

## 基于奇异性检测的信号去噪新方法

蒋 宏 王 军

(北京航空航天大学自动化学院自控系 北京 100083)

**摘 要:** 该文引进了一种基于奇异性检测的信号去噪方法, 并对其在二维降噪中所需进行的复杂的线性内插作了进一步简化, 使得整个二维降噪得以大大简化而达到快速运算和节省存储量的目的。文中详细描述了该算法的理论基础并给出其一维计算机仿真, 同时也给出了进一步简化后的二维降噪仿真。这种去噪方法不需要信号或噪声的先验信息。仿真结果表明, 相比其它小波去噪方法, 该方法的主要优势在于: 它在某一时刻的脉冲噪声的辨识和去除能力相当强, 而且在去噪的同时能很好地保持信号边缘。

**关键词:** 噪声, 李氏指数, 奇异性, 小波

**中图分类号:** TN911.4      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1009-5896(2005)03-0419-04

## Denoising by Singularity Detection

Jiang Hong      Wang Jun

(Automatic Control Department, School of Automation, Beihang University, Beijing 100083, China)

**Abstract** A signal denoising algorithm based on singularity detection is introduced in this paper. It simplified the complicated linear interpolation operation needed in the 2-D image denoising so that the 2-D denoising is greatly simplified and it can also get the fast denoising and save lots of memory. A complete description of this method and its 1-D denoising simulation are presented. A simplified 2-D denoising simulation is presented, too. This method does not need the prior information of signal or noise. Simulation results indicate that compared to other wavelet based denoising algorithms, the main advantage of this method is: it can better detect and reduce the pulse noise and it can reduce the noise while keeping the signal edges better.

**Key words** Noise, Lipschitz exponent, Singularity, Wavelet

### 1 引言

近年来, 小波理论得到了迅速的发展, 而且由于其良好的时频特性, 因而实际应用非常广泛。小波去噪是一个信号滤波的问题, 但它又不同于传统意义上的低通滤波, 它可以保留信号的基本特性。因而, 它可以看成是特征提取和低通滤波功能的综合<sup>[1]</sup>。

小波去噪方法, 大体上可以分为小波萎缩法、投影方法、相关方法 3 类<sup>[1]</sup>。小波萎缩法是目前研究最为广泛的方法, 最初由 Donoho 于 1992 年提出阈值萎缩法 (waveshrink)<sup>[2]</sup>。因为小波系数中较大的系数多是以实际信号为主, 而较小的则多为噪声, 所以可以设定合适的阈值, 将小于阈值的系数置零, 而保留大于阈值的系数, 然后再经过一系列处理, 就可以实现去噪和重建。然而, 对于阈值的选择并没有一个统一的标准, 需要根据实际信号的情况及先验信息来进行选取, 如果选取不当, 就会极大地影响最终的去噪效果。

Mallat 介绍了一种利用小波变换模最大值的降噪技术<sup>[3]</sup>, 该技术是利用李氏 (Lipschitz) 指数的方法。一个信号的小波变换模最大值表征了小波变换模的局部最大值的值和位置, 信号的局部李氏指数可以通过多尺度描绘它的小波变换模最大值的变化情况估测出。从估测出的李氏指数以及其它一些先验信息中, 一个很有效的降噪方法便可以发展起来。虽然基于小波变换模最大值的算法在许多方面都显示了其优越性, 但小波变换模最大值的不规则采样的性质仍然使重构过程复杂化。而且小波变换模最大值不能唯一地描述一个信号, 这意味着从小波变换模最大值的重构可能不一致稳定。

结合 Mallat 和 Donoho 法, 一种新的小波去噪方法被提出<sup>[4]</sup>。同 Donoho 法一样, 该算法依据阈值来选择所需要的小波系数来进行重构。然而, 同 Mallat 法一样, 该方法阈值的大小是基于估测的信号的李氏指数。因此, 虽然 Mallat 法的信号重构需要复杂的计算, 该方法却避免了复杂的重构过

程。相比其它小波去噪方法,该方法在去噪的同时也很好地保留了信号的边缘信息。该方法在二维降噪中当计算小波变换系数模值和时,需要进行复杂的线性内插运算,在某种程度上影响了它的发展和运用。因此,一个令人关注的问题是如何避免线性内插的复杂运算,同时又达到线性内插的效果且节省运算时间和存储量。本文围绕这方面做了一些工作,使得二维降噪实时进行成为可能,并对进一步简化后的模型进行了计算机仿真。仿真结果表明,基于本文模型的二维降噪达到了一定的预期效果。

