第3卷 第2期 电子学通讯 Vol. 3, No. 2
1981年4月 JOURNAL OF ELECTRONICS April, 1981

具有高斯过程输入的一类非线性系统的输出相关函数*

杨光正
(西南电子技术研究所)

提　　要

本文研究了在数学期望为零的高斯过程输入情况下，$h(lx)$ 具有 $h^{(k+p)}(lx)=l^{p}h^{(k)}(lx)$ (其中：$h^{(k)}(lx)=\frac{\partial^{(k)}h(lx)}{\partial x^{k}}$，$l$ 为某个实数)性质的输出相关函数.

文中利用上述性质，由 Price 定理导出一常微分方程. 将求非线性系统输出相关函数的问题,变成解常微分方程的问题.

所得结果表明：这类非线性系统的输出相关函数具有相同的形式. 不同的 $h(lx)$ 仅影响其系数.

在此基础上，文中将一般非线性系统的特性 $f(x)$ 用具有上述性质的函数族来表示，然后直接引用文中前面所得的结果，非常简便地得出了一般非线性系统的输出相关函数的计算公式.

一、前　言

计算非线性系统输出相关函数，在理论上并不困难. 因为按定义，输出相关函数 $\phi(\tau)$ 是，

$$\phi(\tau)=M_{1}\{f(x_{1})f(x_{2})\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_{1})f(x_{2})P(x_{1},x_{2},t_{1},t_{2})dx_{1}dx_{2} \tag{1}$$

虽然在理论上写出 (1) 式很简单. 但是要直接用 (1) 式进行计算，则并不简单. 首先必须设法将双重积分中的积分变量分离,分成二个积分.

常用的处理方法是:

(1) 直接法　这种方法是将二维概率密度展成由厄尔密特函数组成的多项式，然后再逐项积分.

(2) 特征函数法[1]　这种方法是首先将 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 进行拉普拉斯变换 (或傅里叶变换). 代入定义式,然后将出现的特征函数展成正交函数的多项式. 最后再进行逐项积分.

但这两种方法不仅计算冗长繁复,而且往往会碰到计算上的困难.

1958 年 Price[2] 证明了一个定理. 该定理揭示出：在平稳高斯过程输入的情况下，

* 1979年11月1日收到.

零记忆非线性系统的输出相关函数对输入相关函数的偏导数与非线性系统特性曲线的变化率之间的关系.

用 Price 定理处理限幅器，检波器之类可用逐段多项式表示的系统，确实比较简单.但是要用它来计算具有不能用逐段多项式表示的函数(如超越函数)的非线性系统时，往往会碰到数学上的困难. 而实践中有一大类系统属于这种情况.

特别是对于非线性系统是周期性的情况，用以上几种方法，并不是都行得通的.

本文给出了一般非线性系统(包括具有周期性特性的)，在高斯输入情况下，其输出相关函数便于计算另一种解的形式.

二、题　设

设：$x_1 = x(t)$ 和 $x_2 = x(t+\tau)$ 是取自一个数学期望为零的平稳高斯过程. 它们具有联合概率密度 $p(x_1, x_2)$

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2)\right], \tag{2}$$

这里：$M_1\{x_1, x_2\} = \rho$，$M_1\{x(t)\} = 0$，$M_1\{x^2(t)\} = 1$.

又设：x_1 和 x_2 通过零记忆非线性系统. 且以 $h_1(mx_1)$ 和 $h_2(nx_2)$ 分别表示它们的输出. 将输出相关函数记为 $R(\tau)$. 按定义

$$R(\tau) = M_1\{h_1(mx_1)h_2(nx_2)\}. \tag{3}$$

定义：凡其导数满足

$$h_i^{(k+p)}(lx_i) = l^p h_i^{(k)}(lx_i) \tag{4}$$

的函数 $h_i(lx_i)$ 称为具有循环导数的函数. 或简称为循环导函数. 式中：$l = m$ 或 n，为某个实数；k 为某个自然数；$h_i^{(k)}(lx_i) = \partial^{(k)} h_i(lx_i)/\partial x_i^k$，$i = 1$ 或 2.

