

大变化灵敏度的计算及其性质

王予宏 郑焕群

(天津大学电子工程系)

提 要

本文给出了大变化灵敏度计算的一种新方法——混合矩阵法。该方法是含有受控源的线性 m 端口网络的混合矩阵方程为依据的,它能分析包括VCVS和CCVS器件的电路。本文还证明了大变化灵敏度计算的8个性质,应用它们,可使运算更加方便灵活。

一、前 言

大变化灵敏度是电路分析的一个重要环节,尤其是对网络特性要求严格的电路,更显得重要。它不仅可用于电路分析,还可用于电路设计、故障检测、模型简化等方面。有关大变化灵敏度问题,国内外已发表一些文献^[1-3],计算方法主要有以下几种:(1)补偿电流源法;(2)矩阵变换法。所涉及到的元件为:导纳、电压控制电流源等,但不能对含有受控电压源元件的电路进行分析。而在对集成电路进行分析时,常用到宏模型,不可避免地要用受控电压源元件。为此,本文给出了一种新的计算方法——混合矩阵法。它是建立在具有受控源的线性 m 端口网络混合矩阵方程基础之上,可将大变化灵敏度的计算扩充到含有各类电子器件的线性电路。为使该方法更系统和完善,运用方便灵活,本文还推导出了大变化灵敏度运算的8个性质。

二、大变化灵敏度的重要意义

在电路分析和设计中,常用微分灵敏度来衡量一个电路的优劣。当元件值变化很小时,对网络特性函数 F 的影响程度用

$$\Delta F = \sum_{i=1}^n S_{x_i}^F \frac{\Delta x_i}{x_i} F \quad (1)$$

表示,其中 F 、 x_i 、 $S_{x_i}^F$ 分别是网络特性函数、元件参数和微分灵敏度。但当网络中元件值变化较大时,用(1)式计算网络特性函数的变化量不能准确地反映电路的工作情况。举例说明如下:

例1 图1所示为一有源RC低通滤波器,其传递函数为

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{K \cdot \frac{1}{R_1 C_1} \cdot \frac{1}{R_2 C_2}}{s^2 + \left[\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} (1-K) \right] s + \frac{1}{R_1 C_1} \cdot \frac{1}{R_2 C_2}}$$

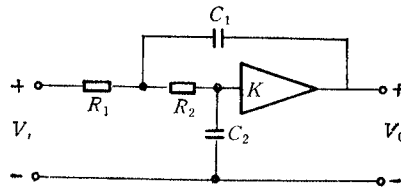


图1 低通滤波器

设其标称值为:

$$\frac{1}{R_1 C_1} = 1; \quad \frac{1}{R_2 C_2} = 1; \quad \frac{1}{R_2 C_1} = 8.1;$$

$K = 10$. 当运算放大器的放大倍数 K 发生 -1% 的偏差时, 即 $K = 9.9$, 计算 $\left| \frac{\Delta H}{H} \right|_{s=j1}$ 的值.

解 (1) 用准确法计算 因为 $|H(S)|_{s=j1} = 100$, 元件值发生变化后, 传递函数的变化量为 $|\Delta H(S)|_{s=j1} = 50.5$, 所以

$$\left| \frac{\Delta H}{H} \right|_{s=j1} = 50.5\%.$$

(2) 用微分灵敏度方法计算 传递函数 $H(S)$ 相对参数 K 的微分灵敏度为

$$S_K^H = \frac{\left\{ S^2 + \left[\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} (1 - K) \right] S + \frac{1}{R_1 C_1} \cdot \frac{1}{R_2 C_2} \right\} + K \cdot \frac{1}{R_2 C_2} \cdot S}{S^2 + \left[\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} (1 - K) \right] S + \frac{1}{R_1 C_1} \cdot \frac{1}{R_2 C_2}}$$

将元件标称值代入, 当 $S = j1$ 时可得 $S_K^H|_{s=j1} = 101$, 所以

$$\left| \frac{\Delta H}{H} \right|_{s=j1} = 101\%.$$

(3) 误差分析 上述两种方法计算的相对误差为

$$E_r = \frac{|101\% - 50.5\%|}{50.5\%} = 100\%.$$

上例说明, 在网络输出情况要求比较严格时, 虽然网络元件值变化范围小于 10% , 也需要进行大变化灵敏度分析, 才能达到一定的准确度.

