

具有近似线性相位特性的多相波数字滤波器的设计*

程海 江锡仁** 刘小坚

(鲁尔大学, 西德)

摘要 不考虑相位失真, 而要求满足比较苛刻的振幅特性的时候, 和 FIR 滤波器比较起来, 采用 IIR 滤波器, 计算量要小很多。但对某些 IIR 滤波器, 采取适当的方法, 也可以使其相位失真变得很小。本文提出一种新的设计方法, 用来设计振幅响应完全满足设计要求, 而相位特性用 Chebyshev 近似来实现的多相波数字滤波器。这种方法的关键在于确定通带中的若干衰减零点。文中对需要得最小衰减零点数作了估计。实例表明, 用这种方法设计的滤波器, 时延小, 相位特性非常接近线性。

关键词 数字滤波器; 波数字滤波器; 多相波数字滤波器

一、引言

已有不少文献^[1-3]讨论过具有准确的振幅响应和近似线性相位特性的 IIR 滤波器的设计问题, 但主要集中在那种仅由一个延时单元和一个全通滤波器组成的滤波器方面。文献[1]中指出, 在通带内具有近似线性相位特性的递归数字滤波器, 可以按适用于采样率变化的多相网络来设计。得到的 IIR 滤波器的性能比 FIR 滤波器好。这种方法的缺点是滤波器的系数, 其个数会因滤波器的分支数增加而大大增加, 其值用优化的方法求解时, 计算时间很长, 而且还得不到总体上的最佳值; 所得到的滤波器中, 即使使用小舍入噪声结构^[4], 其极限环仍不能被完全抑止。

借助于文献[5]中讨论的结果, 本文提出一种新的设计方法。对于因果多相波数字滤波器, 按照这种方法, 只要优化其通带中的衰减零点, 就能得到近似线性相位特性。由于整个衰减特性的优化过程只涉及到作为独立变量的若干衰减为零的频率点, 从而避免了直接优化为数众多的滤波器系数的繁复过程。为了求得这些最佳频率点, 可以使用一种有效的 Remez 交换算法, 得到等波纹解。因为以衰减零点作为优化参数, 而这种零点通常只有几个, 所以优化过程收敛很快。一旦确定了这些衰减零点的频率值, 滤波器系数便可由联立解非线性相位方程组来求得, 而该方程组的建立条件就是使通带内相位特性近似线性。

由于波数字滤波器具有稳定性好、对系数变化的灵敏度低以及动态范围大等优点^[6-9], 所以, 设计的滤波器用波数字滤波器来实现, 不会存在或者很容易消除寄生振

* 1988年6月22日收到, 同年12月修改定稿。

** 中国科学院空间物理所

荡^[7-8]。

二、非线性相位方程组的建立

所谓滤波器组,通常是以一个原型低通滤波器为基础,利用移相的方法组成的一个多相网络^[10]。所以,这里只讨论如何设计这种低通滤波器的问题。多相低通滤波器的传输函数一般可以写成

$$H(z) = \frac{1}{L} \left[z^{-k} + \sum_{\rho=1}^{L-1} H_{\rho}(z^L) \cdot z^{-\rho+1} \right] \quad (1)$$

的形式。式中, k 是正整数, L 是分支数, $H_{\rho}(z^L)$ 是全通节。可以将(1)式改写成

$$H(z) = \frac{1}{L} \cdot z^{-k} \cdot U(z) \quad (2)$$

式中

$$U(z) = 1 + \sum_{\rho=1}^{L-1} H_{\rho}(z^L) \cdot z^{-\rho+k+1} \quad (3)$$

由(1)式很容易看到,多相网络的第一个分支只是一个单纯的时延。当所有全通节的相位逼近于第一支路的线性相位响应时,(1)式所表示的滤波器通带内的相位响应就近似线性。但 $H(z)$ 的相位特性由 $U(z)$ 来确定,所以,只需讨论 $U(z)$ 的相位响应就可以了。

