

# 最佳小波调制<sup>1</sup>

石庆华 程时昕

(东南大学移动通信国家重点实验室 南京 210096)

**摘 要** 小波分析的理论正在逐步走向通信领域,小波调制因其频谱利用率的优势而受到重视.以往研究较多的是 Daubechies 和 Battle-Lemarie 小波系列,本文从频谱利用率的角度出发,讨论如何设计用 FIR 滤波器实现的最佳正交小波和尺度函数,给出了设计方法和结果.通过比较我们得出这样的结论:经过最优化设计,在同样的实现复杂性条件下,小波调制的频谱利用率有了明显的提高,因而可以用较简单的 FIR 滤波器获得较好的频谱性能.

**关键词** 小波调制, 频谱利用率, 小波和尺度函数, 正交镜像滤波器 (QMF)

**中图分类号** TP911.3

## 1 引言

近几年来,小波变换因其具有优良的时频局域特性和基函数选择的灵活性这两大特点在工程界引起广泛注意,其应用领域不断扩展,特别是在信号处理和图像压缩领域中,应用相当普遍.最近,小波分析的理论正在逐步走向通信领域,人们开始考虑把小波变换用于调制,编码,复用,多址,扩频,抗干扰,变速率传输等方面,其中研究最多的是小波用于调制.

在设计通信系统时,频谱利用率是关键指标之一.人们希望尽可能提高频谱利用率,因此产生了多种调制方法,用小波进行调制也逐渐受到重视<sup>[1]</sup>.以往研究较多的是 Daubechies 小波系列<sup>[2]</sup>Battle-Lemarie 小波系列<sup>[3]</sup>,它们在频谱利用率上的优势已经表现出来.但是,它们在性能与实现复杂性上存在矛盾,很难找到两者均让人满意的方案.于是,自然会产生这样一个问题:既然小波基函数可以进行灵活的选取,那么在可实现的条件下,是否存在以及怎样才能找到最佳或较佳的小波基函数呢?本文从频谱利用率的角度出发,讨论如何设计最佳正交小波,给出了设计方法和结果.

## 2 小波调制的基本概念

所谓小波调制就是用小波和尺度函数对信息比特进行基带波形编码.假设一个信息比特的时域宽度是  $T_b$ ,  $A_j$  和  $B_j$  是输入信息序列,假设  $\psi(t)$  和  $\phi(t)$  分别是小波和尺度函数,则定义基于尺度函数的 BPSK 调制方式 (S-BPSK) 以及基于小波和尺度函数的 BPSK 调制方式 (SW-BPSK)<sup>[4]</sup> 分别为:

$$x_s(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{A_j}{\sqrt{T_b}} \phi\left(\frac{t-jT_b}{T_b}\right), \quad (1)$$

$$x_{sw}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{A_j}{\sqrt{T_b}} \phi\left(\frac{t-jT_b}{T_b}\right) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{B_j}{\sqrt{T_b}} \psi\left(\frac{t-jT_b}{T_b}\right), \quad (2)$$

<sup>1</sup> 1998-05-12 收到, 1999-02-06 定稿

其中为了满足平移正交性,  $T_b$  必须是 2 的幂次方。不难地把上述 BPSK 调制方式推广到 QPSK 方式——SW-QPSK<sup>[4]</sup>。另外, 由于小波和尺度函数的平移正交性, 当它们用于调制时不存在码间干扰, 这是除频谱利用率较高以外小波调制的另一个优点。

在现有的用于调制的各类小波中, Daubechies 和 Battle-Lemarie 小波系列研究最多。Daubechies 小波的特点是在时域上具有紧支撑, 并且实现比较容易, 用 FIR 滤波器可以实现。Battle-Lemarie 小波的特点是频谱衰减很快, 但缺点是必须用 IIR 滤波器实现, 否则会带来误差, 而且会破坏正交性。本文就是针对这种情况, 希望通过最优化设计, 吸取两者的优点, 对小波调制作一些探讨。

