

三维矢量散射分析中奇异积分的准确计算方法¹

姚海英 聂在平

(电子科技大学微波工程系 成都 610054)

摘 要 在用积分方程和矩量法 (MM) 或快速多极子法 (FMM) 分析三维矢量散射时, 都要对有奇异性的被积函数进行积分。如果直接使用高斯积分, 则准确性很低。为了得到准确的积分结果, 本文在分析了高斯积分原理的基础上提出了“积分区域分割法”。此方法将积分区域划分为一个包含奇异点的部分和若干个无奇异点的部分。对无奇异点的部分可直接用高斯积分求解, 而对包含奇异点的部分, 则可通过简化被积函数, 变量代换和加减同阶奇异项等方法获得它的解析表达式。本文将这种方法用到电场积分方程 (EFIE) 的矩量法中, 以角反射器和导电球目标散射特性 (RCS) 为例, 其计算的结果与文献非常吻合。

关键词 高斯积分, 奇异性, 积分区域分割法
中图分类号 O441

1 引 言

三维矢量散射的电场积分方程 (EFIE) 可写为^[1]

$$\hat{t} \cdot \int_{s'} [\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla'] \frac{e^{ikR}}{R} ds' = \frac{4\pi i}{k\eta} \hat{t} \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}). \quad (1)$$

用 MM 将 (1) 式离散后得到矩阵方程:

$$\sum_{n=1}^N A_{mn} a_n = F_m, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

其中 a_n 为未知感应电流的展开系数, F_m 为激励项, A_{mn} 为广义阻抗元素, 其表达式如下:

$$A_{mn} = \int_s \mathbf{t}_m(\mathbf{r}) ds \cdot \int_{s'} \left[\mathbf{j}_n(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot \mathbf{j}_n(\mathbf{r}') \nabla' \right] \frac{e^{jkR}}{R} ds', \quad (3)$$

其中 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, $k = 2\pi/\lambda$, λ 为波长, $\mathbf{t}_m(\mathbf{r})$ 为权函数, $\mathbf{j}_n(\mathbf{r}')$ 为电流基函数。

无论采用哪一种基函数、权函数, 当场点 \mathbf{r} 和源点 \mathbf{r}' 重合时, 此积分式都会出现低阶 $O(1/R)$ 和高阶 $O(1/R^2)$ 奇异性。Newman 在计算分段正弦基和线匹配法的自阻抗中, 采用了等效分离的思想^[2], 将含奇异性的自阻抗用与中心线电流间距很小 (远远小于波长) 的互阻抗代替。但这种处理降低了阻抗矩阵对角线元素的精确性, 从而直接影响到矩量法计算结果的精度和目标散射特性的正确性。另外, 在计算含奇异性的阻抗元素时, 如果直接使用高斯积分, 将无法得到准确的结果。本文在分析了奇异点对高斯积分的影响的基础上, 提出了一种在奇异点附近实现准确积分的方法。此方法将被积函数受奇异点影响而剧烈变化的部分划分在奇异点的一个邻域内。在此邻域内, 由于区域足够小, 因而被积函数中的某些项可

¹ 1998-05-25 收到, 1999-05-27 定稿
国家自然科学基金资助项目 (项目编号 69871004)

看作常量而不参与积分, 简化了被积函数, 使得积分式的低阶奇异项可用加减同阶奇异项的方法进行处理, 高阶奇异性部分可证明其积分在此区域内为零, 从而使积分变得数值可积。

2 在奇异点附近高斯积分的不准确性分析

对于一般的定积分 $\int_a^b f(x)dx$, 可以利用 $f(x)$ 的 $n+1$ 个基点 x_0, x_1, \dots, x_n 来构造插值多项式^[3]。高斯积分是选用 $[a, b]$ 上的 $n+1$ 次正交多项式的零点作为插值多项式的基点, 其积分结果实际上是其插值逼近函数的积分值。由于在 $[a, b]$ 上的积分总可以通过变量代换化为 $[-1, 1]$ 上的积分, 所以选用勒让德多项式的零点作为基点。于是

$$f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

其中 $l_i(x) = p_{n+1}(x)/[(x-x_i)p'_{n+1}(x_i)]$, p_n 为 n 阶勒让德多项式。

(4) 式即为原函数的插值逼近函数。我们可以通过分析该插值逼近函数的曲线, 来定性分析高斯积分在奇异点附近的准确性。为了便于分析, 且不失一般性, 我们在这里分析函数:

$$f(x) = 1/x. \quad (5)$$

在 $x=0$ 时, 函数 $f(x)$ 存在一阶奇异性。根据 (4) 式和 (5) 式, 可作出原函数的图形和取不同的高斯积分域以及不同高斯点个数的插值逼近函数的图形。

