

用于传输线特性分析的分数阶多极子模型¹

朱满座 梁昌洪 路宏敏

(西安电子科技大学电子工程学院 西安 710071)

摘要: 该文提出了用于计算具有圆形外导体复杂形状内导体的一类传输线特征阻抗的分数阶多极子模型。该方法能够很好地处理导体棱角附近电位梯度的奇异性问题。通过具体算例证明了该方法的实用性。

关键词: 传输线特性阻抗, 多极子, 分数阶微积分

中图分类号: TN811 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)04-0664-04

Fractional Multipole Model Used in the Characteristic Analysis of a Transmission Line

Zhu Man-zuo Liang Chang-hong Lu Hong-min

(School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract The model of fractional multipole is presented for calculating the characteristic impedance of coaxial transmission line with circular outer conductor and complex inner conductor. The model has a higher accuracy in analyzing the potential of a point close to a sharp conducting edge. The validity of this model is confirmed by numerical results.

Key words Characteristic impedance of transmission line, Multipole, Fractional Calculus

1 引言

传输线的特征阻抗计算, 通常通过保角变换法等解析方法或者用有限元法、矩量法、模拟电荷法等数值计算法进行^[1-3]。多极子理论 (Multipole theory) 是近年广泛使用的一种数值计算方法, 可以用于传输线特性阻抗的分析计算^[4]。但是对于导体角点附近, 因为电位梯度在此处奇异, 要作特殊处理。本文提出了用于二维静电边值问题计算的分数阶多极子方法。可以较好地解决导体棱角附近的奇异问题。文献 [5] 以分数阶微积分为基础提出了分数阶多极矩的概念, 并分析了分数阶电多极矩的静电位及其特性。本文直接将计算整数阶多极矩的公式推广到分数阶情形, 并用此计算了内导体形状具有尖锐棱角的传输线的特性。结果表明, 分数阶多极子可以很好地描述导体棱角附近的电场分布。

2 分数阶电多极子及其电位

非整数阶的微积分是整数阶微积分概念的推广^[5]。它有几种不同的定义。使用得较为广泛的是黎曼-刘维尔积分, 即通过多重积分来推广^[7]。给定函数的 n 重积分为

$${}_a D_x^{-n} f(x) = \int_a^x dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} dx_{n-2} \cdots \int_a^{x_1} f(x_0) dx_0 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-u)^{n-1} f(u) du \quad (1)$$

式中下标 a 表示积分下限, 上标 $-n$ 表示作 $-n$ 阶微分, 即 n 阶积分。将式中的 $-n$ 用 α 代

¹ 2002-12-29 收到, 2003-04-02 改回
陕西省自然科学基金资助课题 (2001X008)

换, 就得到任意阶 (α 是微分的阶数) 微分的定义:

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-u)^{-\alpha-1} f(u) du \quad (2)$$

文献 [5] 使用分数阶微积分引入了分数阶多极子的概念。我们直接使用电位的多极子展开公式, 将整数阶的多极子推广到分数阶的情形。对于二维的静电场问题, 使用复数形式的格林函数比较方便。将实格林函数和复格林函数分别记为 $G_R(x, y; x', y')$ 和 $G(z; z')$, 二者之间的关系为

$$G_R(x, y; x', y') = \operatorname{Re}G(z; z') \quad (3)$$

无界区域复数形式的格林函数为 [6]

$$G(z; z') = [1/(2\pi\epsilon)] \ln(z - z') + C \quad (4)$$

其中 C 为复常数。以下推导线偶极子的复电位。对于二维偶极子源, 设偶极源为 $q_0 l$, (l 为复数, $q_0 l$ 表示了偶极源大小和取向) 在 z' 处和 $z' + l$ 处分别有线密度为 $-q_0$ 和 q_0 的线电荷, 则其在无界区域产生的复电位为