## 2 基于奇异性检测的一维信号降噪

一维离散信号  $f \in L^2(\mathbb{R})$  的离散二进小波变换<sup>[5, 6]</sup>定义为:  $\{S_{2^j} f, (W_{2^j} f)_{1 \leq j \leq J}\}$ , 它是由  $f(x)$  与尺度函数和膨胀小波卷积而得, 即  $S_{2^j} f = f * \phi_{2^j}(x)$ ,  $W_{2^j} f = f * \psi_{2^j}(x)$ 。  $F(x)$  的一特定点的局部李氏指数可用以下定理给出<sup>[3]</sup>。

**定理 1** 如果  $f(x)$  在点  $x_0$  的李氏指数为  $\alpha$ , 则存在一个常数  $A$ , 使得对于  $x_0$  邻域内任意  $x$  值和任意尺度  $s$ , 都有

$$|W_s f(x)| \leq A(s^\alpha + |x - x_0|^\alpha) \quad (1)$$

反之, 如果以下两个条件成立, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  的李氏指数为  $\alpha$ 。

(1) 存在一  $\varepsilon > 0$  和一常数  $A$ , 使得对于  $x_0$  邻域内任意  $x$  值和任意尺度  $s$  都有

$$|W_s f(x)| \leq A s^\varepsilon \quad (2)$$

(2) 存在一常数  $B$ , 使得对于  $x_0$  邻域内任意  $x$  值和任意尺度  $s$  都有

$$|W_s f(x)| \leq B \left( s^\alpha + \frac{|x - x_0|^\alpha}{|\log|x - x_0||} \right) \quad (3)$$

式(1)和(3)表明, 在锥体  $|x - x_0| \leq Ks$  中,  $|W_s f(x)| \leq O(s^\varepsilon)$ , 其中  $K$  是母小波的支撑长度, 这个锥体被称为效应锥体(COI)<sup>[3]</sup>。对于信号在每个尺度下的小波系数, 计算其模值在效应锥体里的积分<sup>[4]</sup>。用  $N$  来表示小波系数模值和, 对于函数  $f$  的所有  $x_0$  值, 有

$$N_s f(x_0) = \int_{|x - x_0| \leq Ks} |W_s f(x)| dx \quad (4)$$

其中  $s$  是尺度,  $K$  为母小波函数的支撑长度,  $K$  为一常量。从定理 1 可得

$$\begin{aligned} N_s f(x_0) &\leq \int_{|x - x_0| \leq Ks} A(s^\alpha + |x - x_0|^\alpha) dx \\ &\leq 2A \left( K + \frac{K^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) s^{\alpha+1} \leq A' s^{\alpha+1} \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $A'$  为一常量。式(5)表明, 可以从  $\log(N_s f)$  斜率的上界来估计李氏指数  $\alpha$ 。这样可以通过对  $N_s f(x)$  的分析和计算, 来选取小波系数, 而不是像以前的方法那样<sup>[3]</sup>, 利用小波系数模最大值来进行选取。实际上, 利用  $N_s f(x)$  而不是通常的小波系数模最大值主要区别就是, 运用  $N_s f(x)$  可以识别出那些满足判别标准的一些小的奇异点, 而运用  $W_s f(x)$  只能选取那些不满足判别标准的明显的奇异点, 而对于一些不明显的奇异点则无能为力。其次, 这种算法也使降噪的操作简化了。

把  $s = 2^{j+1}$  和  $s = 2^j$  代入式(5)可分别得到  $N_{2^{j+1}} f(x_0)$  和  $N_{2^j} f(x_0)$  的上限表达式:

$$N_{2^{j+1}} f(x_0) \leq A'(2^{j+1})^{\alpha+1} \quad (5a)$$

$$N_{2^j} f(x_0) \leq A'(2^j)^{\alpha+1} \quad (5b)$$

因而, 在降噪的过程中, 并不需要直接计算李氏指数。众所周知, 高斯噪声的李氏指数通常为负值。当  $\alpha \leq -1$  时,

$$N_{2^{j+1}} f(x_0) \leq N_{2^j} f(x_0), \quad 1 \leq j < J \quad (6)$$

其中  $J$  是尺度总数。式(6)表明, 对于一个明显的奇异点 ( $\alpha \leq -1$ ), 就可以较容易地利用  $N_s f(x)$  检测出奇异点, 即

$$\frac{N_{2^{j+1}} f(x_0)}{N_{2^j} f(x_0)} = 2^{\alpha+1} \leq 1, \quad 1 \leq j \leq J, \quad \alpha \leq -1 \quad (7)$$

