^{2^{n-1}-1} v_{l_n} = S^{n-1}_{BOS},\ \bigvee_{r_n=2^n}^{2^n-1} v_{r_n} = \breve{B}2^i \vee S^{n-1}_{BOS} \right\} \tag{2}$$

从 S_{BOS} 序列构造可以看出,最左界顶点子集(即 R^c_{BOS} 的起点)为 v_0,最右界顶点子集(即 R^c_{BOS} 的终点)为 v_{2^n-1}. 而 BOS 的对称性质和相互关系都离不开 $[0,2^n-1]$ 对折划分区间的,按 2^n 规则变化是 S_{BOS} 序列的主要特征之一.

四、对跳定界搜索方法

设有 2^n 个顶点子集 $v_0,v_1,\cdots,v_{2^n-1}$ 在 BOS 逻辑拓扑空间分布,诸顶点子集按某种给定规则依次相邻排列,构成一条 v_0, v_1, v_3, v_2, $\cdots$, $v_{2^{n-2}+1}$, $v_{2^{n-2}}$, $v_{(2^{n-2}\vee 2^{n-1})}$, $v_{(2^{n-2}\vee 2^{n-1})+1}$, $\cdots$, $v_{2^{n-1}+1}$, $v_{2^{n-1}}$ 唯一相邻的 S_{BOS} 逻辑本原序列. 假定最左界和最右界的顶点子集初始条件已知,而且我们认为任何 BOS 构造的开环序列 S^0_{BOS}(或开环路径 R^0_{BOS}),其头尾依然相邻. 当按 2^n 规则对折划分后,利用"对跳定界搜索"方法,总能找到对折划分处左右相邻两个顶点子集. 若反复按 2^n 规则沿各自划分区间"对跳定界搜索",最终必可找出各个顶点子集在 S^0_{BOS} 序列中所处的逻辑拓扑空间分布的位置.

定义 6　一个 S^0_{BOS} 序列对折划分处的左右两个新子集族 $U_l(l=1,2\cdots)$ 和 $U_r(r=1,2,\cdots)$,若是由初始条件: 以最左界和最右界两个顶点子集 v_{l_0} 和 v_{r_ϕ} 为源点,并按 $k_\sigma<2^n$ 降幂的一种规则为算子,则新子集: $v_{l_k}=k_\sigma\vee v_{l_0}$, $v_{r_k}=k_\sigma\vee v_{r_\phi}$, $(\sigma=1,2,\cdots,n-1)$,经有限次对折划分所组成. 相当于每一新子集,以前一次对折处产生的左右顶点子集为源点,与对应的算子 k_σ 布尔和后对跳得到各自新的定界点. 这种搜索对折划分区域子集排列的方法称为"对跳定界搜索"法.

定理 1　对于 S^0_{BOS} 序列,若 k_σ 为按 2^n 规则对折划分的一个降幂算子,则

$$k_\sigma=2^{n-i}(2\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant\sigma\leqslant n-1)$$

是使得每一划分区域形成的对向左右边界子集集合 $U_{l_k}=k_\sigma\vee v_{l_0}$ 和 $U_{r_k}=k_\sigma\vee v_{r_\phi}$ (v_{l_0}, v_{r_ϕ} 为源点)能成立的 2^{n-i} 降维单元的正整数因子.

证明　从对折划分角度来看,因为 S^0_{BOS} 序列,当维数 N 确定后,对应顶点子集集合 U_{BOS} 个数为 2^n 个. 对降幂算子 k_σ 来说,令 σ 为对折划分次数, $\sigma=1$, $k_1=2^{n-2}$; $\sigma=2$, $k_2=2^{n-3}$; $\cdots$; $\sigma=n-1$, $k_{n-1}=2^{n-n}=1$. 因此,第一次对折划分的两单元子集个数 $v_{l_1}=v_{r_1}=2^{n-2}\to k_1=2^{n-2}$; 第二次对折划分后 $v_{l_2}=v_{r_2}=2^{n-3}\to k_2=2^{n-3}$; $\cdots$; 第 n 次对折划分后 $v_{l_n}=v_{r_n}=2^{n-n}\to k_n=2^{n-n}=1$. 于是,各次对折划分后形成的对向左右边界顶点集合 $U_{l_k}=k_\sigma\vee v_{l_0}$ 和 $U_{r_k}=k_\sigma\vee v_{r_\phi}$ 能成立的充要条件是

$$k_\sigma=2^{n-i}(2\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant\sigma\leqslant n-1)$$

且 $k_\sigma|2^n$ (即 k_σ 必须能整除 2^n). 所以, k_σ 为 2^n 的一种降维单元正整数因子.

根据"对跳定界搜索"原理,一般情形的 S^0_{BOS} 序列构造模型如图 3 所示.