使 (4) 式满足的最小正整数 p 称为 $h_i(lx_i)$ 的导数的循环周期. 本文只研究循环周期 $p = 4$ 的循环导函数.

三、特性是循环导函数的非线性系统的输出相关函数

文献 [3] 指出：二维 Price 定理可写成

$$\frac{\partial^{(Q)} R(\tau)}{\partial \rho(\tau)^{(Q)}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_1^{(Q)}(mx_1)h_2^{(Q)}(nx_2)\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2)\right]}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} dx_1 dx_2$$

$$= M_1\{h_1^{(Q)}(mx_1)h_2^{(Q)}(nx_2)\} \tag{5}$$

式中：$\rho = \rho(\tau)$ 是输入随机过程的自相关函数；Q 为某个自然数.

令 $Q = k + 4$，并且利用 (4) 式，得到，

$$\frac{\partial^{(k+4)} R(\tau)}{\partial \rho(\tau)^{(k+4)}} = M_1\{h_1^{(k+4)}(mx_1)h_2^{(k+4)}(nx_2)\}$$

$$= m^4n^4M_1\{h_1^{(k)}(mx_1)h_2^{(k)}(nx_2)\} = m^4n^4\frac{\partial^{(k)}R(\tau)}{\partial\rho(\tau)^{(k)}}; \tag{6}$$

由此得到微分方程，

$$R^{(k+4)}(\tau) = m^4n^4R^{(k)}(\tau). \tag{7}$$

再取 $k=0$，得到，

$$\frac{\partial^4R(\tau)}{\partial\rho(\tau)^4} = m^4n^4R(\tau). \tag{8}$$

这是一个常系数线性微分方程．它的特征方程是，

$$r^4 - m^4n^4 = 0. \tag{9}$$

此特征方程有四个根，分别是 $r = mn,\ -mn,\ jmn,\ -jmn$；其中：$j=\sqrt{-1}$.

于是得 (8) 式的通解是

$$R(\tau) = c_1e^{mn\rho(\tau)} + c_2e^{-mn\rho(\tau)} + c_3e^{jmn\rho(\tau)} + c_4e^{-jmn\rho(\tau)}, \tag{10}$$

式中：c_1, c_2, c_3, c_4 是待定积分常数.

为书写方便，引入下列记号，

$$\left.\begin{aligned} &R(\tau)\big|_{\rho=0} = R_{00}, \quad \frac{\partial R(\tau)}{\partial\rho(\tau)}\bigg|_{\rho=0} = R_{10},\\ &\frac{\partial^2R(\tau)}{\partial\rho(\tau)^2}\bigg|_{\rho=0} = R_{20}, \quad \frac{\partial^3R(\tau)}{\partial\rho(\tau)^3}\bigg|_{\rho=0} = R_{30}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

当 $\rho(\tau)=0$ 时，由 (10) 式可得到，

$$\left.\begin{aligned} R_{00} &= c_1 + c_2 + c_3 + c_4\\ R_{10} &= mn[c_1 - c_2 + jc_3 - jc_4]\\ R_{20} &= m^2n^2[c_1 + c_2 - c_3 - c_4]\\ R_{30} &= m^3n^3[c_1 - c_2 - jc_3 + jc_4] \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

式中的 R_{i0} 是令 (5) 式中的 $\rho=0$ 计算的，亦即，

$$\begin{aligned} R_{i0} = R^{(i)}(\tau)\big|_{\rho=0} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1^{(i)}(mx_1)h_2^{(i)}(nx_2)\exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right\}dx_1dx_2\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h_1^{(i)}(mx_1)\exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right)dx_1\int_{-\infty}^{\infty} h_2^{(i)}(nx_2)\exp\left(-\frac{x_2^2}{2}\right)dx_2 = \text{const.} \end{aligned} \tag{13}$$