令 $z = L \cdot M_{\rho} + L - 1$,由(3)式有

$$U(z) = 1 + \sum_{\rho=1}^{L-1} z^{-\rho+L} [z^{LM_{\rho}} \cdot H_{\rho}(z^L)] \quad (4)$$

如果 $H_{\rho}(z^L)$ 是在 z^L -平面上具有 M 个极点的全通节,为使信号时延非常小, M_{ρ} 的取值最好是不超过 $M/2$ 的最大整数^[1,11]。 $H_{\rho}(z^L)$ 是一个因果而且稳定的全通节,通常假定具有

$$H_{\rho}(z^L) = \prod_{i=1}^{M_1} \frac{A_{\rho_i} z^L + 1}{z^L + A_{\rho_i}} \cdot \prod_{j=1}^{M_2} \frac{B_{\rho_j} z^{2L} + C_{\rho_j} z^L + 1}{z^{2L} + C_{\rho_j} z^L + B_{\rho_j}} \quad (5)$$

的形式。其中, $M = M_1 + 2M_2, \rho = 1, 2, \dots, L - 1$ 。为了便于用波数字滤波器来实现这类全通节,用变量 ϕ_L 来表示 $H_{\rho}(z^L)$,

$$\begin{aligned} H_{\rho}(z^L) &= H_{\rho} \left(\frac{1 + \phi_L}{1 - \phi_L} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{M_1} \frac{a_{\rho_i} - \phi_L}{a_{\rho_i} + \phi_L} \cdot \prod_{j=1}^{M_2} \frac{\phi_L^2 - b_{\rho_j} \phi_L + c_{\rho_j}}{\phi_L^2 + b_{\rho_j} \phi_L + c_{\rho_j}} \\ &= \exp[-j\beta_{\rho}(\omega)] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{式中, } \phi_L = \frac{z^L - 1}{z^L + 1} = \text{th} \left(\frac{L \cdot pT}{2} \right) \quad (7a)$$

取实频率, 即当 $p = j\omega$ 时,

$$\phi_L = j\phi_L = j \tan\left(\frac{L\omega T}{2}\right) \quad (7b)$$

相位函数 $\beta_\rho(\omega)$ 可写成

$$\beta_\rho(\omega) = 2 \left\{ \sum_{i=1}^{M_1} \arctan[\phi_L(\omega)/a_{\rho_i}] + \sum_{j=1}^{M_2} \arctan\left[\frac{b_{\rho_j}\phi_L(\omega)}{c_{\rho_j} - \phi_L^2(\omega)}\right] \right\} \quad (8)$$

滤波器参数 $a_{\rho_i} (i = 1, 2, \dots, M_1), b_{\rho_j}, c_{\rho_j} (j = 1, 2, \dots, M_2) (\rho = 1, 2, \dots, L-1)$ 可以迭代求解下列方程组求得:

$$\begin{cases} -\beta_\rho(\omega_1) + (\rho + L \cdot M_\rho) \cdot \omega_1 T = 0 \\ -\beta_\rho(\omega_2) + (\rho + L \cdot M_\rho) \cdot \omega_2 T = 0 \\ \vdots \\ -\beta_\rho(\omega_M) + (\rho + L \cdot M_\rho) \cdot \omega_M T = 0 \end{cases} \quad (9)$$

式中, $\omega_i (i = 1, 2, \dots, M)$ 是 $H(z)$ 在通带内的衰减零点, $T = 1/F$, F 为采样率。

三、确定最佳衰减零点

当滤波器的分支数 $L > 2$ 时, 也同样可以用 Remez 交换算法求最佳衰减零点。计算量主要取决于分支数 L , 当 L 增加时, 计算量会变得很大。文献[5]指出, 当 $L > 2$, 且用 Chebyshev 近似来满足滤波器的振幅特性时, 若令

$$L \cdot \frac{f_{s,L}}{F} = 2 \cdot \frac{f_{s,2}}{F} \quad (10)$$

则所求的最佳衰减零点的频率值 $f_{0,i,L}$ 可以用下面的公式

$$f_{0,i,L} = \frac{2}{L} \cdot f_{0,i,2}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (11)$$