三、大变化灵敏度的性质

定义 设 F 表示网络的特性函数, x 表示网络元件值, I 表示大变化灵敏度, 则

$$I_x^F = \frac{x}{F} \frac{\Delta F}{\Delta x}. \quad (2)$$

根据此定义, 大变化灵敏度有如下 8 个性质.

$$\langle 1 \rangle I_x^{KF} = I_{Kx}^F = I_x^F \quad (\text{其中 } K \text{ 为常数}) \quad (3)$$

$$\langle 2 \rangle I_x^x = I_x^{Kx} = I_{Kx}^x = I_{Kx}^{Kx} = 1 \quad (4)$$

$$\langle 3 \rangle I_x^{F_1 F_2} = I_x^{F_1} + I_x^{F_2} + I_x^{F_1} I_x^{F_2} \frac{\Delta x}{x}$$

$$\begin{aligned} I_x^{\prod_{i=1}^n F_i} &= \sum_{j=1}^n I_x^{F_j} + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 \neq j_2}}^n I_x^{F_{j_1}} I_x^{F_{j_2}} \frac{\Delta x}{x} + \frac{1}{3!} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3=1 \\ j_1 \neq j_2 \neq j_3}}^n I_x^{F_{j_1}} I_x^{F_{j_2}} I_x^{F_{j_3}} \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n=1 \\ j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_n}}^n I_x^{F_{j_1}} I_x^{F_{j_2}} \dots I_x^{F_{j_n}} \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^{n-1} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\langle 4 \rangle I_x^{F_n} = \frac{x}{\Delta x} \left[\left(1 + I_x^F \frac{\Delta x}{x} \right)^n - 1 \right] \quad (6)$$

$$\langle 5 \rangle I_x^{F_1/F_2} = (I_x^{F_1} - I_x^{F_2}) / \left(1 + I_x^{F_2} \frac{\Delta x}{x} \right) \quad (7)$$

$$\langle 6 \rangle I_{x_1}^F = I_{x_2}^F / I_{x_1}^{x_2} \quad (\text{其中 } x_1 \text{ 是 } x_2 \text{ 的函数}) \quad (8)$$

$$\langle 7 \rangle I_x^{F_1+F_2} = (F_1 I_x^{F_1} + F_2 I_x^{F_2}) / (F_1 + F_2) \quad (9)$$

$$\langle 8 \rangle I_x^{\ln F} = \frac{x}{\Delta x} \ln \left(1 + I_x^F \frac{\Delta x}{x} \right) / \ln F \quad (10)$$

以上各式中, F_1, F_2, \dots, F_n 分别表示不同网络的特性函数. 在附录中我们给出性质 $\langle 3 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 6 \rangle, \langle 7 \rangle, \langle 8 \rangle$ 的证明, 至于性质 $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 5 \rangle$, 通过定义及有关证明的推导, 即可得出, 限于篇幅, 这里从略.

应用以上性质, 可以简化运算过程, 举例说明如下:

例 2 在滤波器的实现中, 往往采用二阶网络级联形式来求得所需特性, 图 2 所示即为这样的级联网络, 其传递函数为

$$H = \frac{V_2}{V_1} = H_1 H_2 \dots H_n,$$

其中 H_1, H_2, \dots, H_n 为各子网络的传递函数. 设 x 为第一节子网络中的元件, 求 I_x^H .

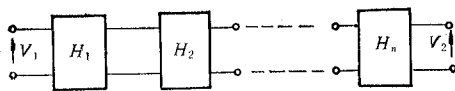


图 2 滤波器网络

解 根据性质 $\langle 3 \rangle$ 有

$$\begin{aligned} I_x^H &= \sum_{j=1}^n I_x^{H_j} + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 \neq j_2}}^n I_x^{H_{j_1}} I_x^{H_{j_2}} \frac{\Delta x}{x} + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n=1 \\ j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_n}}^n I_x^{H_{j_1}} I_x^{H_{j_2}} \dots I_x^{H_{j_n}} \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

因为在子网络中 H_2, H_3, \dots, H_n 中无元件 x , 所以 $I_x^{H_i} (i = 2, 3, \dots, n)$ 都为 0, 所以

$$I_x^H = I_x^{H_1}.$$

由此看出, 利用性质 $\langle 3 \rangle$, 可以大大简化运算, 只要求出相应节子网络的函数对 x 的大变化灵敏度即可. 利用其它几个性质, 解不同问题时, 同样可达到此种目的.