由 (12) 式解出，

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{R_{00}}{4} + \frac{R_{10}}{4mn} + \frac{R_{20}}{4m^2n^2} + \frac{R_{30}}{4m^3n^3}\\ c_2 &= \frac{R_{00}}{4} - \frac{R_{10}}{4mn} + \frac{R_{20}}{4m^2n^2} - \frac{R_{30}}{4m^3n^3}\\ c_3 &= \frac{R_{00}}{4} - j\frac{R_{10}}{4mn} - \frac{R_{20}}{4m^2n^2} + j\frac{R_{30}}{4m^3n^3}\\ c_4 &= \frac{R_{00}}{4} + j\frac{R_{10}}{4mn} - \frac{R_{20}}{4m^2n^2} - j\frac{R_{30}}{4m^3n^3} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

将 (14) 式代入 (10) 式，经整理后，得出，

$$R(\tau)=\left(\frac{R_{00}}{2}+\frac{R_{20}}{2m^2n^2}\right)\cos h(mn\rho)+\left(\frac{R_{10}}{2mn}+\frac{R_{30}}{2m^3n^3}\right)\sin h(mn\rho)$$
$$+\left(\frac{R_{00}}{2}-\frac{R_{20}}{2m^2n^2}\right)\cos(mn\rho)+\left(\frac{R_{10}}{2mn}-\frac{R_{30}}{2m^3n^3}\right)\sin(mn\rho). \tag{15}$$

在某些场合需要计算 $\frac{\partial R}{\partial \tau}$，通常给出的是 $\frac{\partial \rho}{\partial \tau}$. 这时可利用关系式，

$$\frac{\partial R}{\partial \tau}=\frac{\partial R}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial \tau}. \tag{16}$$

因此，只要求出 $\frac{\partial R}{\partial \rho}$ 即可利用 (16) 式算出 $\frac{\partial R}{\partial \tau}$. 为此，我们将 (15) 式对 ρ 求导，得:

$$\frac{\partial R(\tau)}{\partial \rho(\tau)}=\left(\frac{mnR_{00}}{2}+\frac{R_{20}}{2mn}\right)\sin h(mn\rho)+\left(\frac{R_{10}}{2}+\frac{R_{30}}{2m^2n^2}\right)\cos h(mn\rho)$$
$$-\left(\frac{mnR_{00}}{2}-\frac{R_{20}}{2mn}\right)\sin(mn\rho)+\left(\frac{R_{10}}{2}-\frac{R_{30}}{2m^2n^2}\right)\cos(mn\rho). \tag{17}$$

下面举三个应用例题.

四、应用举例

[例一] 试求数学期望为零的高斯过程 x 通过特性为 $h_1(mx_1)=\sin(mx_1)$ 和 $h_2(nx_2)=\sin(nx_2)$ 的非线性系统后，它们的相关函数.

解: 不难验证，h_1 和 h_2 是循环导函数. 故其解为 (15) 式. 因此，只需算出 R_{i0} 即可. 为此将 h_i 对 x_i 求导，

$$\left.\begin{aligned}
&h_1'(mx_1)=m\cos(mx_1), && h_2'(nx_2)=n\cos(nx_2),\\
&h_1''(mx_1)=-m^2\sin(mx_1), && h_2''(nx_2)=-n^2\sin(nx_2),\\
&h_1'''(mx_1)=-m^3\cos(mx_1), && h_2'''(nx_2)=-n^3\cos(nx_2).
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

代入 (13) 式，可得 $R_{30}=m^2n^2R_{10}$. 另一方面考虑奇函数在区间 $(-\infty,\infty)$ 积分为零，可知 $R_{20}=R_{00}=0$. 因此只要算出 R_{10} 就行了.

$$R_{10}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}m\cos(mx_1)\exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right)dx_1\int_{-\infty}^{\infty}n\cos(nx_2)\exp\left(-\frac{x_2^2}{2}\right)dx_2$$
$$=\frac{2mn}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(mx_1)\exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right)dx_1\int_0^{\infty}\cos(nx_2)\exp\left(-\frac{x_2^2}{2}\right)dx_2. \tag{19}$$