来计算。式中, $f_{s,L}, f_{s,2}$ 是阻带的下边沿频率, $f_{0,i,2} (i = 1, 2, \dots, M)$ 是一个特殊情况的最佳衰减零点的频率值, 即当 $L = 2$, 且滤波器具有双互易特征函数的情况。这样, 求 $f_{0,i,L}$ 的问题便简化为求 $f_{0,i,2}$ 。而求 $f_{0,i,2}$, 则比较容易。应当指出, (10) 式是近似的, 但误差甚小; $f_{0,i,2}$ 的求法是先试解方程组(9), 然后用 Remez 算法进行优化, 不能直接采用文献[5]引用的公式。

四、滤波器的设计及举例

在设计多相滤波器时, 很重要的一点是估计 M 值, 即满足相位特性波纹指标条件的最小衰减零点个数。计算 M 值的解析方法至今还未找到。我们提出以下经验公式来估算 M 。

$$M \geq M_{\min} = 9.5n_{\min} \quad (12)$$

式中, n_{\min} 借助适用于双互易情况的近似方法^[12]间接求得:

$$n_{\min} = \ln \varepsilon_s / \ln (5Lk_4) \quad (13)$$

式中,

$$k_0 = \tan\left(\frac{L\pi f_s}{2F}\right) \quad (14a)$$

$$k_{i+1} = k_i^2 + \sqrt{k_i^4 - 1} \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (14b)$$

$$\varepsilon_s = \sqrt{10^{a_s/10} - 1} \quad (15)$$

式中, f_s 是滤波器阻带的边沿频率。 a_s 是阻带中给定的最小衰减, 单位是 dB。 不过, 当过渡带太窄时, (12) 式的偏差会加大。

下面给出两个多相波数字滤波器的设计实例。

例 1 低通滤波器, 其设计指标为: $L = 2, F = 3.2\text{kHz}$ 。 通带: $0-0.46\text{kHz}$ 。 阻带: $1.14-1.6\text{kHz}$ 。 $a_s \geq 60\text{dB}$ 。

设计步骤 利用(10)–(15)式计算得到下列设计参数:

$$\varepsilon_s = \sqrt{10^6 - 1}, k_0 = \tan(1.14\pi/3.2) = 2.0617, k_4 = 3.1181158 \cdot 10^9, M = 3 \geq M_{\min} = 2.716.$$

最佳衰减零点的频率值为:

$$f_{0,1,2} = 0.1917913\text{kHz}, f_{0,2,2} = 0.354134585\text{kHz}, f_{0,3,2} = 0.44760613\text{kHz}.$$

得到的传输函数为:

$$H(z) = 0.5 \cdot z^{-5} \cdot U(z) \quad (16a)$$

$$U(z) = 1 + z^5 \frac{(a - \phi_2)(\phi_2^2 - b\phi_2 + c)}{(a + \phi_2)(\phi_2^2 + b\phi_2 + c)} \quad (16b)$$

式中, $a = 4.1152193, b = 1.669311977, c = 0.741403768$ 。 相应的波数字滤波器的系数是^[6,12]: $\gamma_1 = -0.609009921, \gamma_2 = -0.021136851, \gamma_3 = 0.14849872$ 。