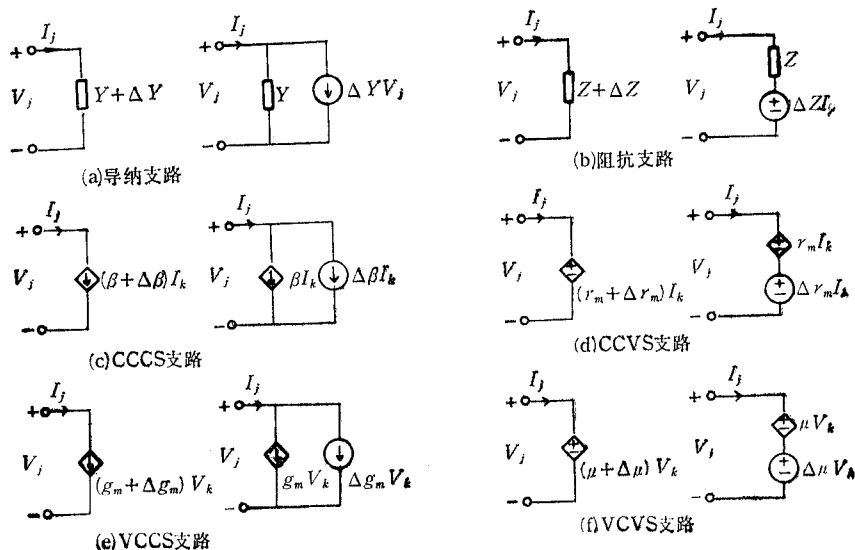


图3 各种支路的等效电路

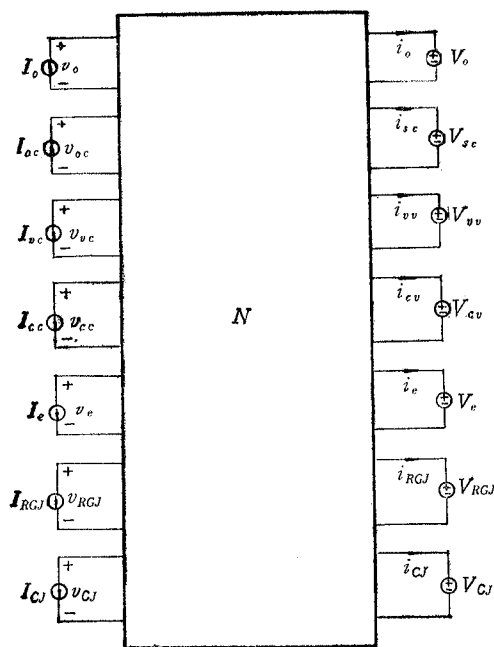


图 4

图中的抽出端口量用大写字母给出,非抽出端口量用小写字母给出。图中抽出端口量所代表的意义如下:

I_o : 输出电压端口电流,

I_{vc} : 受控电流源端口,

I_e : 输入电流源,

I_{cj} : 受控电流源变化量的补偿电流源端口,

V_{sc} : 控制电流端口的电压,

V_{cv} : 受控电压源端口,

V_{RGJ} : 阻抗支路变化量的补偿电压源端口,

I_{oc} : 控制电压端口的电流,

I_{cc} : 受控电流源端口,

I_{RGJ} : 导纳支路变化量的补偿电流源端口,

V_o : 输出电流端口电压,

V_{vv} : 受控电压源端口,

V_e : 输入电压源,

V_{cj} : 受控电压源变化量的补偿电压源端口,

四、大变化灵敏度的计算

本文重点给出大变化灵敏度计算的混合矩阵法,其优点是,将大变化灵敏度的计算扩充到线性电路各类电子器件。下面给出该方法的证明和计算过程。

根据置换定理,可将导纳型元件和受控电流源的变化量用一个等效并联的电流源来代替,将阻抗型元件和受控电压源的变化量用一个等效串联的电压源来代替(见图3),将这些补偿电流源和电压源分别抽出作为电流端口和电压端口。再根据具有受控源的线性 m 端口网络建立混合矩阵 H 。混合矩阵 H 的建立方法,可参考文献[4],这里不作详细介绍。

设所建立的 H 矩阵为:

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ \frac{v_0}{V_{RGJ}} \\ \frac{i_{RGJ}}{V_{CJ}} \\ \frac{v_{RGJ}}{V_{CJ}} \\ i_{CJ} \\ \frac{v_{CJ}}{V_{SC}} \\ i_{SC} \\ \frac{v_{0C}}{V_{VV}} \\ \frac{i_{VV}}{V_{VC}} \\ v_{VC} \\ i_{CV} \\ \frac{v_{CC}}{V_e} \\ i_e \\ v_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{51} & H_{52} & H_{53} & H_{54} & H_{55} & H_{56} \\ H_{61} & H_{62} & H_{63} & H_{64} & H_{65} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ \frac{I_0}{V_{RGJ}} \\ \frac{I_{RGJ}}{V_{CJ}} \\ \frac{I_{CJ}}{V_{SC}} \\ \frac{I_{0C}}{V_{VV}} \\ I_{VC} \\ V_{CV} \\ \frac{I_{CC}}{V_e} \\ I_e \end{bmatrix}. \quad (11)$$

由建立端口特性知:

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} V_{SC} \\ I_{0C} \end{bmatrix} = 0.$$

若令

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ 0 & g_m \\ r_m & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix},$$

