

## 基于二进小波变换的信号去噪<sup>1</sup>

张宗平 刘贵忠 董恩清

(西安交通大学电信学院信息与通信工程系 西安 710049)

**摘 要** 由于信号在二进小波变换空间的表示是冗余的,同小波级数相比,基于二进小波变换的信号重建效果对信号的小波变换系数的误差灵敏度将会下降,因此可以期望在相同的误判概率下基于二进小波变换的去噪效果将优于基于小波级数变换的去噪效果。基于这个思想,该文将已有的基于小波级数的去噪方法推广到基于二进小波变换去噪上去,比较了基于二进小波去噪同基于小波级数去噪的效果。数值实验表明,对于各种检验信号,较之小波级数去噪,二进小波变换去噪效果有明显改善。

**关键词** 小波去噪,二进小波去噪,非参数回归

**中图分类号** TN911.4, O177.6

### 1 引 言

设  $y = [y_1, y_2, \dots, y_N]$  为一带有噪声观测序列,它可描述为下述模型:

$$y_i = f(t_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

其中  $\varepsilon_i$  是期望值为 0, 方差为  $\sigma^2$  的独立同分布的正态随机噪声。去噪就是要对  $y$  进行噪声剔除, 恢复未知信号  $f(t_i)$ 。

函数的小波分析方法类似于广义 Fourier 展开方法,但不同的是小波可将函数分解为分级局部震荡的成分,特别利于回归噪声的剔除,因此近年发展起来的基于小波变换非参数回归去噪方法,已被广泛应用于工程实践。Donoho 和 Johnstone<sup>[1]</sup> 证明了在许多函数空间内(例如 Besov 空间和 Triebel 空间),基于小波变换的非参数回归方法对未知函数  $f(t_i)$  的恢复效果优于其它非参数回归方法处理的结果,例如样条平滑方法、核估计方法及广义 Fourier 级数展开方法等等。Donoho 和 Johnstone<sup>[2]</sup> 同时又指出,影响小波级数去噪的关键是噪声门限的选取,因此已有基于小波变换的非参数回归或小波级数去噪的文献绝大多数是把噪声门限的选取作为其研究重点。

对小波级数去噪,由于信号重建效果对于单个小波系数依赖性很强,使得实际小波门限的选取变得很困难。困难是缘于在正交小波级数变换域内,信号的表达不存在冗余。与此相反,信号在二进小波变换域内,其表达非常冗余。因此不难想象,在相同的误判概率下,基于二进小波变换的去噪可改进信号的重建效果。鉴于此,本文从研究噪声在小波级数域和二进小波变换域的相关特性入手,提出一种将已有小波级数去噪方法推广到二进小波域的去噪方案,最后用数值实验来验证我们的构想和去噪方案的可行性。

### 2 二进小波变换及其快速算法<sup>[3-5]</sup>

设  $\psi(x)$  为一母小波,即满足  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$ , 则  $L^2(R)$  上的二进小波变换定义为

$$W_{2^j} f(x) = f * \psi_{2^j}(x) = \int f(t)\psi_{2^j}(x-t)dt \quad (2)$$

<sup>1</sup> 1999-11-30 收到, 2000-09-14 定稿

国家自然科学基金 (No.69872030)、国家教育部优秀青年教师基金 (1997 年度) 和陕西省自然科学基金 (No.98X08) 资助课题

式中  $\psi_{2^j}(x) = 2^{-j}\psi(2^{-j}x)$ ，若它的 Fourier 变换  $\hat{\psi}(2^j\omega)$  满足条件：存在两个大于 0 的常数  $A$  和  $B$ ，使得式  $A \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(2^j\omega)|^2 \leq B, \forall \omega \in R$  成立，则对函数  $f(x) \in L^2(R)$ ，在其连续点处有

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} W_{2^j} f * \chi_{2^j}(x) = f * \varphi(x) + \sum_{j=-\infty}^0 W_{2^j} f * \chi_{2^j}(x) \tag{3}$$

式中  $\chi(x)$  是重构小波， $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(2^j\omega)\hat{\chi}(2^j\omega) = 1$ ， $\varphi(x)$  是尺度函数， $|\hat{\varphi}(\omega)|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \hat{\psi}(2^j\omega)\hat{\chi}(2^j\omega)$ 。(3) 式的第一项是  $f(x)$  在粗尺度上的逼近，第二项的各分量是在各个细尺度上的细节，因此二进小波变换具有多分辨结构。