此积分可由积分表[4]查到. 整理后的结果是，

$$R_{10}=mn\exp\left[-\left(\frac{m^2+n^2}{2}\right)\right]. \tag{20}$$

而

$$R_{30}=m^2n^2R_{10}=m^3n^3\exp\left[-\left(\frac{m^2+n^2}{2}\right)\right]. \tag{21}$$

将 (20)，(21) 式代入 (15) 式，再利用 (3) 式得，

$$M_1\{\sin(mx_1)\sin(nx_2)\}=e^{-\frac{m^2+n^2}{2}}\sin h[mn\rho] \tag{22}$$

若令 (22) 式的 $m = n = 1$ 便得到 Tausworthe 的结果[5].

[例二]　试求数学期望为零的高斯过程 x 通过特性为 $h_1(mx_1) = \cos(mx_1)$ 和 $h_2(nx_2) = \cos(nx_2)$ 的非线性系统后，它们的相关函数.

解：不难验证，h_1 和 h_2 是循环导函数，其解为 (15) 式. 因此，只要算出 R_{i0} 即可. 为此将 h_i 对 x_i 求导，

$$\left.\begin{aligned} &h_1'(mx_1) = -m\sin(mx_1), \quad &&h_2'(nx_2) = -n\sin(nx_2), \\ &h_1''(mx_1) = -m^2\cos(mx_1), \quad &&h_2''(nx_2) = -n^2\cos(nx_2), \\ &h_1'''(mx_1) = m^3\sin(mx_1), \quad &&h_2'''(nx_2) = n^3\sin(nx_2). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

将它们代入 (13) 式，考虑奇函数在区间 $(-\infty, \infty)$ 积分为零，可得 $R_{10} = R_{30} = 0$. 而

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(mx_1)\exp\left[-\left(\frac{x_1^2}{2}\right)\right]dx_1\int_{-\infty}^{\infty}\cos(nx_2)\exp\left[-\left(\frac{x_2^2}{2}\right)\right]dx_2 \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(mx_1)\exp\left[-\left(\frac{x_1^2}{2}\right)\right]dx_1\int_0^{\infty}\cos(nx_2)\exp\left[-\left(\frac{x_2^2}{2}\right)\right]dx_2 \\ &= \exp\left[-\left(\frac{m^2+n^2}{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{24}$$

$$R_{20} = m^2n^2R_{00} = m^2n^2\exp\left[-\left(\frac{m^2+n^2}{2}\right)\right]. \tag{25}$$

将 (24)，(25) 式代入 (15) 式，再利用 (3) 式得，

$$M_1\{\cos(mx_1)\cos(nx_2)\} = e^{-\left(\frac{m^2+n^2}{2}\right)}\cos h[mn\rho(\tau)] \tag{26}$$

[例三]　试求数学期望为零的高斯过程 x 通过特性为 $h_1(mx_1) = \sin(mx_1)$ 和 $h_2(nx_2) = \cos(nx_2)$ 的非线性系统后，它们的相关函数.

解：不难验证，h_1 和 h_2 是循环导函数，由此可知，其解为 (15) 式，故只需计算出常系数 R_{i0} 即可，由奇函数在区间 $(-\infty, \infty)$ 积分为零可知，

$$R_{00} = R_{10} = R_{20} = R_{30} = 0$$

故知，

$$M_1\{\sin(mx_1)\cos(nx_2)\} = 0. \tag{27}$$

[推论]　若非线性变换系统是一奇循环导函数与一偶循环导函数，则在高斯过程输入条件下，其输出相关函数为零. 这一推论不难从 (13) 式得到证明.

五、结　束　语

本文虽然只研究了 $p = 4$ 的循环导函数，但所得的结果也适用于 $p = 1, 2, 3$ 的情况. 指数函数 e^x 是 $p = 1$ 的情况. 双曲线正弦，双曲线余弦是 $p = 2$ 的情况. 正弦，余弦以及 e^{jx} 是 $p = 4$ 的情况.