则有

$$[V_{VV} \ I_{VC} \ V_{CV} \ I_{CC}]^T = [i_{SC} \ v_{0C}]^T. \quad (12)$$

由矩阵方程(11)式和(12)式,可得

$$\begin{bmatrix} i_{SC} \\ v_{0C} \end{bmatrix} = (I - H_{45}K)^{-1} \left[H_{42} \begin{bmatrix} V_{RGJ} \\ I_{RGJ} \end{bmatrix} + H_{43} \begin{bmatrix} V_{CJ} \\ I_{CJ} \end{bmatrix} + H_{46} \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} \right], \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} i_0 \\ v_0 \end{bmatrix} &= [H_{12} + H_{15}K(I - H_{45}K)^{-1}H_{42}] \begin{bmatrix} V_{RGJ} \\ I_{RGJ} \end{bmatrix} \\
&+ [H_{13} + H_{15}K(I - H_{45}K)^{-1}H_{43}] \begin{bmatrix} V_{CJ} \\ I_{CJ} \end{bmatrix} \\
&+ [H_{16} + H_{15}K(I - H_{45}K)^{-1}H_{46}] \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix}, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} i_{RGJ} \\ v_{RGJ} \end{bmatrix} &= [H_{22} + H_{25}K(I - H_{45}K)^{-1}H_{42}] \begin{bmatrix} V_{RGJ} \\ I_{RGJ} \end{bmatrix} \\
&+ [H_{23} + H_{25}K(I - H_{45}K)^{-1}H_{43}] \begin{bmatrix} V_{CJ} \\ I_{CJ} \end{bmatrix} \\
&+ [H_{26} + H_{25}K(I - H_{45}K)^{-1}H_{46}] \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix}. \quad (15)
\end{aligned}$$

令

$$\Delta K = \begin{bmatrix} 0 & \Delta\mu \\ \Delta r_m & 0 \\ 0 & \Delta g_m \\ \Delta\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

则有

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} V_{CJ} \\ I_{CJ} \end{bmatrix} &= \Delta K \begin{bmatrix} i_{SC} \\ v_{0C} \end{bmatrix} = \Delta K(I - H_{45}K)^{-1} [H_{42} \begin{bmatrix} V_{RGJ} \\ I_{RGJ} \end{bmatrix} \\
&+ H_{43} \begin{bmatrix} V_{CJ} \\ I_{CJ} \end{bmatrix} + H_{46} \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix}]. \quad (17)
\end{aligned}$$

由(17)式,可得

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} V_{CJ} \\ I_{CJ} \end{bmatrix} &= [I - \Delta K(I - H_{45}K)^{-1}H_{43}]^{-1} \Delta K(I - H_{45}K)^{-1} \\
&\times [H_{42} \begin{bmatrix} V_{RGJ} \\ I_{RGJ} \end{bmatrix} + H_{46} \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix}]. \quad (18)
\end{aligned}$$

将(18)式代入(14)式和(15)式,可得

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = B_1 \begin{bmatrix} V_{RGJ} \\ I_{RGJ} \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} + B_3, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} i_{RGJ} \\ v_{RGJ} \end{bmatrix} = (A_1 + A_2) \begin{bmatrix} V_{RGJ} \\ I_{RGJ} \end{bmatrix} + A_3 \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} + A_4 \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix}, \quad (20)$$

式中

$$\begin{aligned}
B_1 &= [H_{12} + H_{15}K(I - H_{45}K)^{-1}H_{42}] + [H_{13} + H_{15}K(I - H_{45}K)^{-1}H_{43}] \\
&+ [I - \Delta K(I - H_{45}K)^{-1}H_{43}] \Delta K(I - H_{45}K)^{-1}H_{42}, \quad (21)
\end{aligned}$$

$$B_2 = [H_{13} + H_{15}K(I - H_{45}K)^{-1}H_{43}][I - \Delta K(I - H_{45}K)^{-1}H_{43}]^{-1} \\ \times \Delta K(I - H_{45}K)^{-1}H_{46}, \quad (22)$$

$$B_3 = H_{15}K(I - H_{45}K)^{-1}H_{46} + H_{16}; \quad (23)$$

$$A_1 = H_{22} + H_{25}K(I - H_{45}K)^{-1}H_{42}, \quad (24)$$

$$A_2 = [H_{23} + H_{25}K(I - H_{45}K)^{-1}H_{43}][I - \Delta K(I - H_{45}K)^{-1}H_{43}]^{-1}\Delta K \\ \times (I - H_{45}K)^{-1}H_{42}, \quad (25)$$

$$A_3 = [H_{23} + H_{25}K(I - H_{45}K)^{-1}H_{43}][I - \Delta K(I - H_{45}K)^{-1}H_{43}]^{-1}\Delta K \\ \times (I - H_{45}K)^{-1}H_{46}, \quad (26)$$

$$A_4 = H_{26} + H_{25}K(I - H_{45}K)^{-1}H_{46}. \quad (27)$$

由图 3 和图 4, 根据置换定理知:

$$\begin{bmatrix} i_{RGJ} \\ v_{RGJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta Z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta \bar{Y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{RGJ} \\ I_{RGJ} \end{bmatrix} = \Delta P \begin{bmatrix} V_{RGJ} \\ I_{RGJ} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

式中

$$\Delta P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta Z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta \bar{Y}} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