在以下各图中, N 代表高斯点个数。图 1 的高斯积分域为 $[-0.1, 0.1]$, 图 2 的高斯积分域为 $[-0.03, 0.1]$, 图 3 的高斯积分域为 $(0, 0.1]$, 图 4 的高斯积分域为 $[0.0025, 0.1]$ 。在图 3 和图 4 中, 由于远离奇异点的部分, 逼近函数和原函数的图形非常吻合, 为了便于观察, 我们分别只画出了 $[0, 0.02]$ 和 $[0, 0.03]$ 的部分。

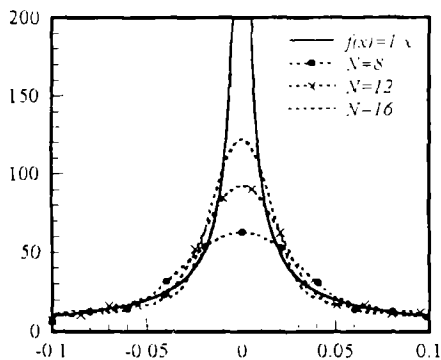


图 1 高斯积分域为 $[-0.1, 0.1]$

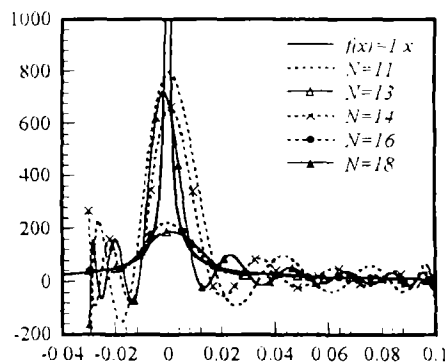


图 2 高斯积分域为 $[-0.03, 0.1]$

分析以上各图形可以发现: (1) 一般来说, 在积分域内高斯点取得越多, 插值逼近函数越逼近原函数, 因而其积分结果的准确性越高。(2) 如果奇异点位于高斯积分域内, 其插值逼近函数的图形与原函数的图形之间将存在较大的差异, 而且随着高斯点个数的不同, 各个逼近函数图形之间也存在较大的差异。特别是当奇异点不在积分域的中心时 (如图 2 所示), 高斯点越多, 插值逼近函数并不一定越逼近原函数, 也就是说, 插值逼近函数不一致, 这将使积分结果变得不稳定。因此, 我们在使用高斯积分时, 要绝对避免这种积分区域的出

现。(3) 如果奇异点位于高斯积分域的端点上(如图 3 所示), 那么奇异点对逼近函数的影响将会减小很多, 逼近函数图形与原函数图形之间只是在奇异点的一个很小的邻域内有较大差别, 但是它们是一致逼近原函数的, 因而其数值积分结果是稳定的。(4) 如果奇异点在高斯积分域之外(如图 4 所示), 即使奇异点与高斯积分域的端点靠得很近, 只要选取足够多的高斯点, 其插值逼近函数图形的逼近程度将非常理想, 因而其数值积分结果就能达到所要求的准确度。

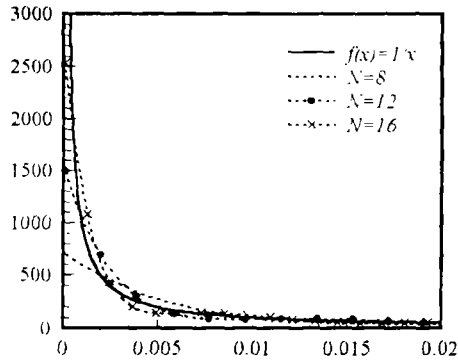


图 3 高斯积分域为 (0,0.1]

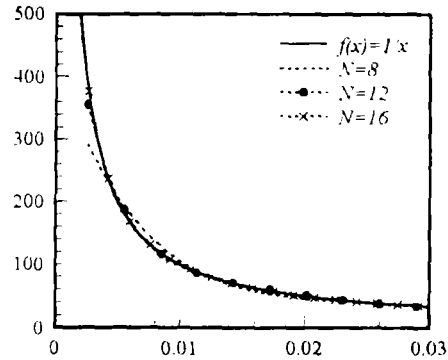


图 4 高斯积分域为 [0.0025,0.1]