这类函数两两任意组合，在高斯过程输入的情况下，它们的输出相关函数都是 (15) 式给出的形式. 所不同的只是系数 R_{i0}，这些系数要由具体给定的函数来定.

本文曾请成都电讯工程学院的张有正同志，川大的王永德同志，西南电子技术研究所的谢庭芳，赵云舜，苏泽峰，肖之华以及徐宏枢等同志审阅. 在此谨表谢意.

六、附 录

（一）$M_1\{a_m\cos(mx_1)\}$ 的计算

$$M_1\{a_m\cos(mx_1)\}=a_m\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(mx_1)}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\left[\frac{x_1^2+x_2^2-2\rho x_1x_2}{2(1-\rho^2)}\right]\right\}dx_1dx_2$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(mx_1)\exp\left\{\frac{-x_1^2}{2(1-\rho^2)}\right\}dx_1\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left[\frac{x_2^2-2\rho x_1x_2}{2(1-\rho^2)}\right]\right\}dx_2$$

$$=\frac{a_m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(mx_1)\exp\left[-\left(\frac{x_1^2}{2}\right)\right]dx_1$$

查积分表得，

$$M_1\{a_m\cos(mx_1)\}=a_m\exp\left[-\left(\frac{m^2}{2}\right)\right] \tag{1-1}$$

（二）$M_1\{b_m\sin(mx_1)\}$ 的计算

$$M_1\{b_m\sin(mx_1)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b_m\sin(mx_1)}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\left[\frac{x_1^2+x_2^2-2\rho x_1x_2}{2(1-\rho^2)}\right]\right\}dx_1dx_2$$

$$=\frac{b_m}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(mx_1)\exp\left\{\frac{-x_1^2}{2(1-\rho^2)}\right\}dx_1\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{-x_2^2+2\rho x_1x_2}{2(1-\rho^2)}\right\}dx_2$$

$$=\frac{b_m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(mx_1)\exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right)dx_1=0 \tag{2-1}$$

（三）$M_1\{\cos(mx_1)\sin(nx_2)\}$ 的计算

由于正弦和余弦之和以及它们的同阶导数之积均为奇函数．故可知：$R_{00}=R_{10}=0$，所以，

$$M_1\{\cos(mx_1)\sin(nx_2)\}=0 \tag{3-1}$$

参 考 文 献

[1] S. O. Rice, Bell System Technical Journal, **24**(1945), **46.**
[2] R. Price, *IRE Trans. PGIT*, **IT**-4 (1958), 69.
[3] R. Deutsch, *Nonlinear Transformations of Random Processes, Printice-Hall, Inc. Calif.*, (1962), pp. 15—26.
[4] 徐桂芬，积分表，上海科技出版社，(1962)，p.66.
[5] R. C. Tausworthe, IEEE Trans. On Communication Technology, **Com-15** (1967), 502.

THE OUTPUT CORRELATION FUNCTION OF SOME NONLINEAR SYSTEMS WITH GAUSSIAN PROCESS INPUT

Yang Guang-zheng

(The South-west china Research Institute of Electronics Technology)

In this paper, the output correlation function of nonlinear systems of zero memory with the property of $h(lx)$ characterized by $h^{(k+p)}(lx) = l^p h^{(k)}(lx)$ (Where $h^{(k)}(lx) = \frac{\partial^{(k)} h(lx)}{\partial x^k}$, l is a real number) is treated, in case of the gaussian process input with zero mathematical expectation.

Based on the above characteristics, an ordinary differential equation is derived from Price theorem. Thus a problem of solving the output correlation function of nonlinear system is turned into a problem of solving an ordinary differential equation.

The results show that the output correlation functions of nonlinear system of this kind are of the same form. Different $h(lx)$'s only exert their influences upon coefficients.

From the above condition, the characteristics $f(x)$ of the conventional nonlinear system may be expressed in a family of functions which has the performance as mentioned above. By using the results directly, it is easy to obtain a calculating equation concerning the output correlation function of the conventional nonlinear system.