将(28)式代入(20)式, 经整理得

$$\begin{bmatrix} V_{RGJ} \\ I_{RGJ} \end{bmatrix} = [\Delta P - (A_1 + A_2)]^{-1}(A_3 + A_4) \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix}. \quad (30)$$

再将(30)式代入(19)式, 可得

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = B_1[\Delta P - (A_1 + A_2)]^{-1}(A_3 + A_4) \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} + (B_2 + B_3) \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix}. \quad (31)$$

(31)式即是网络元件变化后的输出特性. 如设网络未发生任何变化, 则

$$\begin{bmatrix} V_{RGJ} \\ I_{RGJ} \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} V_{CJ} \\ I_{CJ} \end{bmatrix} = 0.$$

所以

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = H_{15} \begin{bmatrix} V_{VV} \\ I_{VC} \\ V_{CV} \\ I_{CC} \end{bmatrix} + H_{16} \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} i_{SC} \\ v_{0C} \end{bmatrix} = H_{45} \begin{bmatrix} V_{VV} \\ I_{VC} \\ V_{CV} \\ I_{CC} \end{bmatrix} + H_{46} \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix}. \quad (33)$$

因为

$$[V_{VV} \ I_{VC} \ V_{CV} \ I_{CC}]^T = K[i_{SC} \ v_{0C}]^T, \quad (34)$$

所以由(32)、(33)、(34)式,可得

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = [H_{15}K(I - H_{45}K)^{-1}H_{46} + H_{16}] \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix}. \quad (35)$$

将(35)式的系数矩阵与 B_3 的计算公式相比较,它们是相等的,因此由(31)式可知,由于网络元件变化引起网络输出特性的改变量为

$$\Delta \begin{bmatrix} i_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \{B_1[\Delta P - (A_1 + A_2)]^{-1}(A_3 + A_4) + B_2\} \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix}. \quad (36)$$

(36)式就是所要求的当网络中多个元件同时变化时的大变化灵敏度。在该算法中需要求逆矩阵,下面证明该逆矩阵的存在。

证明 $[\Delta P - (A_1 + A_2)]^{-1}$ 存在

用反证法。若设 $[\Delta P - (A_1 + A_2)]^{-1}$ 不存在,则由(30)式表明, $\begin{bmatrix} V_{RGJ} \\ I_{RGJ} \end{bmatrix}$ 中的元素相关或者说它们不存在,但从建立端口特性时,我们知道这是不可能的。如果这一假设成立,则表明网络元件未发生任何变化,这与在讨论网络元件变化时的情况相矛盾。所以说 $[\Delta P - (A_1 + A_2)]^{-1}$ 存在。 证毕

证明 $[I - \Delta K(I - H_{45}K)^{-1}H_{43}]^{-1}$ 存在

因为 $\begin{bmatrix} V_{CJ} \\ I_{CJ} \end{bmatrix}$ 是由受控源参数变化引起的,所以它是非独立的。这是因为当参数的变化范围给定后,它受控制支路的控制量支配。根据线性电路的迭加原理,它一定可表示为 $\begin{bmatrix} V_{RGJ} \\ I_{RGJ} \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix}$ 的线性组合。由(18)式可知,若该逆矩阵不存在,说明它不能表示为 $\begin{bmatrix} V_{RGJ} \\ I_{RGJ} \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix}$ 的线性组合,这与线性网络的性质相矛盾,所以 $[I - \Delta K(I - H_{45}K)^{-1} \times H_{43}]^{-1}$ 一定存在。 证毕

至于 $(I - H_{45})^{-1}$ 存在与否,由受控源是作为电压端口还是作为电流端口决定^[4],在此我们假定 $(I - H_{45})^{-1}$ 存在。

从 A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 的计算公式可见,其中有两处求逆运算,且矩阵间相乘有重复性,对此可利用计算机的优越性来避免。因为 H_{ij} 的计算与元件的变化量无关,所以一旦求得 H_{ij} 后,后续工作就无需重新计算 H_{ij} ,只需计算 A_2, A_3 、和 B_1, B_2 即可。

所给出的混合矩阵法,对单个元件和多个元件同时变化的情况均适用。图5给出了混合矩阵法求取大变化灵敏度的程序框图,图6给出了求 H 矩阵的子程序框图。

例3 在图7所示的电路中,计算导纳元件 G_1 的变化对输出特性 V_0 的影响。

解 首先建立端口,如图8所示。然后建立混合矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \frac{V_0}{V_2} \\ \frac{I_1}{I_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/(G_1 + G_2) & 1/(G_1 + G_2) & G_1/(G_1 + G_2) \\ 1/(G_1 + G_2) & -1/(G_1 + G_2) & G_2/(G_1 + G_2) \\ -G_1/(G_1 + G_2) & -G_2/(G_1 + G_2) & -G_1G_2/(G_1 + G_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{I_0}{I_2} \\ \frac{V_1}{V_1} \end{bmatrix}.$$