3 在奇异点附近的准确积分方法

从上述分析可知, 在使用高斯积分时, 高斯积分域中绝对不能包含奇异点。对于多重积分来说, 其任何一个积分变量的高斯积分域中都不应该含有奇异点。为了得到有奇异性的被积函数的准确积分结果, 本文提出了“积分区域分割法”。此方法的具体过程如下: (1) 首先, 以奇异点为中心, 划出一个足够小的区域, 将它从整个积分域中分离出来。(2) 将除去小区域之外的无奇异点的积分区域再划分成若干个高斯子积分域。划分原则是: 使包含奇异点的小区域尽量位于这些子区域的角点上。然后分别在这些子区域上使用高斯积分。(3) 对于包含有奇异点的小区域来说, 由于区域足够小, 因而可以将无奇异性的变量项看作常量, 提到积分号外, 从而简化被积函数, 使得我们可以通过变量代换、加减同阶奇异项等方法, 求出该被积函数的解析积分表达式, 从而计算出被积函数在该小区域的积分值。(4) 将在各个子区域上得到的数值解和奇异点邻域上的解析解相加, 即可得到原函数在整个积分域内的准确积分结果。由此, 我们可以解决 (3) 式中出现的奇异性问题。(3) 式可写为

$$A_{mn} = \int_s t_m(\mathbf{r}) \cdot [I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r})] ds. \quad (6)$$

其中

$$I_1(\mathbf{r}) = \int_{s'} \mathbf{j}_n(\mathbf{r}') \frac{e^{jkR}}{R} ds', \quad (7)$$

$$I_2(\mathbf{r}) = \int_{s'} \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot \mathbf{j}_n(\mathbf{r}') \frac{(jkR - 1) e^{jkR}}{R^2} \frac{e^{jkR}}{R} \mathbf{R} ds', \quad (8)$$

\mathbf{r}' 为源点, \mathbf{r} 为场点, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $R = |\mathbf{R}|$ 。

在这里, 散射体表面用参数二次曲面拟合, 并采用“屋脊形”基函数、线匹配^[1]。这种基函数定义在两个相邻的单元上, 权函数定义在这两个相邻单元的中心连线上(如图 5 所示)。显然, 阻抗积分式的奇异性存在于这个中心连线上, 并且, 不仅自阻抗存在奇异性, 某些互阻抗也因积分域重合而存在奇异性, 这使得数值积分变得非常困难。对此, 可采用上述“积分区域分割法”进行处理。

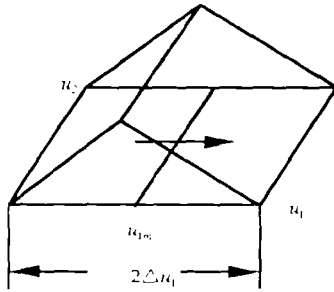


图 5 在参数空间的屋脊基函数和线匹配法图

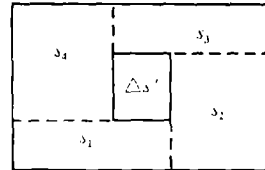


图 6 区域划分示意图

当 $R = 0$ 时 (7) 式和 (8) 式包含低阶和高阶奇异性。在参数二次曲面上, 采用图 6 所示的划分方式: 以 $R = 0$ 为中心将基函数的定义域 s' 划出一个矩形小区域 $\Delta s'$, 要求 $\Delta s' \ll s'$, 再以区域 $\Delta s'$ 为中心将剩下的区域分成四个小区域 s'_1, s'_2, s'_3, s'_4 。于是, 基函数的积分域 $s' = s'_1 + s'_2 + s'_3 + s'_4 + \Delta s'$ 。在区域 s'_1, s'_2, s'_3, s'_4 中, (6) 式无奇异性, 可直接使用高斯积分求解。由于 $\Delta s' \ll s'$, 所以在 $\Delta s'$ 上, 可以认为 $j_n(r')$ 和 $\nabla' \cdot j_n(r')$ 为一个定值, 我们选取奇异点 r_s 的值来替代它们, 即 $j_n(r') = j_n(r_s)$, $\nabla' \cdot j_n(r') = \nabla' \cdot j_n(r_s)$ 。此时 (7) 式和 (8) 式可重写为

$$I_{1\Delta s'} = j_n(r_s) \int_{\Delta s'} \frac{e^{jkR}}{R} ds' \quad (9)$$

$$I_{2\Delta s'} = \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot j_n(r_s) \int_{\Delta s'} \frac{(jkR - 1) e^{jkR}}{R^2} \frac{e^{jkR}}{R} \mathbf{R} ds' \quad (10)$$

