

## 伪线性主动段弹道估计方法

樊士伟 张涛 周伯昭

(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

**摘要:** 该文主要分析了星载被动传感器对目标的运动参数估计问题, 它也是空间预警系统的关键技术之一。文中提出的伪线性测量-卡尔曼滤波(PM-KF)的弹道估计方法减小了测量方程非线性所带来的估计误差, 较之 EKF 滤波有更好的估计精度。

**关键词:** 弹道估计, 伪线性测量, Kalman 滤波

中图分类号: V443

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)09-1503-04

## The Trajectory Estimation in Boost-Phase Using Pseudolinear Estimator

Fan Shi-wei Zhang Tao Zhou Bo-zhao

(School of Electron. Sci and Eng., National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** Trajectory estimation using the measurement of arrival angles from space-based infrared sensors is one of the key technologies in the space early warning system. This paper presents a pseudolinear measure-Kalman estimator for trajectory estimation in boost-phase. Compared with EKF and CRLB, this estimator is more precise.

**Key words** Trajectory estimation, Pseudolinear measure, Kalman Filter

### 1 引言

弹道导弹的扩散, 加速了各国对弹道导弹防御系统研制。空间预警系统(Space Early Warning System, SEWS)是完整弹道导弹防御(BMD)体系中不可缺少的一环, 系统通过星载红外传感器近实时地监视弹道导弹(Ballistic missile, BM)等目标的发射, 通过被动探测获得对弹道导弹到达角(方位、俯仰)测量信息, 实现对目标发射的监视、跟踪。目标运动参数估计是空间预警系统的关键技术之一, 其估计精度直接影响到整个系统性能。

由于无源的红外传感器只能获得目标到达角和辐射强度信息, 目标的状态方程和测量方程都是非线性的, 而且卫星距目标较远, 可观测性弱, 这些都对参数估计带来了较大的困难。通常采用的最小二乘和 Kalman 滤波方法, 在计算中 Fisher 矩阵病态严重, 条件数很大, 导致非线性滤波器的不稳定。虽然文献[1-3]提出了相应改进的方法, 但仍然没有很好的解决。

本文利用伪线性的方法将非线性的测量方程转变为线性的伪测量方程, 再通过 Kalman 滤波实现对目标的跟踪。该方法减小了测量方程非线性对目标参数估计的影响, 通过与扩展的 Kalman 滤波(EKF)、Cramer-Rao 限的仿真实验比较, 可以看出本文的方法较之 EKF 方法有较大的改进。

### 2 测量方程

设  $T_k$  时刻目标在 ECF(Earth-Centered Fix coordinates, 即固定地球坐标系, )坐标系下的状态变量为  $x_k$ , 其中的位置矢量记为  $r_k$ , 而卫星的位置矢量为  $s_k$ , 则  $T_k$  时刻的角测量可以用二维矢量  $z_k$  表示, 即

$$z_k = (\alpha_k, e_k)^T = h(x_k, s_k) + w_k, \quad K=1, \dots, M \quad (1)$$

其中  $\alpha_k$  和  $e_k$  分别是 UEN(Up-East-North coordinates)坐标系下的方位及俯仰角, 如图 1 所示;  $w_k$  是传感器的测量噪声矢量, 可视为零均值的高斯随机过程, 方差矩阵  $R_k$  为

$$R_k = \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha_k}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{e_k}^2 \end{bmatrix}$$

设目标在 UEN 坐标系中的矢量为  $L = (U, E, N)^T$ , 则有

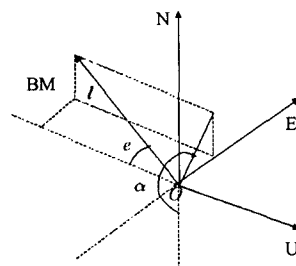


图 1 UEN 坐标系中角测量示意图

$$\begin{pmatrix} e \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{-\sqrt{E^2 + N^2}}{U}\right) \\ \frac{3}{2}\pi - \arctan\left(\frac{N}{E}\right) \end{pmatrix} \quad (2)$$