与(11)式对比,可知

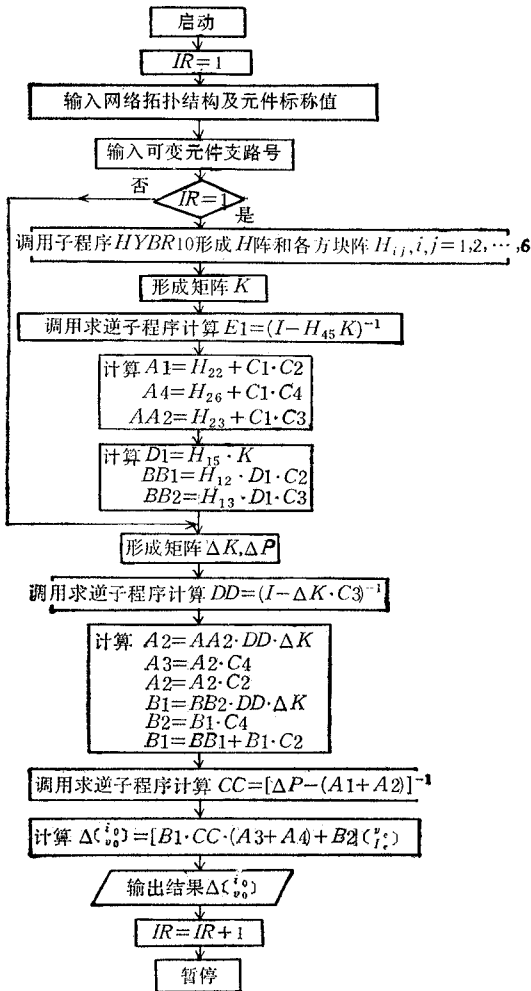


图5 求大变化灵敏度程序框图

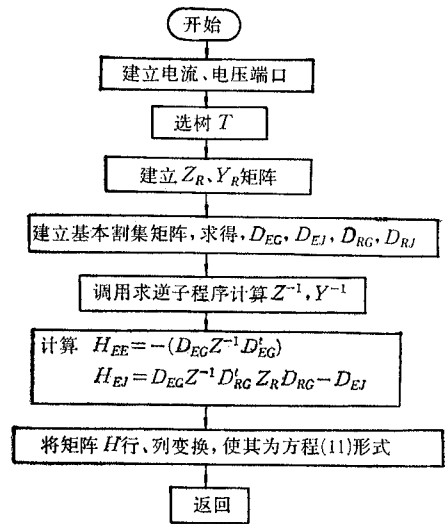


图6 求H矩阵程序框图

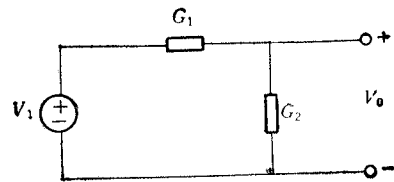


图7 电路图

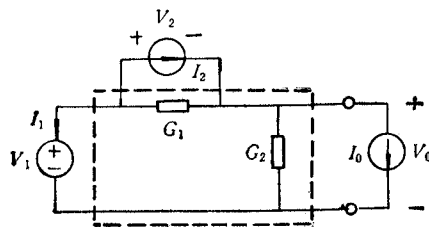


图8 抽出端口后的电路

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i_{RGJ} \\ v_{RGJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i_e \\ v_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ V_1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_{RGJ} \\ V_{RGJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix},$$

其它项都为零, 所以

$$B_1 = H_{12} = \frac{1}{G_1 + G_2}, \quad B_2 = 0,$$

$$A_1 = H_{22} = -\frac{1}{G_1 + G_2}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0,$$

$$A_4 = \frac{G_2}{G_1 + G_2}, \quad \Delta P = \frac{1}{\Delta G_1},$$

$$\begin{aligned} \Delta V_0 &= \{B_1[\Delta P - (A_1 + A_2)]^{-1}(A_3 + A_4) + B_2\} \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{G_1 + G_2} \left[\frac{1}{\Delta G_1} + \frac{1}{G_1 + G_2} \right]^{-1} \frac{G_2}{G_1 + G_2} V_1 \\ &= \frac{G_2 \Delta G_1}{(G_1 + G_2 + \Delta G_1)(G_1 + G_2)} V_1. \end{aligned}$$

上式即为 G_1 变化时输出特性 V_0 的变化量。表 1 分别给出 $|\Delta G_1/G_1|$ 为 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80%, 90% 时, 用微分法和大变化灵敏度法计算 ΔV 的结果。

表 1

$\Delta V_0 \backslash \Delta G_1/G_1 $	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
微分法	2.2222	4.4444	6.6667	8.8889	11.2333	13.3333	15.5556	17.7778	20
大变化灵敏度法	2.0833	3.9215	5.5556	7.0175	8.3333	9.5238	10.6069	11.5942	12.5
绝对误差	0.1389	0.5229	1.1111	1.8714	2.9	3.8095	4.9495	6.1836	7.5