此时, 函数  $N_s f(x_0)$  会随着尺度的增长而减小或是保持不变。如果点  $x_0$  是  $f$  的边缘点或非奇异点, 则该点的李氏指数  $\alpha$  大于或是等于 0。这样的点也会被方便地检测出来, 即

$$\frac{N_{2^{j+1}} f(x_0)}{N_{2^j} f(x_0)} = 2^{\alpha+1} \geq 2, \quad 1 \leq j \leq J, \quad \alpha \geq 0 \quad (8)$$

即函数  $N_s f(x_0)$  的增长会是尺度增长的两倍以上。利用式(8)来选择满足尺度间比率条件的小波系数, 可以在有效地去噪的同时保留信号的边缘以及非奇异点。

这种尺度间比率方法的引入为选取对应于非奇异点的小波系数提供了一个简单的方法。而且, 该方法不需要任何关于信号及噪声的先验信息, 也就是说, 无论是什么样的信号, 或是什么样的噪声都不会影响到这种方法的效果。可是, 由于在  $N_s f(x)$  的估测中可能发生的错误以及从临近奇异点的效应锥体可能引入的混叠, 一些小的奇异点的小波系数可能会满足式(8)的条件。这种影响对  $-1 < \alpha < 0$  的奇异点更为严重。因为对于这些奇异点, 其小波系数模之和也会随着尺度的增加而增大, 只不过它的增长速率要比非奇异点小很多。但是, 这种错误的引入, 可能会增加其小波系数模之和随尺度的增长速率, 因而错误地满足式(8)。为了解决这一问题, 该文设置了一个尺度间差异阈值  $\gamma$ , 即

$$N_{2^{j+1}} f(x_0) - N_{2^j} f(x_0) > \gamma \quad (9)$$

信号的边缘和非奇异点可以通过式(9)用阈值  $\gamma \geq A' 2^j$

提取出来, 因为

$$N_{2^{j+1}}f(x_0) - N_{2^j}f(x_0) = (2^{\alpha+1} - 1)A'(2^j)^{\alpha+1} \geq A'2^j \quad (10)$$

其中  $\alpha \geq 0$ 。因此, 即使某点的小波系数值满足条件式(8), 它也仍然需要满足条件式(10)才可以被选取。换句话说, 一些小的奇异点不会满足条件式(10), 因此会被除去。如果阈值  $\gamma$  设置过大, 则会错误地除去一些非奇异点, 通常来讲,  $\gamma$  一般设为很小的值, 因为在这一步骤中, 主要的任务就是除去那些较小的奇异点。阈值  $\gamma$  可以看成一调节参数来平衡奇异点的去噪和边缘及非奇异点的保留。

综上所述, 将该算法总结如下:

- (1) 对于各个尺度上, 求出各个离散点上的小波系数值  $W_{2^j}f(x)$  以及各点上的  $N_{2^j}f(x)$ ;
- (2) 如果  $N_{2^{j+1}}f(x_0)/N_{2^j}f(x_0) > 2$  且  $N_{2^{j+1}}f(x_0) - N_{2^j}f(x_0) \geq \gamma$ , 则选取该点上的  $W_{2^j}f(x_0)$  值;
- (3) 重复步骤(2)直到在各个尺度上的小波系数选择完毕;
- (4) 对所选的小波系数, 运用小波逆变换进行重构。

### 3 一维仿真分析

图1为不含噪声的原始信号, 图2为含高斯噪声的信号, 这之中不仅加入了高斯噪声, 而且还在  $t=1000$  处加入了一个脉冲信号。图3为用该文算法消噪后的信号。这里本文作了4个尺度的小波分解, 即有尺度间1-2, 2-3, 3-4的小波变换系数模值比的判率和差异的判决, 并从尺度3的小波系数进行重构。从图3中, 可以看出, 对于原信号的消噪还是比较成功的, 包括  $t=1000$  处的脉冲信号的去除。