在 ECF 坐标系中目标的位置矢量  $r_K$  可以通过 UEN 坐标系中的矢量  $L$ , 表示为

$$r_K = s_K + T_{\text{UEN}}^{\text{ECF}} L \quad (3)$$

其中  $T_{\text{UEN}}^{\text{ECF}}$  是 UEN 坐标系到 ECF 坐标系的转换矩阵, 而 ECF 坐标系到 UEN 坐标系的转换矩阵  $T_{\text{ECF}}^{\text{UEN}} = [T_{\text{UEN}}^{\text{ECF}}]^{-1} = [T_{\text{UEN}}^{\text{ECF}}]^T$ , 设参数  $gha$ 、 $\delta$  分别表示卫星的经度和纬度, 则

$$T_{\text{UEN}}^{\text{ECF}} = \begin{bmatrix} \cos(gha) & -\sin(gha) & 0 \\ \sin(gha) & \cos(gha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\delta) & 0 & -\sin(\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\delta) & 0 & \cos(\delta) \end{bmatrix}$$

因此, 式(1)中  $h(\cdot)$  可以表示为

$$h(x_K, s_K) = H \left[ T_{\text{ECF}}^{\text{UEN}} (r_K - s_K) \right], \quad K=1, \dots, M \quad (4)$$

$H(\cdot)$  如式(2)所示。

### 3 估计算法

#### 3.1 伪线性测量的导出

根据式(2), 可以得到目标在观测图像平面内的位置为

$$\begin{cases} x = f \cdot \tan e \cdot \sin \alpha \\ y = f \cdot \tan e \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad (5)$$

根据光学成像系统的原理, 其中蕴含着  $x/E = y/N = f/U$  的关系,  $f$  为光学系统焦距。式(5)化为

$$\begin{cases} U \cdot \tan e \cdot \sin \alpha - E = 0 \\ U \cdot \tan e \cdot \cos \alpha - N = 0 \end{cases}$$

矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} \tan e \cdot \sin \alpha & -1 & 0 \\ \tan e \cdot \cos \alpha & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ E \\ N \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

根据目标与卫星平台的几何关系, 可得

$$\begin{pmatrix} x_{\text{BM}} \\ y_{\text{BM}} \\ z_{\text{BM}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} + T_{\text{UEN}}^{\text{ECF}} \cdot \begin{pmatrix} U \\ E \\ N \end{pmatrix}$$

式中  $(x_{\text{BM}}, y_{\text{BM}}, z_{\text{BM}})$ ,  $(x_S, y_S, z_S)$  分别为目标与卫星在 ECF 坐标系下的位置。将上式代入式(6)得:

$$\begin{pmatrix} \tan e \cdot \sin \alpha & -1 & 0 \\ \tan e \cdot \cos \alpha & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot T_{\text{ECF}}^{\text{UEN}} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{BM}} - x_S \\ y_{\text{BM}} - y_S \\ z_{\text{BM}} - z_S \end{pmatrix} = 0$$

记

$$A = \begin{pmatrix} \tan e \cdot \sin \alpha & -1 & 0 \\ \tan e \cdot \cos \alpha & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad r_S = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix}, \quad r_{\text{BM}} = \begin{pmatrix} x_{\text{BM}} \\ y_{\text{BM}} \\ z_{\text{BM}} \end{pmatrix}.$$

则上式可以化为

$$A \cdot T_{\text{ECF}}^{\text{UEN}} \cdot r_S = A \cdot T_{\text{ECF}}^{\text{UEN}} \cdot r_{\text{BM}}$$

在此定义伪测量量:

$$z^p = \begin{pmatrix} e^p \\ \alpha^p \end{pmatrix} = A \cdot T_{\text{ECF}}^{\text{UEN}} \cdot r_S$$

则伪测量方程为

$$z_K^p = \begin{pmatrix} e_K^p \\ \alpha_K^p \end{pmatrix} = A_K \cdot T_{\text{ECF}}^{\text{UEN}} \cdot r_K + w_K^p, \quad K=1, \dots, M \quad (7)$$

式中  $w_K^p$  为伪测量量噪声, 其协方差矩阵  $R_K^p$

$$(R_K^p)^{1/2} = (G_K R_K^{1/2}), \quad K=1, \dots, M \quad (8)$$

$G_K$  可以由下式确定:

$$G_K = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_K^p}{\partial x_K} & \frac{\partial e_K^p}{\partial \alpha_K} \\ \frac{\partial \alpha_K^p}{\partial x_K} & \frac{\partial \alpha_K^p}{\partial \alpha_K} \end{bmatrix}, \quad K=1, \dots, M \quad (9)$$