下面举个实际例子加以说明. 当 $n=5$ 时, $2^5=32$. 若规定 S^0_{BOS} 序列在 Q_{BOS} 逻辑拓扑空间分布,从 $v_0\to v_{2^{n-1}}$. 根据给定条件,可确定两个最左界和最右界源点为

$$v_0=\{0\},\ v_{2^4}=\{16\}$$

那么,整个 S^0_{BOS} 序列构造过程如图 4 所示.

显然,在具体构造过程中要逐步进行. 让 $\sigma=1$, 确定 2 点 (2^1); $\sigma=2$, 确定 4 点 (2^2); $\cdots$; $\sigma=n$, 确定 2^n 点. 实际上只要经过 $(n-1)$ 次对跳定界划分,让

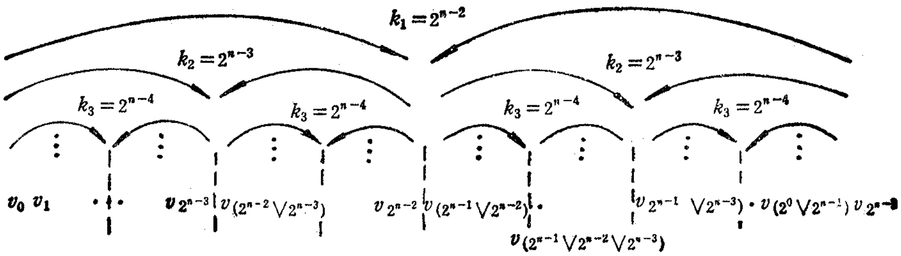

图 3 “对跳定界搜索”构造 S^0_{BOS} 序列示意图

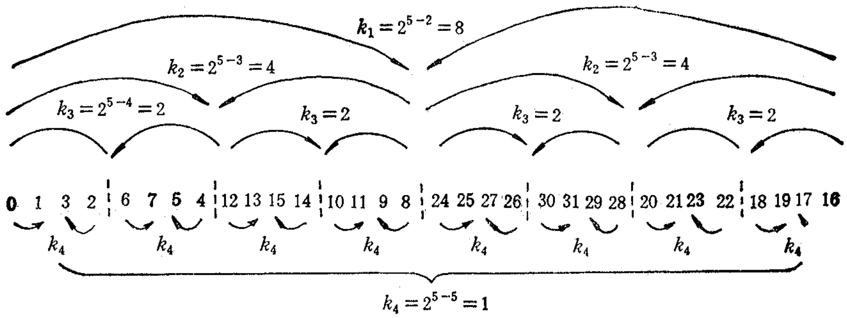

图 4 5 维情形的 S^0_{BOS} 序列构造

$$k_\sigma=2^{n-i}\ (2\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant\sigma\leqslant n-1)$$

借助“对跳定界搜索”方法，就能求出 S^0_{BOS} 序列中所有连续存在的顶点子集的全部排列位置。

五、“对跳定界”次数和“对跳定界”划分对的确定

定义 7 令 $k_\sigma=2^{n-i}$ $(1\leqslant\sigma\leqslant n-1,\ 2\leqslant i\leqslant n)$ 恒为某个值时，该过程按 k_σ 同步对跳定界的所有对跳区域，都认定为同一次数对跳过程，则 σ 称为“对跳定界”次数。

显然，σ 表明“对跳定界搜索”从开始到结束所需的次数。

定理 2 设 σ 为 S^0_{BOS} 序列有限区间 $[0,2^n-1]$ 中，同步“对跳定界搜索”划分的次数，若 $1\leqslant\sigma\leqslant n-1$，考虑一般情形，则可能的组合次数为

$$\sigma_0=C(n,\sigma)=\binom{n}{\sigma}=\frac{n!}{(n-\sigma)!\sigma!}\tag{3}$$

证明 若 $k_\sigma=2^{n-i}(1\leqslant\sigma\leqslant n-1,\ 2\leqslant i\leqslant n)$ 为对折划分的一个算子，当 σ 确定后，k_σ 恒为某个值，对应的 k_σ 就看成是 σ 次划分产生的值，即看成是一种 σ 排列对应的结果。对 σ 来说，相当于在 n 限维内对应 2^{n-1} 个顶点子集，一次自 2^{n-1} 个集合中取 σ 个顶点子集的组合数目(但不考虑其次序)。换句话说，集合 $U_t=\{v_0,v_1,\cdots,v_{2^n-1}\}$ 的一个由 σ 次不同过程所得到的组合，就是 U_t 的一个由 σ 次不同过程所形成的子集

合.

