

# 在迴旋管中采用中等偏心率椭圆 横截面谐振腔的探讨\*

蒋曼英 祝西里

(北京大学无线电电子学系)

陆孝厚 丁耀根

(中国科学院电子学研究所)

## 提 要

本文综述了几种在迴旋管中采用大横截面谐振腔的办法, 计算了中等偏心率椭圆波导各 TE 模的归一化截止频率。归一化截止频率的数据表明, 用椭圆横截面谐振腔的迴旋管具备以下特性: (1) 谐振腔体积大; (2) 可以振荡的工作模式少; (3) 可以使用大直径电子束; (4) 可以工作于低次角向腔模。

## 一、引 言

近十年来用迴旋管产生大功率毫米波的研究工作取得了突出成就; 在相同工作波长下, 这种新原理器件产生的功率电平可高于传统的“O”型器件两个数量级; 但近代物理的发展要求器件在更短波长连续波或准连续波状态下, 给出更高的功率电平。

虽然 TE<sub>0n</sub> 模工作的腔体的体积很小的迴旋管也可以在短波长给出兆瓦级输出功率, 但这样的兆瓦级功率是短脉冲的, 它的平均功率是极小的。妨碍功率输出的因素除了输出窗外, 还有腔壁电阻损耗及谐振腔的体积。

如果用增大圆横截面腔的直径的办法来增大腔的体积必然要遇到模式太密而引起的杂模干扰主模的问题。避开高频模式干扰的办法之一是, 使开放腔靠近电子枪一端的人口直径所对应的截止波长略短于工作模式的波长。

利用 TE<sub>m11</sub> 模(即所谓 Whispering gallery 模)固然可使腔及电子束的直径都足够大, 又能避开其它模式的干扰, 但电阻损耗太大。

TE<sub>0n1</sub> 模的电阻损耗低于所有其他模式, 但当  $n$  数大时, TE<sub>0n1</sub> 与 TE<sub>2n1</sub> 模的谐振频率几乎重合, 腔内驻波径向位置也大部重合; 尤其当电子束直径略大时, TE<sub>0n1</sub> 模的起振电流并不是所有模式的最低者。

\* 1984年5月5日收到, 1985年5月13日修改定稿。

也有人提出过用准光学腔的办法,但没见到过这方面的实验报道。

苏联科学院应用物理研究所采用双反射镜方法,在波长为 3mm,场型为  $TE_{1,10,1}$  模的条件下,得到 350kw 的功率,25% 的效率<sup>[1]</sup>。我们提出的用椭圆横截面腔的办法类似于双反射镜的办法。

计算表明,采用以下措施后,就既能使用大腔体,大直径电子束,又能在低次角向腔模( $m$  数低)工作。

措施之一是采用椭圆横截面谐振腔;因为在圆横截面谐振腔中,当  $n$  数较大时, $TE_{0n1}$  及  $TE_{2n1}$  模的谐振频率与  $TE_{1n1}$  及  $TE_{3,n-1,1}$  模的谐振频率是重合的;但如果圆横截面变形成为椭圆横截面时,就能将重合的频率分开。

措施之二是给椭圆谐振腔开两条对称的细槽,并且把槽开在低次角向腔模场强最弱的地方,使得槽对低  $m$  模扰动极小,但显著降低高  $m$  模的  $Q$  值。

要把椭圆横截面谐振腔用于迴旋管,不能直接使用前人发表的数据,需自己计算。以前的研究工作有两个方面:

(1) 把轻微变形的圆波导看成是小偏心率的椭圆波导<sup>[2]</sup>,用 Mathieu 函数分析了  $q$  参数( $q = \frac{\pi^2 h^2}{\lambda_c^2}$ ,  $h$  为半焦距,  $\lambda_c$  为截止波长,见图 1)小的椭圆系统,从而定出了圆波导的公差。