### 3 最佳小波调制的获得

讨论小波分析可以从多种数学角度出发, 其中从滤波器阵列出发无疑是比较方便的一种。这样做有两个好处: 首先, 在频域上可以通过滤波器阵列比较直观地理解小波和尺度函数; 其次, 通过正交镜像滤波器可以方便地产生小波和尺度函数。本文讨论用 FIR 正交镜像滤波器所产生的正交小波函数及其对应的尺度函数。假设  $h(n)$  和  $g(n)$  分别是低通和带通滤波器的时域响应, 它们互为镜像,  $H(z)$  和  $G(z)$  为对应的  $z$  变换, 则我们所讨论的正交小波和尺度函数必须满足以下两个等式<sup>[5]</sup>:

$$\begin{bmatrix} H(z) \\ G(z) \end{bmatrix} = R_J \Lambda(z^2) R_{J-1} \Lambda(z^2) \cdots R_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -z^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$-\pi/4 = \theta_J + \theta_{J-1} + \cdots + \theta_0, \quad (4)$$

$$R_m = \begin{bmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{bmatrix}, \quad 0 \leq m \leq J, \quad (5)$$

$$\Lambda(z^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中  $J$  与滤波器长度  $N$  的关系是  $N = 2J + 2$ 。

只要满足 (3) 和 (4) 式, 小波和尺度函数就是正交的, 而且它们可以通过 FIR 滤波器  $h(n)$  和  $g(n)$  产生。

本文所讨论的频谱最优化问题, 从数学角度出发实际上是一个求最小值的问题。我们考虑 S-BPSK 和 SW-BPSK 两种调制方法, 选取的目标函数是 BW20 (包含 99% 功率的带宽) 和 BW30 (包含 99.9% 功率的带宽)。因为目标函数没有解析表达式, 只能采用数值解法。具体的算法<sup>[5]</sup>如下: (1) 用 (4) 式代入 (3) 式, 假设消去  $\theta_J$ , 则剩下的变量是  $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{J-1}$ , 我们已把约束条件下的最小值问题转化为无约束条件下的最小值问题; (2) 选取一组初始值  $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{J-1}$ , 我们通过 (3) 式计算出 QMF 滤波器的时域响应  $h(n)$  和  $g(n)$ ; (3) 应用 cascade 算法<sup>[2]</sup>, 通过  $h(n)$  和  $g(n)$  来计算小波函数  $\psi(t)$  和尺度函数  $\phi(t)$ ; (4) 利用  $\psi(t)$  和  $\phi(t)$  计算在 S-BKSK 和 SW-BPSK 两种调制情况下的 BW20 和 BW30; (5) 重复步骤 (2)-(4), 寻找最小值。

我们利用 MATLAB 所提供单纯形法和梯度法两种方法来求最小值。计算结果列在表 1 中。为了便于比较, 采用 Daubechies 小波系列和 Battle-Lemarie 小波系列的 BW20 和 BW30 均列在表 2 中, 其中 DBN 表示  $N$  阶 Daubechies 小波系列 ( $2N$  抽头),  $M$  表示 FIR 滤波器的抽头数。

表 1 采用最佳小波和尺度函数时的带宽 (单位:  $1/T_b$ )

	BW20		BW30	
	S-BPSK	SW-BPSK	S-BPSK	SW-BPSK
$M=6$	0.544	1.098	0.648	1.295
$M=8$	0.601	1.218	1.174	2.500
$M=10$	0.534	1.067	0.614	1.228
$M=12$	0.557	1.114	0.629	1.258
$M=14$	0.523	1.047	0.586	1.172
$M=16$	0.553	1.127	0.609	1.221
$M=18$	0.514	1.028	0.566	1.133

表 2 采用 Daubechies(DB) 和 Battle-Lemarie 小波系列时的带宽 (单位:  $1/T_b$ )

	BW20		BW30	
	S-BPSK	SW-BPSK	S-BPSK	SW-BPSK
DB3 ( $M=6$ )	0.765	1.530	2.507	5.015
DB4 ( $M=8$ )	0.663	1.326	1.523	3.046
DB5 ( $M=10$ )	0.632	1.263	1.408	2.816
DB6 ( $M=12$ )	0.613	1.226	0.733	1.466
DB7 ( $M=14$ )	0.601	1.201	0.689	1.378
DB8 ( $M=16$ )	0.591	1.182	0.669	1.338
DB9 ( $M=18$ )	0.584	1.167	0.656	1.312
DB10 ( $M=20$ )	0.577	1.155	0.646	1.292
DB15 ( $M=30$ )	0.557	1.114	0.615	1.230
DB18 ( $M=36$ )	0.550	1.099	0.603	1.206
DB29 ( $M=58$ )	0.534	1.068	0.578	1.156
Battle-Lemarie	0.554	1.109	0.625	1.250

#### 4 计算结果和讨论

把表 2 与表 1 相比较, 可以看出: 第一, 在相同抽头数  $M$  的情况下, 最佳小波调制的带宽有了明显的减小, 这一变化在  $M$  较小时表现得尤其明显; 第二, 在频谱性能相近的情况下, 最佳小波调制的抽头数  $M$  要明显地减小. 关于第二点可以通过比较来证明. 我们以  $M=6$  和  $M=10$  的最佳小波系列与 Daubechies 系列作一比较, 所选 Daubechies 系列的依据是频谱性能最接近并且要不超过最佳小波系列. 详细结果见表 3.