$$G_1(z; z') = [q_0/(2\pi\epsilon)] \ln[(z - z')/(z - (z' + l))] \quad (5)$$

保持 $q_0 l$ 不变, 计算上式在 $l \rightarrow 0$ 情形下的极限, 得

$$G_1(z; z') = [q_0 l/(2\pi\epsilon)] [1/(z - z')] \quad (6)$$

同样, 对于在 z' 处和 $z' + l_2$ 处分别放置线偶极子 $-q_0 l_1$ 和 $q_0 l_1$, 则可以求出其产生的复电位为

$$G_2(z; z') = [q_0 l_1 l_2/(2\pi\epsilon)] [1/(z - z')^2] \quad (7)$$

这是四极子的复电位。同样对于八极子、十六极子, 其复电位分别为

$$G_3(z; z') = [q_0 l_1 l_2 l_3/(2\pi\epsilon)] [2/(z - z')^3] \quad (8)$$

$$G_4(z; z') = [q_0 l_1 l_2 l_3 l_4/(2\pi\epsilon)] [3!/(z - z')^4] \quad (9)$$

一般地, 对 2^m 极子, 复电位是

$$G_m(z; z') = [q_0 l_1 l_2 \cdots l_m/(2\pi\epsilon)] [(m-1)!/(z - z')^m] = C_m [1/(z - z')^m] \quad (10)$$

如果是有界区域, 区域外部的电荷分布在区域内部电位展开式中还要包含正的指数项, 即

$$G_{-m}(z; z') = C_{-m} (z - z')^m \quad (11)$$

上式是外部多极子产生的电位。如果式 (11) 中的 m 推广到非整数 v 的情形, 可以得到其复电位为

$$G_v(z; z') = C_v \frac{1}{(z - z')^v} \quad (12)$$

可以将这一电位看作一个非整数阶的电多极子产生的电位, 仿照整数阶多极子电位的对应关系, 可以得到产生这种电位的多极子的阶数为 α , 且 $\alpha = \log_2 v$ 。同样, 区域外部的分数阶多极子在其内部的复电位应该为

$$G_{-v}(z; z') = C_{-v} (z - z')^v \quad (13)$$

将上述的电位取实部, (且令 $z' = 0$), 有 $\Phi = r^{\pm\nu}(A \cos \nu\theta + B \sin \nu\theta)$, 这就是理想导体角形区域的电位分布. 如果导体板分别位于 $\theta = 0$ 和 $\theta = \theta_0$, 形成一个角形区域, 则能够定出选取正的指数, $\nu = n\pi/\theta_0$, 且 $A = 0$. 所以, 分数阶的多极子可以用来表示导体角形区域的电场分布. 如对于 $\Phi = Br^{\nu} \sin(\nu\theta)$, 导体板上的电荷密度为 $\rho_s = -B\epsilon_0\nu r^{\nu-1}$. 从 $r = 0$ 到 $r = r_0$ 处, 单位长度带电是 $\rho_s = -B\epsilon_0 r_0^{\nu}$. 同理可以分析负的指数项, 它表示导体棱角附近的线电荷和导体上的感应面电荷共同在远区产生的电位.

3 圆柱形区域内部电位多极展开式

以下求圆柱形区域内部的多极 (包括分数阶的多极子) 展开表达式. 选取圆柱的轴心在原点, 单位圆 (半径为 1) 内部的复格林函数为^[6]

$$G(z; z') = -[1/(2\pi\epsilon)] \ln[(z - z')/(1 - zz'^*)] \quad (14)$$

其中 $z' = x' + jy'$ 是源点, $z'^* = x' - jy'$ 是源点关于实轴的对称点.

位于源点 $z' = x' + jy'$ 处的线偶极子, 经过推导, 在圆柱内的复电位为

$$G_1(z; z') = [C_1/(z - z')] - [C_1^*/(1/z - z'^*)] \quad (15)$$

圆域内的多极子, 复电位为

$$G_m(z; z') = [C_m/(z - z')^m] - [C_m^*/(1/z - z'^*)^m] \quad (16)$$

公式中的第一项是圆内的多极子产生的复电位, 第二项是圆外的多极子产生的复电位. 在分析导体角周围的电位、电场时, m 是分数 (正或负). 例如对于图示的矩形导体外部的电场, 由于 $\theta_0 = 3\pi/2$, $m = 2n/3$ 或者 $m = -2n/3$. 考虑到在导体角附近尽管电位的梯度为无穷大, 但是导体上的总电荷应该是有限的. 因而式 (16) 中的 m 仅仅取负的值.