结果表明,轻微变形的影响是明显的,例如,  $TE_{02}$  模谐振腔变形,其长轴与短轴之比如为 1:0.98,则在同半径而不同幅角处场强最大值与最小值之比为 0.8:1.2。对于高次  $TE_{0n}$  模式,则影响更大。

(2) 分析了椭圆横截面传输线<sup>[3]</sup>。由于椭圆波导没有极化面旋转问题,因而被用作传输线。为了得到较宽的频带,通常用低次模式及大偏心率的椭圆截面波导。分析这个问题要用  $q$  参数大的 Mathieu 函数。

总之,前人分析椭圆传输线问题都是在横截面小,径向指标小( $n$  小),模式密度小, $q$  参数不是很大就是很小的条件下进行的。在这些条件下,都可以用简单的级数来表达 Mathieu 函数。

对于用于迴旋管的谐振腔,要求输出功率尽可能高,同时还得避免其它可振荡模式的干扰。这样,就要求采用  $n$  大,并且具有中等偏心率的椭圆横截面谐振腔。迄今还没见到发表过中等偏心率系统的数据。

## 二、椭圆波导的截止波长

图 1 中椭圆坐标  $(\xi, \eta, z)$  与直角坐标  $(x, y, z)$  的关系为

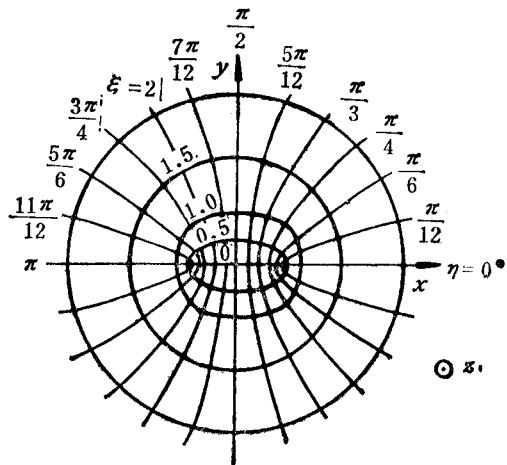


图 1 椭圆坐标与直角坐标的关系

$$\left. \begin{aligned} x &= hch \xi \cos \eta, \\ y &= hsh \xi \sin \eta, \\ z &= z, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $h$  为半焦距,  $\xi$  等于常数的平面称为共焦点椭圆柱面,  $\eta$  等于常数的平面称为共焦点双曲柱面。

TE 波的 Helmholtz 方程的解为

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2q(ch 2\xi - \cos 2\eta) \right] H_z = 0. \quad (2)$$

$H_z$  为磁场强度  $z$  方向分量。令  $H_z(\xi, \eta) = \phi(\xi)\Phi(\eta)$ , 作分离变数求解

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - (a - 2q ch 2\xi)\phi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + (a - 2q \cos 2\eta)\Phi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

当  $a, q$  为实数时, 周期解要求  $a, q$  必须满足一定的关系式。当  $q$  一定时, 满足关系式的  $a$  为某些特定数值, 这些特定数值叫特征值。  $H_z$  的解为

$$H_z = \sum_{m=0}^{\infty} C_m c e_m(q, \eta) C e_m(q, \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} S_m s e_m(q, \eta) S e_m(q, \xi), \quad (4)$$

式中忽略了时间变化; 下标  $m$  是整数;  $C_m$  及  $S_m$  是常数;  $c e_m, s e_m$  为角向 Mathieu 函数;  $C e_m$  及  $S e_m$  为径向 Mathieu 函数, Mathieu 函数是三角函数及 Bessel 函数的无穷级数<sup>[4]</sup>。当焦距很短时(即接近圆波导时)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0} \eta &\rightarrow \theta, \\ \lim_{q \rightarrow 0} \xi &\rightarrow \frac{2\pi r}{\lambda}, \\ \lim_{q \rightarrow 0} c e_m(q, \eta) &\rightarrow \cos(m\theta), \\ \lim_{q \rightarrow 0} s e_m(q, \eta) &\rightarrow \sin(m\theta), \\ \lim_{q \rightarrow 0} S e_m(q, \xi) &\rightarrow \lim_{q \rightarrow 0} C e_m(q, \xi) \rightarrow J_m\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中  $r$  及  $\theta$  分别为圆坐标中的半径及角度。