表 3 最佳小波 (OP) 系列与 Daubechies(DB) 系列的比较

BW20				BW30			
S-BPSK		SW-BPSK		S-BPSK		SW-BPSK	
OP6	DB18	OP6	DB18	OP6	DB9	OP6	DB9
0.544	0.550	1.098	1.099	0.648	0.656	1.295	1.312
$M$ 之比 = $6:(18 \times 2)=1:6$				$M$ 之比 = $6:(9 \times 2)=1:3$			
OP10	DB29	OP10	DB29	OP10	DB15	OP10	DB15
0.534	0.534	1.067	1.068	0.614	0.615	1.228	1.230
$M$ 之比 = $10:(29 \times 2)=1:5.8$				$M$ 之比 = $10:(15 \times 2)=1:3$			

下面作进一步分析. 以  $M=10$  为例, 考虑 SW-QPSK 调制方式. 当选择 BW20 作为带宽指标时, 频谱利用率是  $4/1.067=3.75$  b/(s·Hz); 当选择 BW30 作为带宽指标时, 频谱利用率是  $4/1.228=3.26$  b/(s·Hz), 而 MSK 的频谱利用率分别是  $3.63$  b/(s·Hz) 和  $1.6$  b/(s·Hz)<sup>[4]</sup>. 另外, SW-QPSK 方式的误比特率与 QPSK 的误比特率完全相同. 所以, 我们现在只要用  $M=10$  的 FIR 滤波器就能使频谱利用率超过 Battle-Lemarie 小波调制, 超过 MSK, 同时保

持 QPSK 调制方式的较低误码率，综合考虑频谱利用率和误码率以及实现复杂性，我们认为最佳小波调制是有一定的优越性的。表 4 列出了  $M=10$  时的低通滤波器的时域响应。图 1- 图 4 给出了一些功率谱分布和带外功率谱分布，其中 OPN 指用  $N$  抽头 FIR 滤波器产生的最佳小波系列，归一化频率指  $fT_b$ 。

表 4 用来产生最佳小波和尺度函数的低通滤波器  $h(n)$  的时域响应 ( $M=10$ )

BW20		BW30	
S-BPSK	SW-BPSK	S-BPSK	SW-BPSK
$4.8044 \times 10^{-2}$	$4.7485 \times 10^{-2}$	$3.8289 \times 10^{-2}$	$3.8183 \times 10^{-2}$
$1.1206 \times 10^{-1}$	$1.1203 \times 10^{-1}$	$9.3846 \times 10^{-2}$	$9.4937 \times 10^{-2}$
$-1.4838 \times 10^{-2}$	$-1.4280 \times 10^{-2}$	$-1.1460 \times 10^{-2}$	$-1.1502 \times 10^{-2}$
$-1.3458 \times 10^{-1}$	$-1.3549 \times 10^{-1}$	$-1.3544 \times 10^{-1}$	$-1.3621 \times 10^{-1}$
$1.1551 \times 10^{-1}$	$1.1642 \times 10^{-1}$	$1.2016 \times 10^{-1}$	$1.2069 \times 10^{-1}$
$5.8873 \times 10^{-1}$	$5.8912 \times 10^{-1}$	$6.1655 \times 10^{-1}$	$6.1546 \times 10^{-1}$
$6.8593 \times 10^{-1}$	$6.8564 \times 10^{-1}$	$6.9499 \times 10^{-1}$	$6.9462 \times 10^{-1}$
$3.0513 \times 10^{-1}$	$3.0470 \times 10^{-1}$	$2.4876 \times 10^{-1}$	$2.5080 \times 10^{-1}$
$-1.2754 \times 10^{-1}$	$-1.2816 \times 10^{-1}$	$-1.3487 \times 10^{-1}$	$-1.3488 \times 10^{-1}$
$-1.6424 \times 10^{-1}$	$-1.6324 \times 10^{-1}$	$-1.1661 \times 10^{-1}$	$-1.1788 \times 10^{-1}$