设 U_{l_0} 为最左界(或任意左界)源点，v_{r_ϕ} 为最右界(或任意右界)源点. 下面分三种情形讨论:

(1) v_{l_0} 和 v_{r_ϕ} 已知时(相当于除去一次情形),则有

$$\sigma_1 = C(n,\sigma) - 1 = \binom{n}{\sigma} - 1 = \frac{n!}{(n-\sigma)!\sigma!} - 1, \ (1 \leqslant \sigma \leqslant n-1) \tag{4}$$

(2) v_{l_0} 已知，v_{r_ϕ} 未知时(相当于从 $v_{l_0} \to v_{r_\phi}$ 需要有一次对跳情形),则有

$$\sigma_2 = C(n,\sigma) = \binom{n}{\sigma} = \frac{n!}{(n-\sigma)!\sigma!} = \sigma_0, \ (1 \leqslant \sigma \leqslant n-1) \tag{5}$$

(3) v_{l_0} 和 v_{r_ϕ} 均未知时(相当于二者为任意左右界情形，也就是说 v_{l_0}，v_{r_ϕ} 都得从 $n+1$ 维对跳定界来确定,即不退化情形),故有

$$\sigma_3 = \sigma_2 = C(n,\sigma) = \frac{n!}{(n-\sigma)!\sigma!} = \sigma_0, \quad (1 \leqslant \sigma \leqslant n-1) \tag{6}$$

由此可见,(1) 属于退化情形;(2)、(3) 属于一般情形，$\sigma_0 = \sigma_2 = \sigma_3$. 故定理证毕.

定理 3　设 P 为相应于“对跳定界搜索”次数 σ 同时产生的“对跳定界”划分对个数,若 $1 \leqslant r \leqslant n-1$，考虑一般情形,则可能的组合对为:

$$P_0 = 2^{C(n,r)} = 2^{\binom{n}{r}} = 2^{\frac{n!}{(n-r)!r!}} = 2^{\frac{n!}{(n-1)!}} \tag{7}$$

证明　S_{BOS} 序列镜像相邻对称是关于对折划分中心而言的. 显然，凡按 2^n 规则划分,当 n 确定后,即有 $2^n \cdot 2^{n-1} \cdots 2^{n-r+1} (1 \leqslant r \leqslant n-1)$ 对应 2 的指数的一种排列. 考虑两个相邻子集之间都对应一个对折划分中心,即“对跳定界”划分中心,相当于两相邻子集之间有 $2^n - 1$ 个中心竖线. 这样,“对跳定界”划分对的个数,与中心竖线可能组合的个数相同.

因此,根据 v_{l_0} 和 v_{r_ϕ} 的定义,同样分下列三种情形讨论:

(1) v_{l_0} 已知，v_{r_ϕ} 未知时(相当于扣除一对情形),则有

$$P_1 = 2^{C(n,r)} - 1 = 2^{\binom{n}{r}} - 1 = 2^{\frac{n!}{(n-r)!r!}} - 1 = 2^{\frac{n!}{(n-1)!}} - 1, \ (1 \leqslant r \leqslant n-1) \tag{8}$$

(2) v_{l_0} 和 v_{r_ϕ} 均已知时(相当于除去两对情形),则有

$$P_2 = 2^{C(,r)} - 2 = 2^{\binom{n}{r}} - 2 = 2^{\frac{n!}{(n-r)!r!}} - 2 = 2^{\frac{n!}{(n-1)!}} - 2, \ (1 \leqslant r \leqslant n-1) \tag{9}$$

(3) v_{l_0} 和 v_{r_ϕ} 均未知时(相当于 v_{l_0}，v_{r_ϕ} 都得从 $n+1$ 维“对跳定界”来确定，即考虑不退化情形),因而有

$$P_3 = 2^{C(n,r)} = 2^{\binom{n}{r}} = 2^{\frac{n!}{(n-r)!r!}} = 2^{\frac{n!}{(n-1)!}}, \ (1 \leqslant r \leqslant n-1) \tag{10}$$

由此可见,(1)、(2) 属于退化情形,(3) 属于一般情形. 故定理得证.

六、结　　语

上述讨论表明,用 S_{BOS} 序列来构造和实现布尔序集唯一相邻的逻辑路径问题，具有实际意义. 从逻辑拓扑空间出发,用 S_{BOS} 序列描述布尔顶点的相邻逻辑排列关系，本质

上反映了布尔序集的一种内在规律．作为实际工程应用，也提供了一种新的实现方法．

参 考 文 献

[1] 林柏钢，电子科学学刊，12 (1990) 2，146—151.
[2] (美)金基恒著，何善育等译，布尔矩阵理论及其应用，知识出版社，1978 年 6 月.
[3] K. A. Ross, C. R. B. Wright, Discrete Mathematics, Englewood Cliffs, New Jersey, (1988).
[4] 江泽涵，拓扑学引论，上海科学技术出版社，1978 年 6 月.

ON THE CONSTRUCTION OF SYMMETRICAL SEQUENCE OF B_{BOS} NEIGHBOURING LOGIC AND ITS REALIZATION METHOD

Lin Bogang
(Fuzhou University, Fuzhou)

Abstract A new method for the constrtruction of the symmetrical sequence of S_{BOS} neighbouring logic is proposed. And the realization problem of sole neighbouring logic path for N dimensions Boolean ordered set is solved too. The method of "the search of bounce bound" is given.

Key words Logical functor of Boolean ordered set; S_{BOS} sequence; Mapping functor of image; Search of bounce bound