#### 3.2 Kalman 滤波

前面利用伪线性的方法, 将测量方程式(1)转换为线性的伪测量方程式(7), 下面采用 Kalman 滤波方法实现对目标的定位与跟踪。

导弹在主动段受力情况十分复杂, 主要包括推力(Thrust)、重力(Gravity)、气动阻力(Drag)等等, 采用高阶线性多项式来拟合主动段的弹道是一个简单而直观的方法, 在此采用 12 态的线性模型。定义目标状态矢量  $x_k$  为

$$x_k = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{x}}, \ddot{\ddot{y}}, \ddot{\ddot{z}}]^T$$

在任意时刻  $T_k$  目标状态参数矢量的显式表达式为

$$x_k = \Phi_{k,k-1} \cdot x_{k-1} + \Gamma_{k,k-1} W_k \quad (10)$$

其中

$$\Phi_{k,k-1} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & t_k I_{3 \times 3} & \frac{t_k^2}{2} I_{3 \times 3} & \frac{t_k^3}{6} I_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} t_k & I_{3 \times 3} & \frac{t_k^2}{2} I_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & t_k I_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{12 \times 12}, \quad t_k = T_k - T_{k-1}$$

$$I = \text{eye}(3)$$

$$\Gamma_{k,k-1} = \begin{bmatrix} \frac{t_k^7}{252} U_{3 \times 3} & \frac{t_k^6}{72} U_{3 \times 3} & \frac{t_k^5}{30} U_{3 \times 3} & \frac{t_k^4}{24} U_{3 \times 3} \\ \frac{t_k^6}{72} U_{3 \times 3} & \frac{t_k^5}{20} U_{3 \times 3} & \frac{t_k^4}{8} U_{3 \times 3} & \frac{t_k^3}{6} U_{3 \times 3} \\ \frac{t_k^5}{30} U_{3 \times 3} & \frac{t_k^4}{8} U_{3 \times 3} & \frac{t_k^3}{3} U_{3 \times 3} & \frac{t_k^2}{2} U_{3 \times 3} \\ \frac{t_k^4}{24} U_{3 \times 3} & \frac{t_k^3}{6} U_{3 \times 3} & \frac{t_k^2}{2} U_{3 \times 3} & t_k U_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{12 \times 12}, \quad U = \text{ones}(3)$$

$W_k$  为干扰矢量, 其统计特性为  $E[W_k] = 0$ ,  $E[W_k W_k^T] = qI$ 。

根据式(7), 可以得到系统的伪测量方程为

$$z_k^p = A_k \cdot T_{\text{ECF}}^{\text{UEN}} \cdot H_1 X_k + w_k^p \quad (11)$$

其中  $H_1 = [I_{3 \times 3} \quad \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad \mathbf{0}_{3 \times 3}]_{3 \times 12}$ ,  $R_k^p = E[w_k^p w_k^{pT}]$ , 见式(8)。

根据式(10), 式(11), 可以写出 Kalman 滤波公式为

状态预测  $X_{k/k-1} = \Phi_{k/k-1} X_{k-1/k-1}$  (12a)

协方差预测  $P_{k/k-1} = \Phi_{k/k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k/k-1}^T + q \cdot \Gamma_{k/k-1} \cdot I \cdot \Gamma_{k/k-1}^T$  (12b)

状态估计  $X_{k/k} = X_{k/k-1} + K_k [z_k^p - A_k \cdot T_{ECF}^{UEN} \cdot H_1 \cdot X_{k/k-1}]$  (12c)

协方差估计  $P_{k/k} = [I_{12 \times 12} - K_k \cdot A_k \cdot T_{ECF}^{UEN} \cdot H_1] P_{k/k-1}$  (12d)

滤波增益  $K_k = P_{k/k-1} \cdot (A_k \cdot T_{ECF}^{UEN} \cdot H_1)^T \cdot [A_k \cdot T_{ECF}^{UEN} \cdot H_1 \cdot P_{k/k-1} \cdot (A_k \cdot T_{ECF}^{UEN} \cdot H_1)^T + R_k^p]^{-1}$  (12e)