给出了  $q$  值后, 就可以利用一定的关系式求特征数  $a_m$ 。下面以  $a_0$  为例来说明求特征数的方法。  $a_0$  的表达式可写成以下的连分式

$$a_0 = - \frac{q^2/2}{1 - \frac{a_0}{4} - \frac{q^2/(16 \cdot 1 \cdot 4)}{1 - \frac{a_0}{4(1+1)^2} - \dots \frac{q^2/(16 \cdot n^2(n+1)^2)}{1 - \frac{a_0}{4(n+1)^2} - \dots}}. \quad (6)$$

直接递推连分式解出方程(6)有困难, 计算过程中会造成误差, 甚至会出现分母为零的情况而溢出。为了避开这个困难, 可将连分式写成矩阵形式

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{q^2}{2} & 0 \\ 1 - \frac{a_0}{4} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 - \frac{a_0}{4r^2} \\ 0 & -\frac{q^2}{16r^2(r-1)^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{q^2}{16r^2(r+1)^2} & 0 \\ 1 - \frac{a_0}{4(r+1)^2} & 1 \end{vmatrix},$$

$$r = 2, 4, 6, \dots, \quad (7)$$

式中  $A, B, C, D$  为矩阵系数。从方程(6),(7)得到

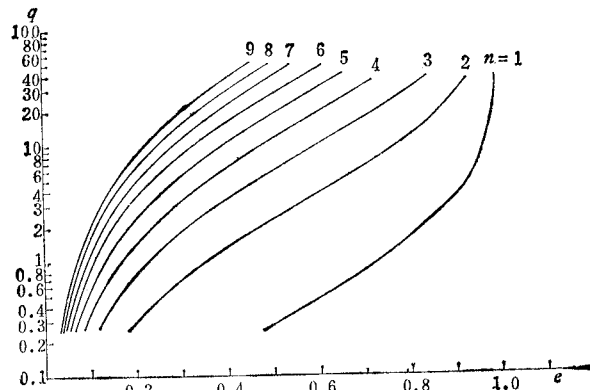
$$a_0 = A/C. \quad (8)$$

计算时可写成

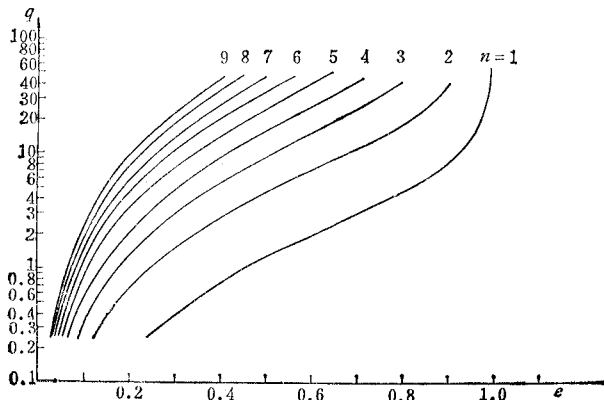
$$\varepsilon = A - a_0 C. \quad (9)$$

$|\varepsilon|$  足够小时就得到  $a_0$  的解; 这样求解  $a_0$  不会出现分母为零而溢出的问题。用同样的方法可以求出其它特征数。

知道了  $a_m$  后就可求 Mathieu 函数级数表达式中相应的系数。系数之间是有递推关系的<sup>[4]</sup>。从零项向 $\infty$ 项或从 $\infty$ 项向零项递推都要造成很大的误差。特征数为  $a_m$  的 Mathieu 函数最大的系数为第  $m$  项; 递推时应从零项及 $\infty$ 项向第  $m$  项递推。