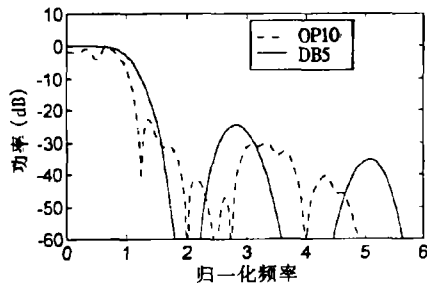


图 1

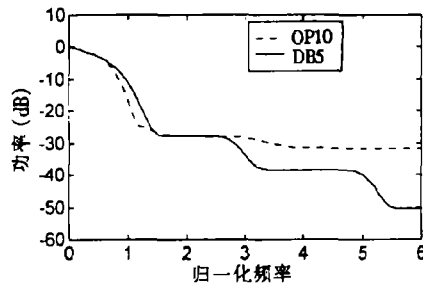


图 2

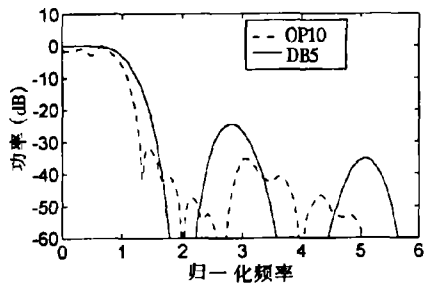


图 3

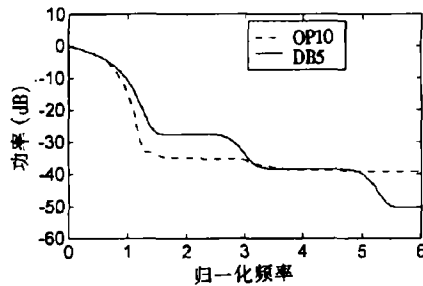


图 4

需要指出的是本文主要针对 Gauss 信道讨论小波调制，在这种情况下，小波和尺度函数的平移正交性得到保持，因而无码间干扰。对于多径衰落信道，码间干扰依然存在。另外，虽然理论上关于小波和尺度函数的算法早已存在，工程上的实现仍然值得继续研究。

## 5 结 论

本文利用小波和尺度基函数选取的灵活性, 通过最优化设计, 找到了用 FIR 滤波器来实现的最佳正交小波和尺度函数, 使得小波调制的频谱利用率有了较大的提高. 通过比较, 我们得到这样的结论: 在同样的实现复杂性条件下, 最佳小波调制的频谱利用率明显优于 Daubechies 系列; 在同样的频谱利用率条件下, 最佳小波调制的实现复杂性比 Daubechies 系列要明显的降低. 因此, 可以这样说, 最佳小波调制兼具 Daubechies 系列的可实现性与 Battle-Lemarie 系列的优良频谱特性, 有着一定的应用价值.

## 参 考 文 献

- [1] Erdol N, Bao F, Chen Z. Wavelet Modulation: A Prototype for Digital Communication Systems. Southcon, Piscataway, USA: 1995, 168-171.
- [2] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Commun. Pure Appl. Math. 1988, 41(7): 909-996.
- [3] Mallat S. A theory of multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. IEEE Trans. Patt. Anal. and Machine Intelli., 1989, 11(7): 674-693.
- [4] Gandhi P P, Rao S S, Pappu R S. Wavelets for baseband coding of waveforms. Globecom, San Francisco, USA: 1994, 363-367.
- [5] Morris J M, Akunuri V. Minimum duration orthonormal wavelets. Opt. Eng., 1996, 35(7): 2079-2087.

## OPTIMAL WAVELET MODULATION

Shi Qinghua Cheng Shixin

(National Mobile Comm. Research Lab., Southeast University, Nanjing 210096)

**Abstract** Wavelet analysis has being gradually applied to communications, especially, wavelet modulation receives much considerations for its bandwidth efficiency. This paper discusses how to design optimal orthogonal wavelet and scaling functions which are generated by FIR filters, from the view point of bandwidth efficiency, the designing method and results are given in details. By comparison, the bandwidth efficiency of wavelet modulation has improved significantly for the same system complexity after optimization, so relatively good spectral performance using simple FIR filters can be obtained.

**Key words** Wavelet modulation, Spectrum efficiency, Wavelet and Scale function, Quadrature mirror filter(QMF)

石庆华: 男, 1969 年生, 博士生, 现从事基于小波变换的 MC-CDMA 的研究.

程时昕: 男, 1936 年生, 教授, 博士生导师, 东南大学移动通信国家重点实验室主任, 现从事数字移动通信与个人通信网的研究.