对于 $I_{1\Delta s'}$ 有 $O(1/R)$ 的奇异性, 可采用文献 [1] 提到的加减同阶奇异项的方法进行处理, 即

$$\int \int_{\Delta s'} \frac{e^{jkR}}{R} ds' = \int \int_{\Delta s'} \left[\frac{e^{jkR}}{R} - \frac{1}{R_0} \right] ds' + \int \int_{\Delta s'} \frac{1}{R_0} ds', \quad (11)$$

其中 R_0 是场点 $r(u_1, u_2)$ 处的切平面上, 场点和源点 $r'(u'_1, u'_2)$ 的距离。其表达式如下:

$$R_0 = \sqrt{g_{11}(u'_1 - u_1)^2 + g_{22}(u'_2 - u_2)^2 + 2g_{12}(u'_1 - u_1)(u'_2 - u_2)} \quad (12)$$

由于 $\Delta s' \ll s'$, 所以 $R_0 \approx R$ 。于是, 当 $R \rightarrow 0$ 时, $e^{jkR}/R - 1/R_0$ 趋于 ik , (11) 式中的第一项数值可积, 而第二项有解析结果, 其积分表达式如下:

$$\int_{u_{21}}^{u_{22}} \int_{u_{11}}^{u_{12}} \frac{du'_1 du'_2}{R_0} = \left\{ \frac{(u'_1 - u_1)}{\sqrt{g_{22}}} \ln[R_0 + \sqrt{g_{22}}(u'_2 - u_2) + (u'_1 - u_1)g_{12}/\sqrt{g_{22}}] \right. \\ \left. + \frac{(u'_2 - u_2)}{\sqrt{g_{11}}} \ln[R_0 + \sqrt{g_{11}}(u'_1 - u_1) + (u'_2 - u_2)g_{12}/\sqrt{g_{11}}] \right\} \left| \begin{matrix} u'_1 = u_{12} \\ u'_1 = u_{11} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} u'_2 = u_{22} \\ u'_2 = u_{21} \end{matrix} \right| \quad (13)$$

其中 $g_{ij} = \partial r / \partial u_i \cdot \partial r / \partial u_j$, ($i, j = 1, 2$) 在参数几何中被称为第一类基本型^[4]。

我们注意到含有 $O(1/R^2)$ 奇异性的 (10) 式中被积函数 $[(jkR - 1)/R^2](e^{jkR}/R)\mathbf{R}$, 若积分区域关于 $R = 0$ 对称, 即对任意 \mathbf{R} 总是存在 $-\mathbf{R}$, 其积分结果为零。在这里, 由于 $\Delta S' \ll S'$, 可近似为一平面, 又因为 $\Delta s'$ 是以奇异点 ($R = 0$) 为中心, 所以在直角坐标系下, 积分区域 $\Delta s'$ 关于 $R = 0$ 近似对称, 于是有 $I_{2\Delta s'} \approx 0$ 。

4 数值实例及讨论

为了验证上述积分方法的准确性, 且不失一般性, 我们首先考查 (14) 式的数值结果和其解析结果。

$$F = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy. \quad (14)$$

在坐标原点 $x = 0$, $y = 0$ 处积分式存在奇异性, 其解析积分表达式为

$$F = y \ln |\sqrt{x^2 + y^2} + x| + x \ln |\sqrt{x^2 + y^2} + y| \Big|_{x=a_1}^{x=a_2} \Big|_{y=b_1}^{y=b_2}. \quad (15)$$