所得波数字滤波器的框图示于图 1。 这个滤波器的振幅响应示于图 2, $U(z)$ 的相位响应

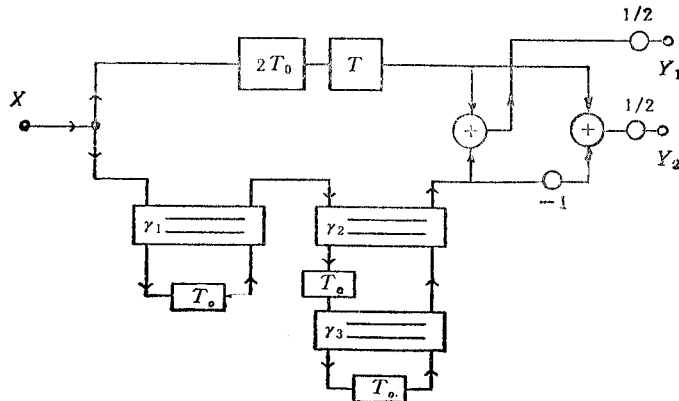


图 1 一个多相波数字滤波器的框图($L = 2, T_0 = 2T$)

示于图 3。阻带中最小衰减为 63.5dB, 通带中最大衰减仅为 2×10^{-6} dB。通带中相移近似为 0, 其最大偏移为 6.7×10^{-4} rad。应该指出的是, 只多用了—个加法器, 便得到了互

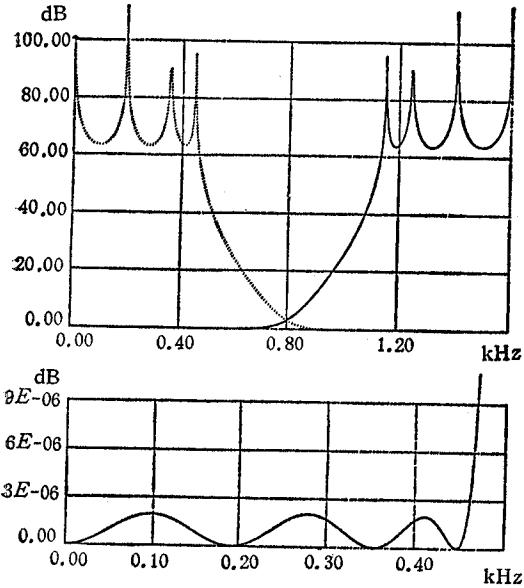


图 2 图 1 所示滤波器的衰减特性
(Y_1 为——, Y_2 为……)

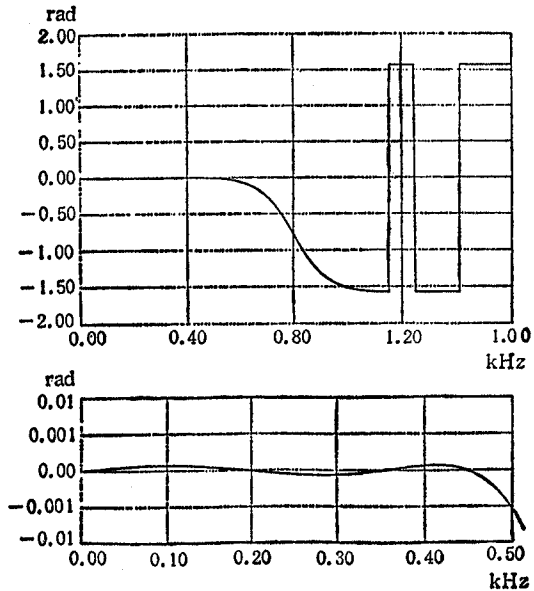


图 3 (16b)式表示的 $U(z)$ 的相位特性

补的两个传输函数, 即实现了分支滤波器。这对于仅在通带内(低通或高通)要求近似线性相位的应用场合是很有意义的。

例 2 设计指标为: $L = 6, F = 576\text{kHz}$ 。通带: $0-24\text{kHz}$ 。阻带: $72-120\text{kHz}, 168-216\text{kHz}, 264-288\text{kHz}$ 。 $a_s \geq 70\text{dB}$ 。