二进小波变换的重构条件要比小波级数重构条件弱，对相同的分析小波  $\psi(x)$ ，其重构小波  $\chi(x)$  以及相应尺度函数  $\varphi(x)$  并不唯一。Mallat<sup>[4]</sup> 构造了一类可快速实现的离散二进小波变换，这类离散二进小波变换具有与离散小波变换的相同算法结构，所不同的是变换的滤波器是通过离散小波变换滤波器进行内插入若干个“0”得到的，下面是这类离散二进小波分解和重构算法。

<pre> 二进制小波的快速分解算法 j = 0 while(j &lt; J)     W<sub>2<sup>j</sup>+1</sub><sup>d</sup> f = S<sub>2<sup>j</sup></sub><sup>d</sup> f * H<sub>j</sub>     S<sub>2<sup>j</sup>+1</sub><sup>d</sup> f = S<sub>2<sup>j</sup></sub><sup>d</sup> f * L<sub>j</sub> end of while </pre>	<pre> 二进制小波的快速重构算法 j = J while(j &gt; 0)     S<sub>2<sup>j</sup>-1</sub><sup>d</sup> f = S<sub>2<sup>j</sup></sub><sup>d</sup> f * <math>\tilde{L}_{j-1}</math> + W<sub>2<sup>j</sup></sub><sup>d</sup> f * <math>\tilde{H}_{j-1}</math> end of while </pre>
--	--

式中  $S_1^d f(x_i)$  为离散采样， $H_j = H \uparrow^{2^j}$ ， $L_j = L \uparrow^{2^j}$ ， $\tilde{H}_j = \tilde{H} \uparrow^{2^j}$ ， $\tilde{L}_j = \tilde{L} \uparrow^{2^j}$ 。

同小波变换相比，二进小波在每次分解的时候并没有进行下抽样，因此信号在二进小波域中的表达是极其冗余的，部分系数扰动不会带来重构信号的严重失真。

### 3 噪声的小波变换特性

**引理 1** 设  $V_0 = \overline{\text{span}\{\varphi(x-i)|i \in Z\}}$  是一个 Hilbert 子空间， $\{\varphi(x-i)|i \in Z\}$  是  $V_0$  规范正交基，且满足

$$\sum_i |\varphi(x-i)|^2 < +\infty \tag{4}$$

则  $V_0$  存在再生核，且  $V_0$  的再生核为

$$K(x, x') = \sum_i \varphi(x-i)\varphi(x'-i) \tag{5}$$

**证明** 根据文献 [6] 的定理 1.2 知， $V_0$  空间存在再生核的充要条件是  $\forall x \in R$  定义在  $V_0$  上的线性泛函  $f_x(u) \equiv u(x)$ ， $u(x) \in V_0$  是有界的。由于  $u(x) \in V_0$ ，因此  $u(x) = \sum_i c_i \varphi(x-i)$ ，式中  $c_i \in l^2$ ，于是

$$u(x) = \sum_{i \in Z} c_i \varphi(x-i) \leq \left[ \sum_i |c_i|^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_i |\varphi(x-i)|^2 \right]^{1/2}$$

因此

$$f_x(u) \leq \|u\|_2 \left[ \sum_i |\varphi(x-i)|^2 \right]^{1/2} < \infty \quad (6)$$

由 (6) 式可见定义在  $V_0$  上的线性泛函  $f_x(u) \equiv u(x)$ ,  $u(x) \in V_0$  有界, 因此  $V_0$  存在再生核.

又  $\{\varphi(x-i)|i \in Z\}$  是  $V_0$  规范正交基, 根据文献 [6] 的定理 1.8 可知  $V_0$  的再生核为

$$K(x, x') = \sum_i \varphi(x-i)\varphi(x'-i) \quad \text{证毕}$$

若引理中的  $\varphi(x)$  是小波分析母函数  $\psi(x)$  的尺度函数, 一般要求尺度函数  $\varphi(x)$  应具有紧支撑性或迅速衰减特性, 因此对于每个给定的  $x$ , (4) 式的求和是存在的, (4) 式条件是满足的. 对于可数值实现的小波变换, 可认为条件 (4) 式是一定满足的.