五、结 束 语

本文重点给出大变化灵敏度的计算方法—混合矩阵法, 此方法与已有的方法相比较, 扩充了计算元件类型的范围, 相应地提高了大变化灵敏度的应用范围。本文还给出了大变化灵敏度的 8 个性质, 应用此性质, 可使大变化灵敏度法更加方便灵活。

附 录

1. 性质(3)的证明

因为

$$\begin{aligned} I_{x^1 F_2}^{F_1 F_2} &= \frac{x}{F_1 F_2} \cdot \frac{\Delta(F_1 F_2)}{\Delta x} = \frac{x}{F_1 F_2} \cdot \frac{(F_1 + \Delta F_1)(F_2 + \Delta F_2) - F_1 F_2}{\Delta x} \\ &= \frac{x}{F_1} \cdot \frac{\Delta F_1}{\Delta x} + \frac{x}{F_2} \cdot \frac{\Delta F_2}{\Delta x} + \frac{x}{F_1} \cdot \frac{\Delta F_1}{\Delta x} \cdot \frac{x}{F_2} \cdot \frac{\Delta F_2}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{x} \end{aligned}$$

$$= I_{x^1}^F + I_{x^2}^F + I_{x^1}^F \cdot I_{x^2}^F \cdot \frac{\Delta x}{x}, \quad (\text{A-1})$$

所以当 $n = 2$ 时, 等式成立. 设当 $n = u$ 时, 等式成立, 即,

$$\begin{aligned} I_x^{\prod_{j=1}^u F_j} &= \sum_{j=1}^u I_{x^j}^F + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 \neq j_2}}^u I_{x^{j_1}}^F \cdot I_{x^{j_2}}^F \cdot \frac{\Delta x}{x} + \frac{1}{3!} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3=1 \\ j_1 \neq j_2 \neq j_3}}^u I_{x^{j_1}}^F \\ &\quad \cdot I_{x^{j_2}}^F \cdot I_{x^{j_3}}^F \left(\frac{\Delta x}{x} \right)^2 + \dots + \frac{1}{u!} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_u=1 \\ j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_u}}^u I_{x^{j_1}}^F \cdot I_{x^{j_2}}^F \cdot \dots \\ &\quad \cdot I_{x^{j_u}}^F \left(\frac{\Delta x}{x} \right)^{u-1}. \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

当 $n = u + 1$ 时,

$$\begin{aligned} I_x^{\prod_{j=1}^{u+1} F_j} &= \frac{x}{F_1 F_2 \cdots F_u F_{u+1}} \cdot \frac{\Delta(F_1 F_2 \cdots F_u F_{u+1})}{\Delta x} \\ &= \frac{x}{F_1 F_2 \cdots F_u F_{u+1}} \cdot \{(F_1 + \Delta F_1)(F_2 + \Delta F_2) \cdots (F_u + \Delta F_u) \\ &\quad \times (F_{u+1} + \Delta F_{u+1}) - F_1 F_2 \cdots F_u F_{u+1}\} / \Delta x \\ &= \frac{x}{F_1 F_2 \cdots F_u} \cdot \{(F_1 + \Delta F_1)(F_2 + \Delta F_2) \cdots (F_u + \Delta F_u) \\ &\quad - F_1 F_2 \cdots F_u\} / \Delta x \\ &\quad + \frac{x}{F_1 F_2 \cdots F_u F_{u+1}} \cdot \{(F_1 + \Delta F_1)(F_2 + \Delta F_2) \cdots (F_u + \Delta F_u) \\ &\quad \times \Delta F_{u+1}\} / \Delta x \\ &= I_{x^{u+1}}^F + I_x^{\prod_{j=1}^u F_j} \left(1 + \frac{\Delta F_{u+1}}{F_{u+1}} \right) \\ &= \left[I_{x^{u+1}}^F + \sum_{j=1}^u I_{x^j}^F \right] + \left[I_{x^{u+1}}^F \frac{\Delta x}{x} \sum_{j=1}^u I_{x^j}^F + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 \neq j_2}}^u I_{x^{j_1}}^F \right. \\ &\quad \cdot I_{x^{j_2}}^F \cdot \frac{\Delta x}{x} \left. \right] + \dots + \left[I_{x^{u+1}}^F \left(\frac{\Delta x}{x} \right) \frac{1}{(u-1)!} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_{(u-1)}=1 \\ j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_{(u-1)}}}^{u-1} I_{x^{j_1}}^F \right. \\ &\quad \cdot I_{x^{j_2}}^F \cdots I_{x^{j_{(u-1)}}}^F \left(\frac{\Delta x}{x} \right)^{u-2} + \frac{1}{u!} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_u=1 \\ j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_u}}^u I_{x^{j_1}}^F \cdot I_{x^{j_2}}^F \cdots I_{x^{j_u}}^F \\ &\quad \times \left(\frac{x \Delta}{x} \right)^{u-1} \left. \right] + I_{x^{u+1}}^F \frac{\Delta x}{x} \frac{1}{u!} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_u=1 \\ j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_u}}^u I_{x^{j_1}}^F \cdot I_{x^{j_2}}^F \cdots I_{x^{j_u}}^F \left(\frac{\Delta x}{x} \right)^{u-1} \\ &= \sum_{j=1}^{u+1} I_{x^j}^F + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 \neq j_2}}^{u+1} I_{x^{j_1}}^F \cdot I_{x^{j_2}}^F \cdot \frac{\Delta x}{x} + \frac{1}{3!} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3=1 \\ j_1 \neq j_2 \neq j_3}}^{u+1} I_{x^{j_1}}^F \cdot I_{x^{j_2}}^F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot I_{x^j}^{F_j} \left(\frac{\Delta x}{x} \right)^2 + \dots + \frac{1}{(u+1)!} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j(u+1)=1 \\ j_1+j_2+\dots+j(u+1)=u+1}}^{u+1} I_{x^{j_1}}^F \cdot I_{x^{j_2}}^F \\ & \cdot I_{x^{j(u+1)}}^F \cdot \left(\frac{\Delta x}{x} \right)^u, \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