4 计算实例及结果

将以上的电位分布用于圆形外导体复杂形状内导体的传输线的特性阻抗及其电场分布的分析 (图 1). 计算时在内导体的内部, 作普通的多极展开, 在棱角处作分数阶多极展开. 如对于内导体为厚度为零的导体带, 即圆形带状线 ($b = 0, g = 0$), 特征阻抗的计算结果如表 1 所示. 将导体带的左右两个端点作为分数阶多极子展开的极点, 由于 $\theta_0 = 2\pi$, 因而 $\nu = n/2$. 在其余点, 展开到偶极子项. 求解电位时, 选取多点匹配, 用最小二乘法求解. 其中的对照解, 用文献 [3] 中的模拟电荷法结合镜像法求出. 表 2 给出了圆形外导体正方形内导体的传输阻抗, 其中在圆心处选取一个极点, 考虑到对称性, 再结合镜像原理, 作普通的多极展开. 此时, 式 (16) 中的 m 是 4 的倍数. 另外在每一个角点, 作分数阶的多极展开. 从表 2 中数据可以看出, 本文方法的结果与其它方法得到的结果吻合很好.

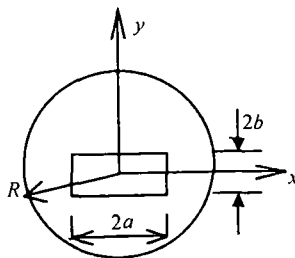


图 1 传输线截面

表1 圆形带状线的特征阻抗 ($Z/\sqrt{\epsilon_r}$, (Ω))

a/R	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
本文	221.33	179.66	138.06	113.69	96.29	82.61	71.13	60.89	51.13	40.58	33.82
文献 [3]	221.34	179.75	138.15	113.77	96.38	82.70	71.22	60.99	51.23	40.71	34.01

表2 圆形外导体正方形内导体传输线的特征阻抗

r/R	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.65	0.7
本文	169.67	128.12	86.58	62.26	45.00	31.54	20.22	14.80	8.02
1	169.67	128.11	86.55	62.24	44.98	31.52	20.20		8.85
2	169.67	128.11	86.55	62.22	44.97	31.49	20.03		6.28
3	169.67	128.10	86.50	62.10	44.69	31.02	19.54	14.20	8.71

1: 保角变换-算术平均法^[1], 2: 保角变换-几何平均法^[1], 3: 图形等效变换法^[2]

5 结论

本文计算方法, 一是将分数阶多极子用于传输线的分析, 这可以很好地模拟导体角附近的电场分布, 从而可以直接将展开点选取在导体的角点上, 能够模拟导体角点附近的电场; 二是将多极子方法与镜像法相结合, 使用圆柱形区域内的多极子展开。同样, 采用镜像原理可以导出平板传输线、槽形传输线等的多极展开。该方法只须在内导体上匹配, 计算量大大减少, 精度高、收敛快。

参 考 文 献

- [1] Lin W. A critical study of the coaxial transmission line utilizing conductors of both circular and square cross section. *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, 1982, MTT-30(11): 1981-1988.
- [2] 潘生根. 圆形外导体复杂形状内导体同轴传输线特性阻抗的计算. *电子科学学报*, 1988, 10(2): 180-185.
- [3] 马西奎. 偏心特种截面传输线特性阻抗的分析计算. *电子科学学报*, 1989, 11(6): 590-599.
- [4] Qinhong Zheng, Weigan Lin, Fuyao Xie, Ming Li. Multipole theory analysis of a rectangular transmission line family. *Microwave and Opt. Technol. Lett.*, 1998, 18(6): 382-384.
- [5] Engheta N. On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism. *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, 1996, AP-44(4): 554-566.
- [6] Tsarin Y A. Conformal mapping technique in the theory of periodic structures. *Microwave and Opt. Technol. Lett.*, 2000, 26(1): 57-61.
- [7] Oldham K B, Spaniner J. *The Fractional Calculus*. New York and London: Academic Press, 1974, Ch.2.

朱满座: 男, 1960年生, 副教授, 研究方向为电磁兼容、生物电子学。

梁昌洪: 男, 1933年生, 教授, 博士生导师, 中国电子学会会员, IEEE 高级会员, 研究方向为计算微波、微波通信、非线性电磁学、电磁兼容、电磁变分等。

路宏敏: 男, 1961年生, 副教授, 研究方向为电磁兼容、生物医学工程。