(a) 椭圆波导中  $sTE_{1n}$  模的  $q-e$  图



(b) 椭圆波导中  $sTE_{3n}$  模的  $q-e$  图

图2 椭圆波导中的  $q-e$  图

( $q = \pi^2 h^2 / \lambda_0^2$ ;  $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ ,  $a$  为长轴,  $b$  为短轴)

TE 模椭圆横截面腔的金属壁必须满足条件  $E_\eta = 0$ , 也就是  $\partial H_z / \partial \xi = 0$ . 椭圆横截面腔的模式有两种, 即  ${}_{s'}\text{TE}_{mn}$  及  ${}_c\text{TE}_{mn}$ . 这两种模式分别满足条件  $S e'_m(q, \xi_{mn}) = 0$  及  $C e'_m(q, \xi_{mn}) = 0$ . 这时对应的偏心率为

$$e = \frac{1}{\text{ch} \xi} = \frac{2\sqrt{a}}{\frac{2\pi a_x}{\lambda_c}} = \frac{2\sqrt{a}}{\chi}, \quad (10)$$

式中  $a_x$  为椭圆半长轴,  $\lambda_c$  为截止波长,  $\chi$  为归一化截止频率.

在一定的  $q$  值下计算出  ${}_c\xi_{mn}$  及  ${}_s\xi_{mn}$  并利用式(10)求出相应的偏心率  $e$ , 从而得到不同模式的  $q$  与偏心率  $e$  的关系. 本文对  ${}_c\text{TE}_{mn}$  及  ${}_s\text{TE}_{mn}$  ( $m$  从 0 到 10,  $n$  从 1 到 8) 模进行了大量的计算. 图 2 举例表示  ${}_s\text{TE}_{1n}$  及  ${}_s\text{TE}_{3n}$  模的  $q$ - $e$  图.

### 三、数据分析

图 2 给出了以几个不同模式的归一化截止频率为参量的  $q$ - $e$  图. 从图上看  $q$  为恒值时, 径向波数愈小, 则所对应的  $e$  值就愈大, 也就是腔形愈呈椭圆. 不同偏心率的椭圆波导有不同模式的归一化截止频率.