设计步骤 利用(10)–(15)式求得:

$$\epsilon_s = \sqrt{10^7 - 1}, k_0 = \tan(72\pi/192) = 2.414213562, k_1 = 1.3940479 \cdot 10^{10}, M = 3 \geq M_{\min} = 2.98.$$

最佳衰减零点的频率值为:

$$f_{0,1,6} = 9.982092\text{kHz}, f_{0,2,6} = 18.402936\text{kHz}, f_{0,3,6} = 23.342869\text{kHz}.$$

传输函数为:

$$H(z) = \frac{1}{6} z^{-17} \cdot U(z) \tag{17a}$$

$$U(z) = 1 + \sum_{\rho=1}^5 z^{12} \frac{(a_\rho - \phi_\rho)(\phi_\rho^2 - b_\rho \phi_\rho + c_\rho)}{(a_\rho + \phi_\rho)(\phi_\rho^2 + b_\rho \phi_\rho + c_\rho)} \cdot z^{6-\rho} \tag{17b}$$

式中,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1.8938279, & b_1 &= 1.653794, & c_1 &= 0.7180205 \\ a_2 &= 2.669032, & b_2 &= 1.656567, & c_2 &= 0.7235108 \end{aligned}$$

$$a_3 = 3.8539278, \quad b_3 = 1.70455, \quad c_3 = 0.761435$$

$$a_4 = 6.1373311, \quad b_4 = 1.780052, \quad c_4 = 0.820607$$

$$a_5 = 12.872509, \quad b_5 = 1.8785789, \quad c_5 = 0.899504$$

相应的多相波数字滤波器的系数值为

$$\gamma_{11} = -0.308873908, \quad \gamma_{12} = -0.019053477, \quad \gamma_{13} = 0.164130399$$

$$\gamma_{21} = -0.454897712, \quad \gamma_{22} = -0.019805359, \quad \gamma_{23} = 0.160422021$$

$$\gamma_{31} = -0.587962563, \quad \gamma_{32} = -0.016412343, \quad \gamma_{33} = 0.13543736$$

$$\gamma_{41} = -0.719783213, \quad \gamma_{42} = -0.015594254, \quad \gamma_{43} = 0.098534306$$

$$\gamma_{51} = -0.855829982, \quad \gamma_{52} = -0.005538612, \quad \gamma_{53} = 0.052906298$$

图 4 给出了这个多相波数字滤波器的结构框图。其振幅及 $U(\omega)$ 的相位响应分别示于

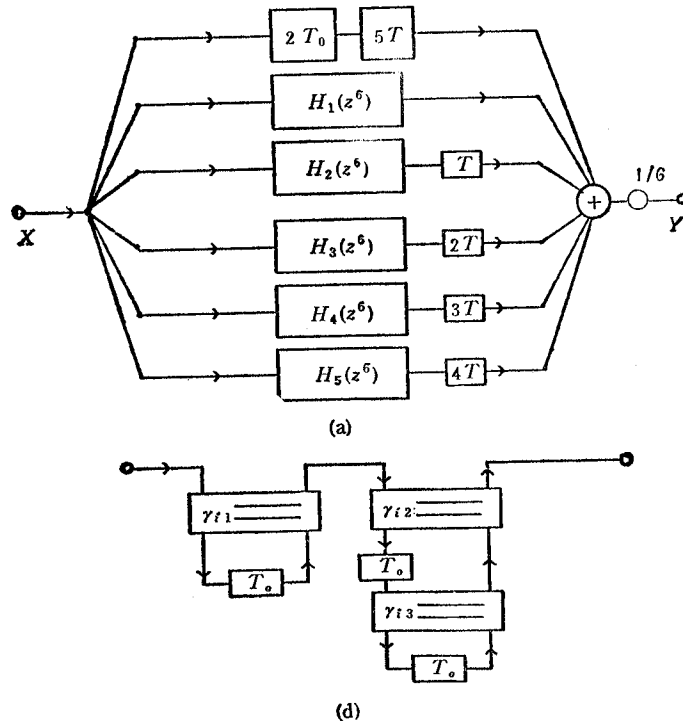


图 4 (a) 一个多相波数字滤波器的框图 ($L = 6, T_0 = 6T$) (b) $H_i(z^6)$ 的框图 $i = 1, 2, \dots, 5$