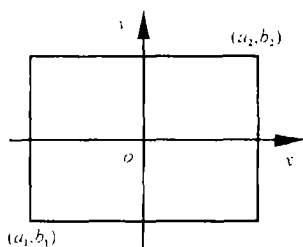


图 7 第一种划分方式

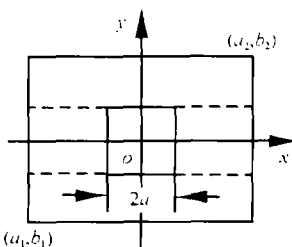


图 8 第二种划分方式

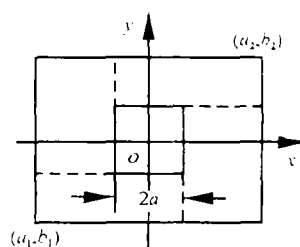


图 9 第三种划分方式

为了比较各种区域划分方式对积分结果的影响, 本文选择了三种划分方式 (如图 7、图 8、图 9 所示), 其中 a 满足 $a \ll \text{Min}(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$ 。表 1 是 $a = 10^{-3}$, $a_1 = -0.15$, $b_1 = -0.06$, $a_2 = 0.07$, $b_2 = 0.05$ 时, 分别用三种划分方式计算的结果, 解析解为 0.514816。表 2 是 $a_1 = -0.1$, $b_1 = -0.1$, $a_2 = 0.1$, $b_2 = 0.1$ 时, a 取不同数值, 用第三种划分方式计算的结果, 解析解为 0.705099。比较各数值可以发现, 采用第三种划分方式是可以得到准确积分结果的。

表 1

N	第 1 种方式	第 2 种方式	第 3 种方式
10	0.512567	0.501393	0.514924
11	0.512942	0.493155	0.514887
12	0.513230	0.566205	0.514844
13	0.513457	0.495035	0.514807
15	0.513785	0.519552	0.514766
16	0.513907	0.498935	0.514758
17	0.514008	0.534626	0.514756
19	0.514165	0.507132	0.514763

表 2

N	$a = 10^{-6}$	$a = 10^{-3}$	$a = 10^{-2}$
10	0.703506	0.705125	0.705069
11	0.703776	0.704937	0.705102
12	0.703983	0.704817	0.705107
13	0.704145	0.704767	0.705100
15	0.704379	0.704823	0.705098
17	0.704537	0.704964	0.705099
19	0.704648	0.705080	0.705099

运用上述的积分方法开发的计算机程序可计算任意三维矢量散射特性, 对于电大尺寸的目标只是计算量较大而已, 在此以角反射器和导电球为例。图 10 为两扇面对称的角形反射器的单站 RCS。入射波极化方向以及后向散射场点均在 yoz 平面内。 θ 为后向散射方向与 $+Z$ 方向的夹角。每一扇面边长 $H = \lambda$, $W = 0.5\lambda$, 两扇面间的夹角 $\alpha = 130^\circ$ 。图 11 中的实线为文献 [5] 中的测量结果。图 12 为 $ka = 0.4$ (a 为球半径) 的导电球的双站 RCS 结果。 Y 方向线极化平面波沿 $-Z$ 方向垂直入射到导电球上。图 13 中的实线是文献 [6] 用曲面三角贴片模拟的矩量法结果。观察图形可知, 本文计算的结果与文献结果是完全一致的。