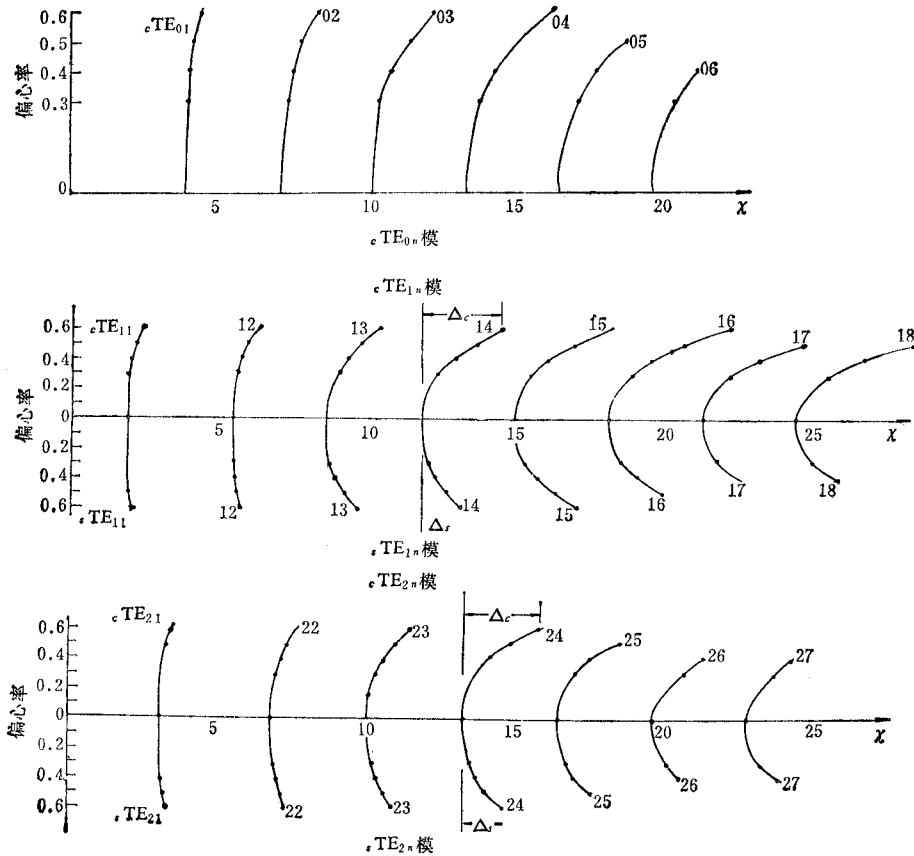


图 3 偏心率对归一化截止频率的影响

为了说明问题引进几个辅助参数。令圆波导的半径与椭圆波导的半长轴相等。圆波导中  $TE_{mn}$  模的归一化截止频率为  ${}_o\chi_{mn} = 2\pi a_x / {}_o\lambda_{mn}$ ，椭圆波导中  ${}_cTE_{mn}$  及  ${}_sTE_{mn}$  模的归一化截止频率为  ${}_c\chi_{mn} = 2\pi a_x / {}_c\lambda_{mn}$  及  ${}_s\chi_{mn} = 2\pi a_x / {}_s\lambda_{mn}$ 。椭圆波导偏离圆波导的归一化截止频率为  $\Delta_c = {}_c\chi_{mn} - {}_o\chi_{mn}$  及  $\Delta_s = {}_s\chi_{mn} - {}_o\chi_{mn}$ 。图 3 绘出了 5 种模式的  $\Delta_c$  及  $\Delta_s$  与偏心率  $e$  的关系。由图可见，偏心率增大时， $\Delta_c > \Delta_s$ 。对于低  $m$  数模  $\Delta_c$  及  $\Delta_s$  很大，而对于高  $m$  数模， $\Delta_c$  及  $\Delta_s$  很小，并且  $\Delta_c \approx \Delta_s$ 。这个性质可用来分开在圆波导中截

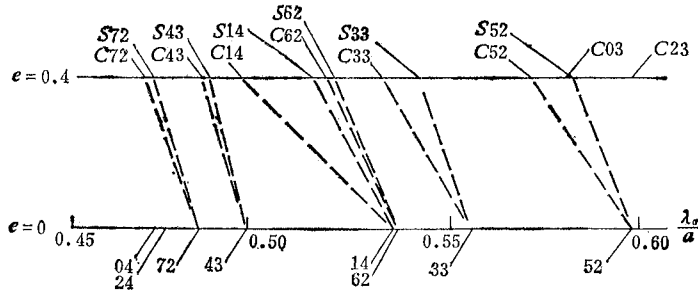
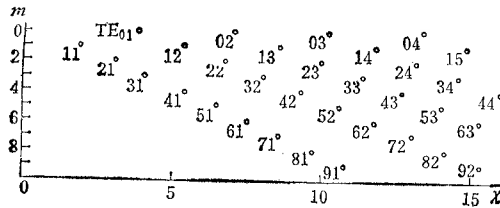
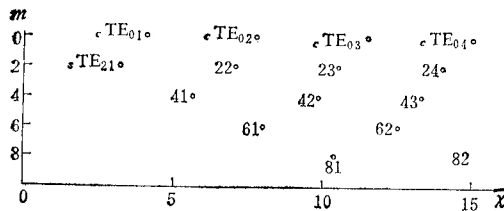


图 4  $e = 0$  与  $e = 0.4$  时截止波长分布的比较

(为了图中清晰起见,以  $smn$  代表  ${}_sTE_{mn}$ , 以  $cmn$  代表  ${}_cTE_{mn}$ )