图 5 和图 6。阻带中最小衰减为 78.4dB, 优于设计指标 8.4dB, 通带中最大衰减小于 10^{-6} dB。通带中最大相位偏移为 2.9×10^{-4} rad。

另外, 例 1 和例 2 波数字滤波器中的双端口连接器, 采用的是图 7 所示的结构。实践表明, 当乘法器系数 $|\gamma| > 0.5$ 时, 容易产生溢出。这时, 可以利用连接器的等效变换, 以避免溢出的产生, 并可进一步改善滤波器的动态范围以及抑止可能产生的零输入极限环^[12-13]。

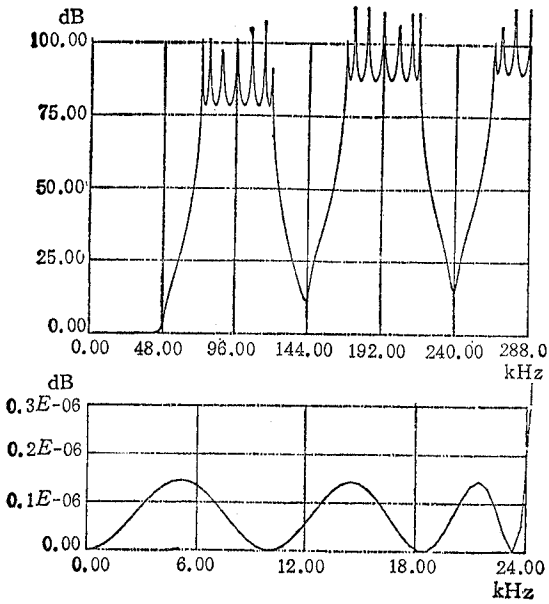


图5 图4所示滤波器的衰减特性

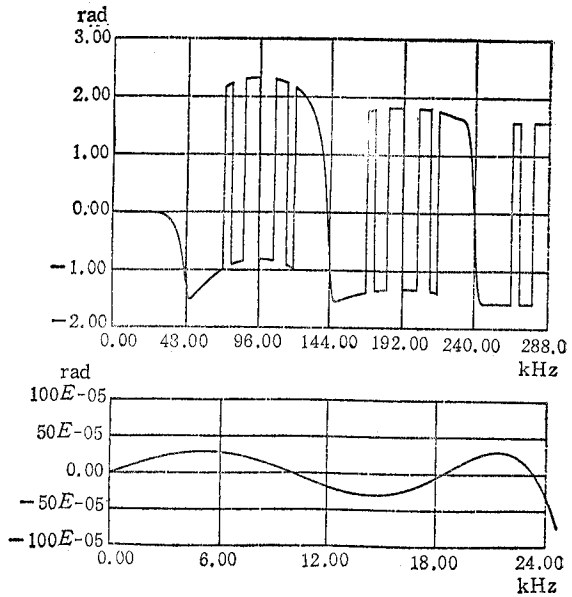


图6 (17b)式表示的 $U(z)$ 的相位特性

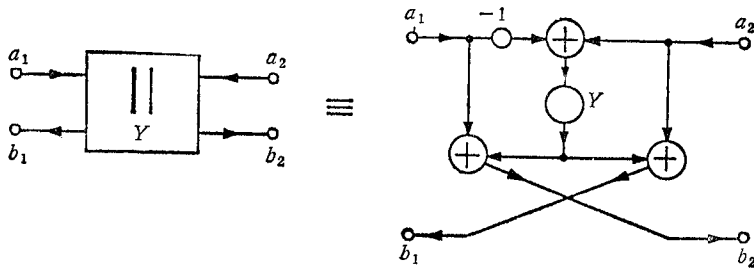


图7 双端口连接器及其信号流图

五、结 论

本文提出的设计多相数字低通滤波器的方法,使所得滤波器的通带内具有近似线性的相位响应。设计过程中作为独立变量的只是几个衰减零点的频率值,所以计算比其他直接设计方法要简便。文中给出的实例表明,利用(12)式估算最小衰减零点个数,可以得到满意的结果。本文提出的这种方法,对于设计相位均衡器以及信号处理的其他领域^[1,14,15]也是很有实际意义的。这个方法的推广研究正在进行之中。

在工作中,A. Fettweis 教授曾和作者进行过有益的讨论,对作者很有启发,特此向他表示感谢。

参 考 文 献

[1] R. Ansari, B. Liu, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-31**(1983)6, 1366—1373.
 [2] M. Renters, T. Saramäki, A Class of Approximately Linear Phase Digital Filters Composed of Allsubfil-

- ters, Proc. of IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, California, May 1986, pp. 678—861.
- [3] C. W. Kim, R. Ansari, Approximately Linear Phase IIR Filters Using Allpass Sections, Proc. of IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, California, May 1986, pp. 661—664.
- [4] R. Ansari, B. Liu, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-33**(1985)1, 90—97.
- [5] W. Drews, Entwurf and Aufbau Digitaler Polyphasenfilterbänke unter Verwendung von Wellendigitalfiltern, Dissertation, Ruhr-University Bochum, West Germany, 1986.
- [6] A. Fettweis, *Proc. IEEE*, **74**(1986)2, 270—327.
- [7] A. Fettweis, *IEEE Trans. on CT*, **CT-19**(1972)11, 668—673.
- [8] A. Fettweis, K. Meerköter, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-22**(1975)3, 239—246; **CAS-22**(1975)6, 575.
- [9] H. Cheng, Untersuchungen von Instabilitäten in Digitalfiltern, die unter Schleifenbedingungen eingesetzt sind, Diplomarbeit, Ruhr-University Bochum, West Germany, 1987.