3.3 初始估计

通过 CA 模型求得滤波的初始值。

式(3)可以写为

$$r_k = s_k + \rho_k T_{ECF}^{UEN} u_k \quad (13)$$

其中  $\rho_k$  是传感器指向目标矢量长度, 即  $\rho_k = \|L\|$ ;  $u_k$  可以通过测量值获得, 即

$$u_k = [-\cos e_k \quad -\sin \alpha_k \sin e_k \quad -\cos \alpha_k \sin e_k]^T \quad (14)$$

另一方面, 有

$$x_k = x_0 + (T_k - T_0) \cdot \dot{x}_0 + \frac{1}{2} (T_k - T_0)^2 \cdot \ddot{x}_0 \quad (15)$$

代入(13)式, 有

$$x_0 + (T_k - T_0) \cdot \dot{x}_0 + \frac{1}{2} (T_k - T_0)^2 \cdot \ddot{x}_0 = s_k + \rho_k u_k$$

在上式两边同时使用  $u_k$  进行向量叉乘(即算子  $\otimes$ ), 消去  $\rho_k u_k$  项, 得到

$$u_k \otimes x_0 + (T_k - T_0) \cdot (u_k \otimes \dot{x}_0) + \frac{1}{2} (T_k - T_0)^2 \cdot (u_k \otimes \ddot{x}_0) = u_k \otimes s_k \quad (16)$$

显然, 当  $M \geq 5$  时, 可以获得上式的最小二乘解。

3.4 目标跟踪算法流程

目标跟踪算法流程如图 2 所示。

3.5 Cramer-Rao 限

对目标的跟踪为一个非线性估计问题, Cramer-Rao 下限(简称 CRLB)是评价估计误差方差一个有效参数。理论上只有状态变量传递函数及测量方程为线性函数时, 其估计误差的方差可以达到 Cramer-Rao 下限, 本文中面临的是一个非线性问题, 确切求解估计误差方差是很困难的。根据文献[4]计算方法, 对于式(1)中的测量模型, 令  $x_k^{true}$  表示目标运动参数的真实值, 则目标状态参数估计误差方差的 Cramer-Rao 下限  $P_{CRLB}$  为

$$P_{CRLB}^{-1} \approx \left\{ \left[ \Gamma(x_k) \right]^T \Gamma(x_k) \right\}_{x_k = x_k^{true}} \quad (17)$$

其中  $\Gamma(x_k) = \begin{bmatrix} -R_1^{-1/2} [\nabla_{x_k} h^T(x_1)]^T \\ \vdots \\ -R_M^{-1/2} [\nabla_{x_k} h^T(x_M)]^T \end{bmatrix}_{2M \times 12}$

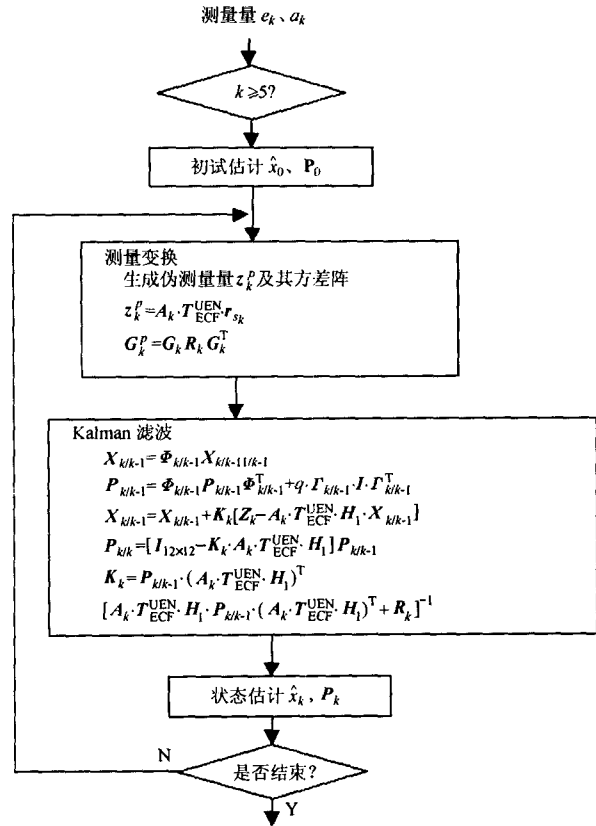


图 2 目标跟踪算法流程图

令  $\nabla_{x_k} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \frac{\partial}{\partial y_k} \quad \frac{\partial}{\partial z_k} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial \dot{y}_k} \quad \frac{\partial}{\partial \dot{z}_k} \right]^T$ , 则

$$\nabla_{x_k} h^T(x_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \dot{z}_k} \end{bmatrix} [a_k \quad e_k] = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} & \frac{\partial e_k}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial a_k}{\partial \dot{z}_k} & \frac{\partial e_k}{\partial \dot{z}_k} \end{bmatrix}_{12 \times 2}$$