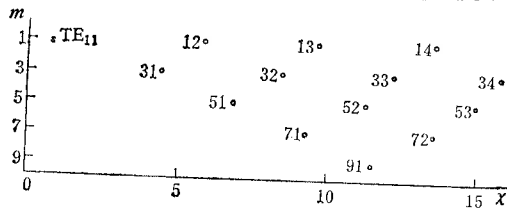


(a) 圆波导中 TE 模式的归一化截止频率



(b)  $e = 0.5$  并工作于  ${}_cTE_{0n}$  模时有影响的归一化截止频率

(有些模式由于开了对称纵向槽而被抑制;未注明的模式是  ${}_sTE_{mn}$  模)



(c)  $e = 0.5$  并工作于  ${}_sTE_{1n}$  模时有影响的归一化截止频率

(有些模式由于开了对称纵向槽而被抑制)

图 5 不同偏心率下 TE 模式的归一化截止频率

止频率重叠的模式。在圆波导中  $TE_{04}$  和  $TE_{24}$  模的截止频率之比为 1:0.99,而在偏心率为 0.4 的椭圆波导中,截止频率之比为 1:0.95。在圆波导中  $TE_{14}$  及  $TE_{33}$  模的截止频率之比为 1:0.965,而在偏心率为 0.4 的椭圆波导中,截止频率之比为 1:0.94。

图 4 及图 5 表示不同偏心率椭圆波导中归一化截止波长及频率的分布。由图可见,采用一定偏心率的椭圆横截面波导的模式谱比圆波导 ( $e = 0$ ) 的明显稀疏,从而保证迴旋管能避开模式干扰。

图 6 绘出了不同  $q$  值下椭圆截面波导中各模式场的角向分布。由图可见,当  $q$  参数小时角向 Mathieu 函数在  $\eta = 0$  及  $\eta = \pi$  附近都很大;而当  $q$  参数大时,低  $m$  模的角向函数很小,而高  $m$  模的角向函数很大。利用这个性质,可以在  $\eta = 0$  及  $\eta = \pi$  附近放衰减物质或开纵向细槽,给高  $m$  模加载,而对低  $m$  模影响极微。这样就可使低  $m$  模不受干扰地工作。