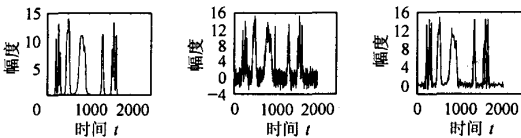


图1 原始信号波形 图2 含噪声信号波形 图3 重构信号波形

图4比较了本文算法与其它三种通用算法(强制消噪, 默认阈值消噪, 给定软阈值消噪)的消噪效果。这三种通用算法都做到尺度3的小波分解。从图4可以看出, 强制消噪后的波形比较平滑, 但是, 这也会使得一些细节部分, 比如原始信号中的一些突变部分体现不出来, 即损失了一些边缘信息。所以说, 强制消噪是一种简单易行但容易丢失原始信号一些信息的方法。而默认阈值消噪中, 可以看到它改善了第一种方法中的一些弊病, 但是, 它对于脉冲信号则没有消除, 这是它的一大缺憾。利用软阈值进行降噪的效果也不理想, 同样脉冲信号没有消除, 且在其它部分的表现也不理想。由对比可见, 本文算法在某一时刻的脉冲信号的辨识和去除能力相当强, 而且在去噪的同时能很好地保持信号边缘。

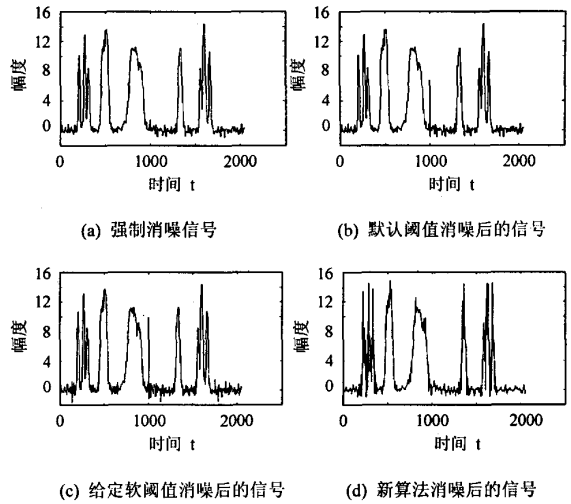


图4 新算法消噪与其它算法消噪的比较

### 4 基于奇异性检测的二维降噪

离散图像  $f \in L^2(R^2)$  的离散二进小波变换<sup>[5, 6]</sup>定义为:

$\{S_{2^j}f, (W_{2^j}^1f)_{1 \leq j \leq J}, (W_{2^j}^2f)_{1 \leq j \leq J}\}$ , 它是由  $f(x, y)$  与尺度函数和膨胀小波卷积而得, 即

$$S_{2^j}f = f * \phi_{2^j}(x, y), W_{2^j}^1f = f * \psi_{2^j}^1(x, y), W_{2^j}^2f = f * \psi_{2^j}^2(x, y),$$

这里, 小波为一光滑函数沿  $x$  和  $y$  方向的偏导数, 即

$$\psi^1(x, y) = \partial\Phi(x, y)/\partial x, \quad \psi^2(x, y) = \partial\Phi(x, y)/\partial y.$$

小波系数模定义为

$$M_{2^j}f(x, y) = \sqrt{|W_{2^j}^1f(x, y)|^2 + |W_{2^j}^2f(x, y)|^2} \quad (11)$$

相角定义为

$$A_{2^j}f(x, y) = \arctan(W_{2^j}^2f(x, y)/W_{2^j}^1f(x, y)) \quad (12)$$

这里小波系数模和相角表征了在一特定点  $(x, y)$  的小波系数梯度矢量的模值和方向。因为小波系数梯度矢量的方向表征了所寻信号局部最大值的方向, 只需测量那个方向上的李氏指数来决定  $f(x, y)$  的奇异性, 那个方向上的效应锥体被称为方向效应锥体 (DCOI)。

现在, 计算小波系数模值在方向效应锥体里的积分:

$$N_s f(x_0, y_0) = \int_{(x, y) \in D_s} M_s f(x, y) dx dy \quad (13)$$

这里,  $D_s = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq Ks^2, (y - y_0)/(x - x_0) = \tan(A_{2^j}f(x_0, y_0))\}$  为方向效应锥体。

因为不是所有小波系数都位于  $A_s f$  方向, 所以必须对式(13)作线性内插<sup>[4]</sup>, 这使得存储量及运算量很可观。为了避免线性内插的复杂运算以便实时进行二维降噪, 同时又达到线性内插的效果, 该文作了以下的进一步简化工作: 把  $xy$

坐标轴平面的右半部分分成 5 部分, 即  $-90^\circ \sim -67.5^\circ$ ,  $-67.5^\circ \sim -22.5^\circ$ ,  $-22.5^\circ \sim 22.5^\circ$ ,  $22.5^\circ \sim 67.5^\circ$  和  $67.5^\circ \sim 90^\circ$ 。同时左半平面也分割为相应的各个部分。通过计算指定点小波系数相角  $A_s f(x, y)$  的正切值, 在其半径为  $Ks^2$  的半径内查找正切值最接近的一个, 来定出  $N_s f(x, y)$  值。