所以等式成立.

证毕

2. 性质(4)的证明

因为

$$\begin{aligned} I_x^{F^n} &= \frac{x}{F^n} \frac{\Delta(F^n)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{F^n} [(F + \Delta F)^n - F^n] \\ &= \frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{F^n} [nF^{n-1}\Delta F + C_n^2 F^{n-2} \cdot \Delta F^2 + \dots + C_n^{n-1} \cdot F \cdot \Delta F^{n-1} + \Delta F^n] \\ &= \frac{x}{\Delta x} \left[n \cdot \frac{\Delta F}{F} + C_n^2 \left(\frac{\Delta F}{F} \right)^2 + \dots + C_n^{n-1} \left(\frac{\Delta F}{F} \right)^{n-1} + \left(\frac{\Delta F}{F} \right)^n \right] \\ &= \frac{x}{\Delta x} \left[\left(1 + I_x^F \frac{\Delta x}{x} \right)^n - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

所以等式成立.

证毕

3. 性质(6)的证明

因为

$$I_{x_1}^F = \frac{x_1}{F_1},$$

而

$$I_{x_2}^{x_1} = \frac{x_2}{x_1} \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2},$$

所以

$$\Delta x_1 = I_{x_2}^{x_1} \frac{x_1}{x_2} \Delta x_2.$$

将 Δx_1 值代入 $I_{x_1}^F$ 式得

$$I_{x_1}^F = \frac{x_1}{F} \frac{\Delta F x_2}{I_{x_2}^{x_1} x_1 \Delta x_2} = I_{x_2}^F / I_{x_2}^{x_1}, \quad (\text{A-5})$$

所以等式成立.

证毕

4. 性质(7)的证明

因为

$$\begin{aligned} I_{x_1+F_2}^{F_1+F_2} &= \frac{x}{F_1 + F_2} \frac{\Delta(F_1 + F_2)}{\Delta x} \\ &= \frac{x}{\Delta x} \frac{\Delta F_1 + \Delta F_2}{F_1 + F_2} \\ &= (F_1 I_{x_1}^{F_1} + F_2 I_{x_2}^{F_2}) / (F_1 + F_2), \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

所以等式成立.

证毕

5. 性质(8)的证明

因为

$$\begin{aligned}
 I_x^{\ln F} &= \frac{x}{\Delta x} \frac{\Delta(\ln F)}{\ln F} \\
 &= \frac{x}{\Delta x} \frac{\ln(\Delta F + F) - \ln F}{\ln F} \\
 &= \frac{x}{\Delta x} \frac{\ln\left(1 + I_x^F \frac{\Delta x}{x}\right)}{\ln F}, \quad (\text{A-7})
 \end{aligned}$$

所以等式成立。

证毕

参 考 文 献

- [1] K. Brayton and R. Spence, "CAD of Electronic Circuits; (2) Sensitivity and Optimization" Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam Oxford, New York, 1980, chap. 1—7.
- [2] K. H. Lung and R. Spence, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-22**(1975), 776.
- [3] S. Haley, *ibid.*, **CAS-27**(1980), 305.
- [4] L. O. Chua and P. M. Lin, "Computer Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques" Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1975, chap. 6.

CALCULATION OF LARGE-CHANGE SENSITIVITY

Wang Yuhong, Zheng Huanqun

(Department of Electronics Engineering, Tianjin University)

A new method of calculating the large-change sensitivity—hybrid matrix method is proposed. This method is based on the hybrid matrix equation of the linear m-port network with controlled sources. It can be used for the circuits containing VCVS and CCVS. Eight characteristics of large-change sensitivity are given. They will make the method more perfect and flexible to use.