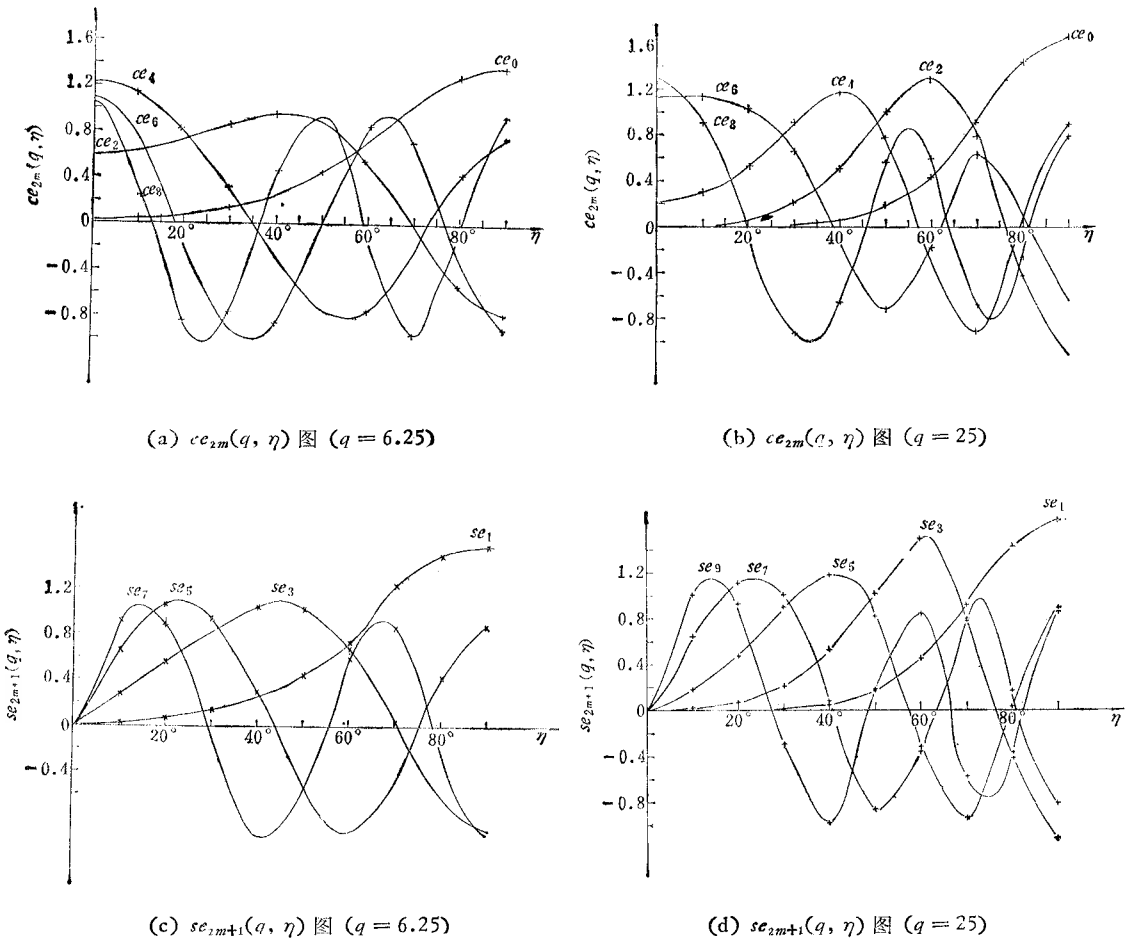


图 6 角向 Mathieu 函数分布

椭圆腔工作于  $TE_{1n}$  模时,  $Q$  值最高,能够稳定地工作。值得注意的是,  $TE_{0n}$  模也能被利用。  $q$  大时,它在  $\eta = 0$  及  $\eta = \pi$  处的场强也很弱,并且由椭圆逐渐向圆过渡后,可得到同心圆的场型。

## 四、结 束 语

本文对椭圆横截面波导中各种模式在不同偏心率下的归一化截止频率及场的角向分布进行了大量的计算。计算结果表明,在迴旋管中,采用中等偏心率及纵向开细槽的椭圆横截面波导开放腔,在低次角向模式 ( $cTE_{0n}$  及  $sTE_{1n}$  模)工作,可望得到稀疏的模式谱;从而克服了采用圆波导开放腔的迴旋管中  $TE_{0n}$  与  $TE_{2n}$  及  $TE_{1n}$  与  $TE_{3,n-1}$  模的模式干扰问题,使迴旋管得以稳定工作。同时当径向模数  $n$  较大时,可用较大的谐振腔尺寸,从而提高迴旋管的输出功率。

本文计算结果不仅可用于迴旋管椭圆横截面波导开放腔的设计,而且对解决有关椭圆波导问题也有一定的参考价值。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] A. V. Gaponov, *Int. J. Electronics*, 51 (1981)4, 277.
- [ 2 ] L. J. Chu, *J. Appl. Phys.*, 9(1938), 583.
- [ 3 ] J. G. Kretzschmar, *IEEE Trans. on MTT*, MTT-18 (1970), 547.
- [ 4 ] N. W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford, 1947.

## THE RESEARCH OF RESONANT CAVITY WITH ELLIPTICAL CROSS-SECTION AT MODERATE ECCENTRICITY IN GYROTRON

Jiang Manying, Zhu Xili

(Radio and Electronics Department, Beijing University)

Lu Xiaohou, Ding Yaogen

(Institute of Electronics, Academia Sinica)

In this paper, several types of resonant cavities with large transverse cross-section used in gyrotron are briefly reviewed. The method of calculating the cutoff frequencies of TE mode of elliptical waveguides with moderate eccentricities is given. From the calculated data of cutoff frequencies, it is shown that the gyrotron with elliptical cavity has the following characteristics: (1) a large volume cavity can be used; (2) the density of modes which can oscillate is rare; (3) it is allowable to use an electron beam with a large diameter; (4) it is possible to use a cavity mode with low azimuthal number