**定理 1** 设  $(\varepsilon_i)_{j=1}^N$  是期望为 0, 方差为  $\sigma^2$  的独立同分布的正态白噪声序列, 通过下式生成随机过程

$$\varepsilon(t) = \sum_{i \in Z} \tilde{\varepsilon}_i \varphi(t-i) \quad (7)$$

式中  $\{\varphi(t-i)|i \in Z\}$  是正交基,  $(\tilde{\varepsilon}_i)_{i \in Z}$  是  $(\varepsilon_i)_{j=1}^N$  的周期延拓序列. 则  $\varepsilon(t)$  的正交小波级数变换序列  $\hat{\varepsilon}_{j,k}$  是期望为 0, 互相关  $E\hat{\varepsilon}_{j,k}\hat{\varepsilon}_{j,k+m}$  为下式的广义平稳随机过程.

$$E\hat{\varepsilon}_{j,k}\hat{\varepsilon}_{j,k+m} = \sigma^2 \sum_n \int \psi(t)\psi(t-(m+nN/2^j))dt \quad (8)$$

式中  $\psi(x)$  是正交小波变换的母小波.

**证明** 由 (7) 式可导出  $\varepsilon(t)$  的第  $j$  级正交小波变换:

$$\hat{\varepsilon}_{j,k} = \int \varepsilon(t)\psi_{j,k}(t)dt = \sum_l \tilde{\varepsilon}_l \int \phi(t-l)\psi_{j,k}(t)dt \equiv \sum_l \tilde{\varepsilon}_l \int \varphi_{0,l}(t)\psi_{j,k}(t)dt$$

$\varepsilon(t)$  的  $j$  级小波变换的数学期望为

$$E\hat{\varepsilon}_{j,k} = \sum_l E\tilde{\varepsilon}_l \int \varphi_{0,l}(t)\psi_{j,k}(t)dt = 0$$

$\varepsilon(t)$  的  $j$  级小波变换的互相关函数为

$$\begin{aligned} E\hat{\varepsilon}_{j,k}\hat{\varepsilon}_{j,k+m} &= \sum_{l_2} \sum_{l_1} E\tilde{\varepsilon}_{l_1}\tilde{\varepsilon}_{l_2} \int \varphi_{0,l_1}(t_1)\psi_{j,k}(t_1)dt_1 \int \varphi_{0,l_2}(t_2)\psi_{j,k+m}(t_2)dt_2 \\ &= \sigma^2 \sum_{l_2} \sum_{l_1} \sum_n \delta(l_1 - l_2 - nN) \int \varphi_{0,l_1}(t_1)\psi_{j,k}(t_1)dt_1 \int \varphi_{0,l_2}(t_2)\psi_{j,k+m}(t_2)dt_2 \\ &= \sigma^2 \sum_n \int \int dt_1 dt_2 \psi_{j,k}(t_1)\psi_{j,k+m}(t_2) \sum_{l_2} \varphi_{0,l_2}(t_2)\varphi_{0,l_2}(t_1 - nN) \\ &= \sigma^2 \sum_n \int \int dt_1 dt_2 \psi_{j,k}(t_1)\psi_{j,k+m}(t_2)K(t_2, t_1 - nN) \\ &= \sigma^2 \sum_n \int \psi(t)\psi(t-(m+nN/2^j))dt \quad \text{证毕} \end{aligned}$$

由 (8) 式可见噪声在第  $j$  级的小波级数变换系数的相关系数是以  $N/2^j$  为周期的. 若限定噪声的采样  $N = 2^J$ , 则  $E\hat{\varepsilon}_{j,k}\hat{\varepsilon}_{j,k+m} = \sigma^2 \sum_n \int \psi(t)\psi(t-(m+nN/2^j))dt = \sigma^2 \sum_n \delta(m+nN/2^j)$ , 在  $0 \leq m < N/2^j$  时, 上式可化为  $E\hat{\varepsilon}_{j,k}\hat{\varepsilon}_{j,k+m} = \sigma^2 \delta(m)$ , 这说明独立同分布的正态白噪声序列, 当长度满足  $N = 2^J$  时, 它的正交小波变换系数是独立同分布的白噪声.