- [10] M. C. Bellanger, G. Bonnerot, M. Coudreuse, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-24**(1976)4, 109—114.
- [11] L. R. Rabiner, B. Gold, Theory and Application of Digital Signal Processing, Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall, 1975.
- [12] L. Gazsi, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-32**(1985)1, 68—88.
- [13] X. R. Jiang, On Improving Dynamic Range of Wave Digital Filters, Proc. of ECCTD-87, Paris, Sept. 1987, pp. 363—368.
- [14] H. W. Schüssler, J. Weith, On the Design of Recursive Hilbert-Transformers, Proc. IEEE, ICASSP 87 (TEXAS), pp. 876—879.
- [15] K. P. Estola, T. Saramäki, High Performance FIR Filters without Multipliers for ECG Signal Processing, Proc. of IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, Montreal, Canada, May 1984, pp. 1462—1465.

DESIGN OF POLYPHASE WAVE DIGITAL FILTERS WITH APPROXIMATELY LINEAR PHASE

Cheng Hai Jiang Xiren* Liu Xiaojian

(Ruhr-University Bochum, West Germany)

Abstract It is well known that IIR filters require very few computations, compared with FIR filters, in order to meet stringent magnitude specifications when the phase distortion can be tolerated. An approximately linear phase, however, can be also obtained with the IIR filter by making use of a technique without increasing complexity. Based on a certain number of attenuation zeros in the pass band, a new approach is developed for the design of polyphase wave digital filters with exact magnitude responses and Chebyshev approximation of the desired phase responses. The minimum number of attenuation zeros is estimated, and two examples are given.

Key words Digital filter; Wave digital filter; Polyphase wave digital filter

* This author is with Institute of Space Physics, Academia Sinica.