从式(17)可以看出,  $\Gamma(x_k)$  独立于实际测量值, 只与测量方程及噪声方差有关, 因此, 式(17)反映了误差的方差特性。

4 仿真结果

仿真实验对某射程的弹道目标参数估计, 导弹发射点都位于 E134.1, N27.6, 射向  $0^\circ$ , Monte-Carlo 次数为 200 次。PM-Kalman 滤波方法和 EKF 以及 Cramer-Rao 限的仿真结果如下:

条件(1) 数据率为 1Hz, 角度测量误差为  $100\mu\text{rad}$ , 如图 3 所示。

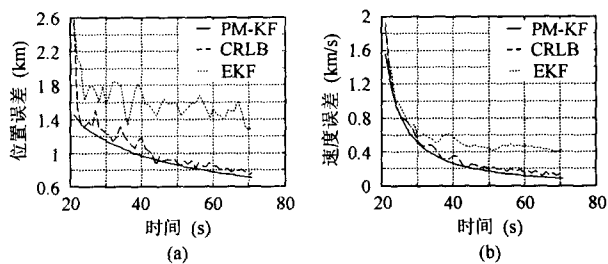


图 3

条件(2) 数据率为 5Hz、角度测量误差为  $120\mu\text{rad}$ ，如图 4 所示。

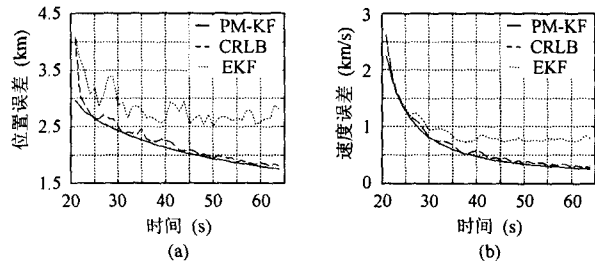


图 4

注: Cramer-Rao 下限的求解是在不考虑模型误差条件下计算的, (见文献[4])。

从上述仿真结果可以看出, PM-Kalman 方法比 EKF 方法估计精度高, 算法也比较稳定。在条件(1)下, 位置估计精度  $\leq 1\text{km}$ , 速度估计精度  $\leq 200\text{m/s}$ ; 在条件(2)下, 位置估计精度  $\leq 2\text{km}$ , 速度估计精度  $\leq 500\text{m/s}$ 。

## 5 结束语

通过理论分析和仿真实验可以看出 PM-Kalman 方法是主动段弹道估计的有效方法。由于空间预警系统客观条件的

限制, 弹道导弹目标运动速度快, 在有限个观测点的条件下, 对目标进行高精度的估计与跟踪十分困难。在提高估计算法的同时还应该增加卫星平台的数目以及提高载荷的性能。

## 参考文献

- [1] Li Yicong, Bar-Shalom Y. Trajectory and launch point estimation for ballistic missiles from boost phase LOS measurements. *IEEE Aerospace Conference Proceedings*, 1999, Vol. 4: 425 - 442.
- [2] Danis J. Space-based tactical missile launch parameter estimation. *IEEE Trans. on AES*, 1993, 29(2): 412 - 424.
- [3] 李盾. 空间预警系统对目标的定位与预报. [博士学位论文], 国防科技大学, 2001 年.
- [4] Taylor H. The Cramer-Rao estimation error lower bound computation for deterministic nonlinear systems. *IEEE Trans. on AC*, 1979, AC-24(2): 343 - 344.

樊士伟: 男, 1961 年生, 研究员, 主要研究方向为航天系统工程总体、空间信息处理技术等。

张涛: 男, 1978 年生, 博士生, 研究方向为空间信息处理技术。