**定理 2** 设  $(\varepsilon_i)_{i=1}^N$  是期望为 0、方差为  $\sigma^2$  的独立同分布的正态白噪声序列, 通过下式生成随机过程

$$\varepsilon(t) = \sum_{i \in Z} \tilde{\varepsilon}_i \varphi(t-i) \quad (9)$$

式中  $\{\varphi(t-i)|i \in Z\}$  是正交基,  $(\tilde{\varepsilon}_i)_{i \in Z}$  是  $(\varepsilon_i)_{i=1}^N$  的周期延拓序列. 则  $\varepsilon(t)$  的正交二进小波变换序列  $\hat{\varepsilon}_{j,k}$  是期望为 0、互相关  $E\hat{\varepsilon}_{j,k}\hat{\varepsilon}_{j,k+m}$  为下式的广义平稳随机过程.

$$E\hat{\varepsilon}_{j,k}\hat{\varepsilon}_{j,k+m} = \frac{\sigma^2}{2^j} \sum_n \int \psi(t)\psi(t-(m+nN)/2^j)dt \quad (10)$$

式中  $\psi(x)$  是正交二进小波变换的母小波.

**证明** 由 (9) 式可导出  $\varepsilon(t)$  的第  $j$  级正交二进小波变换  $\hat{\varepsilon}_{j,k}$

$$\hat{\varepsilon}_{j,k} = \int \varepsilon(t)\psi_{j,k}(t)dt = \sum_l \tilde{\varepsilon}_l \int \varphi(t-l) \frac{1}{2^j} \psi\left(\frac{k-t}{2^j}\right) dt \equiv \sum_l \tilde{\varepsilon}_l \int \varphi_{0,l}(t)\psi_{2^j}(k-t)dt$$

用定理 1 的证明方法可导出  $\varepsilon(t)$  的  $j$  级小波变换  $\hat{\varepsilon}_{j,k}^j$  的数学期望为 0. 而  $\hat{\varepsilon}_{j,k}^j$  的相关函数  $E\hat{\varepsilon}_{j,k}\hat{\varepsilon}_{j,k+m}$  为

$$\begin{aligned} E\hat{\varepsilon}_{j,k}\hat{\varepsilon}_{j,k+m} &= \sum_{l_1} \sum_{l_2} E\tilde{\varepsilon}_{l_1}\tilde{\varepsilon}_{l_2} \int \varphi_{0,l_1}(t_1)\psi_{2^j}(k-t_1)dt_1 \int \varphi_{0,l_2}(t_2)\psi_{2^j}(k+m-t_2)dt_2 \\ &= \sigma^2 \sum_{l_2} \sum_{l_1} \sum_n \delta(l_1-l_2-nN) \int \int dt_1 dt_2 \varphi_{0,l_1}(t_1)\psi_{0,l_2}(t_2)\psi_{2^j}(k-t_1)\psi_{2^j}(k+m-t_2) \\ &= \sigma^2 \sum_n \int \int dt_1 dt_2 \psi_{2^j}(k-t_1)\psi_{2^j}(k+m-t_2) \sum_{l_2} \varphi_{0,l_2}(t_1-nN)\varphi_{0,l_2}(t_2) \\ &= \sigma^2 \sum_n \int \int dt_1 dt_2 \psi_{2^j}(k-t_1)\psi_{2^j}(k+m-t_2)K(t_2, t_1-nN) \\ &= \frac{\sigma^2}{2^j} \sum_n \int \psi(t)\psi(t-(m+nN)/2^j)dt \quad \text{证毕} \end{aligned}$$

当  $N \rightarrow \infty$  时, 任何有限时移, 有限次分解的小波级数的自相关函数将变为  $E\hat{\varepsilon}_{j,k}\hat{\varepsilon}_{j,k+m} = \frac{\sigma^2}{2^j}$ , 这正是 Mallat 给出的正态随机过程的二进小波变换结果 [4].

由 (10) 式可见噪声的各级二进小波变换系数的相关系数均是以  $N$  为周期的. 若限定 (10) 式中  $0 \leq m < N$ , 且二进小波分解使用紧支撑的正交小波, 设其支撑区间长度为  $L_\psi$ , 则  $\hat{\varepsilon}_{j,k}\hat{\varepsilon}_{j,k+m} = \sum_{n=-K_1}^{K_2} \int \psi(t)\psi(t-(m+nN)/2^j)dt$ ,  $K_1 = \lfloor (2^j L_\psi + m)/N \rfloor$ ,  $K_2 = \lfloor (2^j L_\psi - m)/N \rfloor$ , 由此可导出  $E\hat{\varepsilon}_{j,k}\hat{\varepsilon}_{j,k+m} \leq (K_1 + K_2 + 1) \frac{\sigma^2}{2^j} \|\psi\|^2$ , 当  $j \leq \log_2((N-1)/L_\psi)$  时,