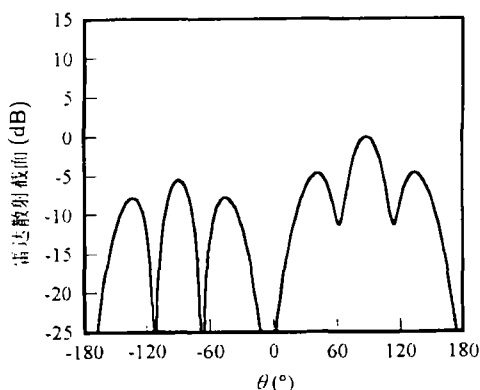


图 10 角反射器前后向的单站 RCS

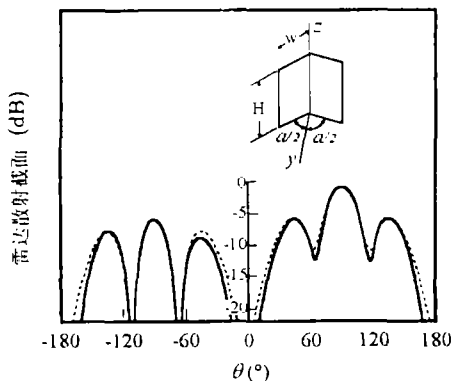


图 11 角反射器前后向单站 RCS:
图中实线为文献 [5] 的测量结果

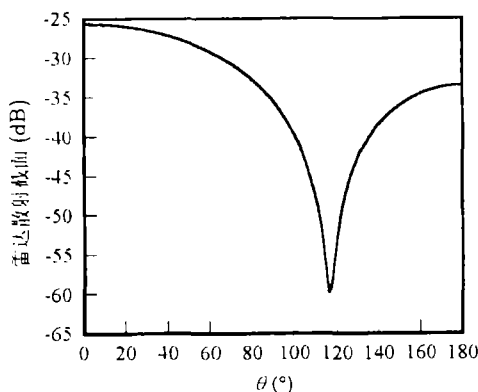


图 12 导电球 E 面的双站 RCS

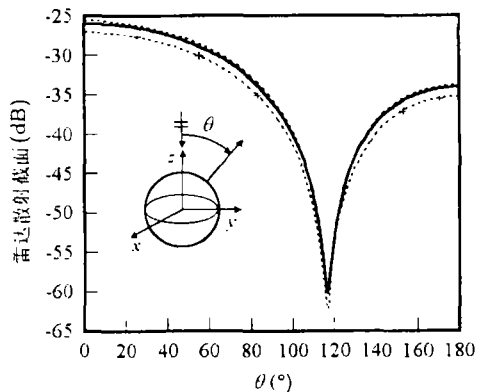


图 13 导电球 E 面双站 RCS:
图中实线为文献 [6] 的计算结果

5 结 论

在用矩量法或快速多极子法求解三维矢量散射问题时, 不可避免地要处理因场点和源点重合而带来的奇异性积分。而在“屋脊形”基函数和线匹配法中, 不光自阻抗存在奇异性问题, 在某些互阻抗计算中因积分区域重合也存在奇异性。对这些存在奇异性的积分式, 不能直接使用高斯积分。本文提出的“积分区域分割法”不仅思路简单, 而且准确性高。这种方法要求正确划分高斯积分区域, 并求出在奇异点邻域内的一个解析积分表达式。由于该邻

域远远小于原函数的定义域, 其积分式在很大程度上可以被简化, 因而其解析积分表达式的求解要比原函数简单、容易得多。用这种方法不但可以解决大部分的电磁场数值积分, 而且对一般的含奇异点的数值积分也是适用的。

参 考 文 献

- [1] Song J M, Chew W C. Moment method solutions using parametric geometry, *Journal of Electromagnetic Waves and Application*, 1995, 9 (1/2): 71-83.
- [2] Newman E H. Polygonal plate modeling, *Electromagnetics*, 1990, 10(1): 65-83.
- [3] 武汉大学, 山东大学计算数学教研室编. 计算方法. 北京: 高等教育出版, 1992: 170-173.
- [4] 梅向明, 黄敬之编. 微分几何. 北京: 人民教育出版社, 1981: 98-104.
- [5] Wang N N, Richmond J H, Gilreath M C. Sinusoidal reaction formulation for radiation and scattering from conducting surfaces. *IEEE Trans on AP*, 1975, AP-23(3): 376-382.
- [6] Deng S H, Chew W C, *et al.* Solving some surface integral equation by using MOM with curved triangular patches. Digest of the 1997 URSI Radio Science Meeting, Atlanta: 1997, 1818-1821.

THE ACCURATE INTEGRATION METHOD OF SINGULARITY INTEGRATION FOR THREE DIMENSIONAL VECTOR FIELD SCATTERING

Yao Haiying Nie Zaiping

(*Department of Microwave-Engineering, UEST, Chengdu 610054*)

Abstract When three dimensional vector scattering is analyzed by integral equation and the moment method(MM) or the fast multipole method(FMM), the singular integrand will be done. If it is calculated by Gaussian integration directly, the accuracy will be very poor. In order to get an accurate result, this paper provides a method of integral domain division, which divides the integral domain into several parts with one of them containing the singularity. In the singular part, an analytic result can be derived by simplifying the integral function, replacing the variables, or adding and subtracing a singular term. The other parts can be calculated by Gaussian integration directly. Numerical results for RCS of a corner-reflector antenna and a conducting sphere calculated by this method are in reasonable agreement with that in the references.

Key words Gaussian integration, Singularity, Method of integral domain division

姚海英: 女, 1974年生, 博士, 主要研究方向为复杂目标的电磁散射与辐射, 非均匀介质中的场与波。
聂在平: 男, 1946年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为非均匀介质中的场与波, 电磁散射与逆散射, 天线理论, 计算电磁学等, 在国内外先后发表学术论文 140 余篇。