同一维降噪算法类似, 不需要直接算出某一点的李氏指数。对于一些较大的奇异点, 利用条件:

$$N_{2^{j+1}} f(x_0, y_0) / N_{2^j} f(x_0, y_0) > 2 \quad (14)$$

就可以去除。而对于满足条件式(14)的一些较小的奇异点, 则可以利用条件:

$$N_{2^{j+1}} f(x_0, y_0) - N_{2^j} f(x_0, y_0) > \gamma \quad (15)$$

这里,  $\gamma$  是阈值。可以看出, 二维降噪算法与一维是相似的, 只是各个尺度上小波系数模之和  $N_s f(x, y)$  是直接利用小波系数相角的  $A_s f(x, y)$  正切值得到, 而不是整个三维的效应锥体。该文的进一步简化工作使得整个降噪过程得以大大简化, 集中体现在计算  $N_s f(x, y)$  的过程中, 因为  $N_s f(x, y)$  的计算可以说是整个降噪过程中最复杂的计算过程。

综上所述, 二维降噪算法可以归纳如下:

- (1) 对于任意  $j$ ,  $1 \leq j < J$ , 计算该尺度下的  $W_{2^j} f$  和  $N_{2^j} f$  值;
- (2) 如果  $N_{2^{j+1}} f(x_0, y_0) / N_{2^j} f(x_0, y_0) > 2$  并且  $N_{2^{j+1}} f(x_0, y_0) - N_{2^j} f(x_0, y_0) > \gamma$ , 则选取该点的小波系数;
- (3) 重复步骤(2), 直至在任何尺度下的小波系数都选取完毕;
- (4) 利用小波反变换对图像进行重构。

## 5 二维仿真分析

首先还是先来看看原始图像、加上噪声后的图像以及用该算法降噪后的重构图像, 如图 5, 图 6 及图 7 所示:

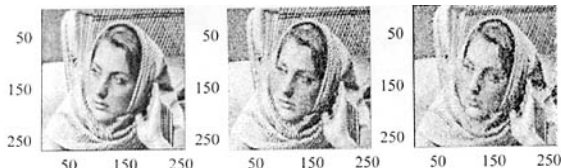


图 5 原始图像

图 6 含噪声图像

图 7 本文算法降噪后的重构图像

这里本文只作了 2 个尺度的小波分解, 即只有尺度间 1-2 的小波变换系数模值和的比率和差异的判决, 并从尺度 1 的小波系数进行重构。由上面的图像可以看出, 重构图像比起含噪声图像还是有了一定的改善, 但与原始图像相比, 仍有不足之处。整个重构图像尽管去除了一部分噪声, 但是看起来却比较模糊, 这可能与重构层数太少有关, 使得一些细节部分被忽略所致。

## 6 结论

本文采用了一种新颖的利用小波变换系数模值和的去噪方法。该方法的理论依据是: 一个信号的局部规则性可以通过计算其效应锥体中的小波系数模的总和来估测出, 并选出对应于信号重构的规则部分的小波系数。该方法用尺度间小波变换系数模值和的比率和差异来选取需要的小波系数进行重构。这种去噪方法不需要信号或噪声的先验信息, 而且在去噪的同时能很好地保持信号边缘。另外, 该文对在二维降噪中所需进行的线性内插作了进一步简化, 使得整个二维降噪过程得以大大简化。仿真结果表明, 相比其它小波去噪方法, 该方法对于脉冲噪声的辨识和去除能力相当强。

## 参考文献

- [1] 谢杰成, 张大力, 徐文立. 小波图象去噪综述. 中国图象图形学报, 2002, 7(3): 209 - 217.
- [2] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 1994, 81(3): 425 - 455.
- [3] Mallat S, Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1992, 38(3): 617 - 643.
- [4] Hsung Tai-Chiu, Lun Daniel Pak-Kong, Siu Wan-Chi. Denoising by singularity detection. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1999, 47(11): 3139 - 3144.
- [5] 彭玉华. 小波变换与工程应用. 北京: 科学出版社, 1999: 38 - 62.
- [6] 徐长发, 李国宽. 实用小波方法. 武汉: 华中科技大学出版社, 2001: 210 - 225, 235 - 246.

蒋宏: 女, 1967 年生, 副教授, 一直从事 ADSL, VDSL, SHDSL 等产品的研发, 目前的研究兴趣为目标跟踪、景像匹配、信号检测与识别。