$K_1 + K_2 = 0$ , 因此  $E\hat{\varepsilon}_{j,k}\hat{\varepsilon}_{j,k+m} \leq \frac{\sigma^2}{2^j} \|\psi\|^2$ . 由此可见独立同分布的正态白噪声在正交二进小波变换下, 其变换系数是方差递减的平稳相关噪声, 并且当总分解级数  $J \leq \log_2((N-1)/L_\psi)$  时, 第  $j$  级的二进小波变换系数的相关系数不超过  $\sigma^2/2^j$ .

#### 4 二进小波去噪

基于小波变换的去噪方法是先将带有噪声的数据通过小波变换展开为小波级数, 然后通过门限方法抽取“重要”的小波系数, 再把去噪后的小波系数经小波逆变换重建未知信号的逼近. 正如定理 1 所表述的那样: 在高斯噪声背景下, 使用正交小波级数变换的优点在于, 各层的小波系数具有相同方差分布特点, 便于系数域的统一处理. 因此使用二进小波变换去噪, 我们应尽量利用这一优点, 为此我们提出了下面的二进小波去噪方案.

如图 1 所示, 基于二进小波变换去噪的算法可描述如下:

初始化 选取总的分解次数  $J \leq \log_2((N-1)/L_\psi)$ .

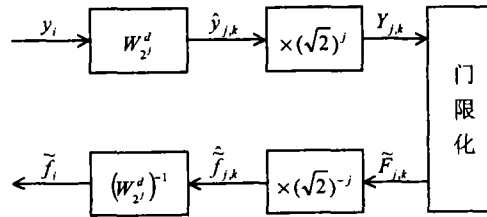


图 1 二进小波去噪程序框图

步骤 1 二进小波正变换. 对  $y_i$  作  $J$  次二进小波变换得到  $((\hat{y}_{j,k})_k)_{j=1}^J$ , 算法实现见第 2 节.

步骤 2 线性变换.  $j = 1, \text{while}(j < J + 1)\{(Y_{j,k})_k = (\hat{y}_{j,k})_k \times (\sqrt{2})^j\}$ .

步骤 3 门限化. 基于已有小波级数去噪的门限方法对  $((Y_{j,k})_k)_{j=0}^J$  门限化得  $((\tilde{F}_{j,k})_k)_{j=1}^J$ .

步骤 4 线性逆变换.  $j = 1, \text{while}(j < J + 1)\{(\hat{f}_{j,k})_k = (\tilde{F}_{j,k})_k \times (\sqrt{2})^{-j}\}$ .

步骤 5 二进小波逆变换. 对  $((\hat{f}_{j,k})_k)_{j=1}^J$  二进小波重构得到去噪信号  $\tilde{f}_i$ , 算法实现见第 2 节.

在基于小波变换去噪的方法中, 小波系数域的处理方法及门限的估计是两个关键技术. Donoho 和 Johnstone 提出的小波阈值处理方法<sup>[7]</sup>, 已经被证明对一大类光滑信号, 在高斯白噪声背景下是渐近最优的. 后来以这种方法为基础, 又发展了一些其它类型的小波去噪方法, 如基于 Bayes 方法<sup>[8]</sup>的小波去噪和基于假设检验的小波去噪方法, 现在已经广泛使用的方法有: VisuShrink 方法, Minimax 方法, SureShrink 方法和 HeurSure 方法. 小波变换去噪的思想, 直观地讲是基于这样一个认识: 在小波域中为数很少的几个比较大的小波展开系数就能包含真实信号的信息.

Donoho 和 Johnstone 提出的软门限和硬门限方法是最常用的小波系数取舍方法, 它们按下面的方式进行筛选:

$$T_{\text{hard}}(w_k^j, \lambda) = w_k^j I(|w_k^j| - \lambda) \quad (11)$$

$$T_{\text{soft}}(w_k^j, \lambda) = \text{sgn}(w_k^j) \max(0, |w_k^j| - \lambda) \quad (12)$$

式中  $w_k^j$  是噪声信号的小波变换,  $\lambda$  是小波门限值,  $I$  是单位阶跃函数,  $\text{sgn}(\cdot)$  为符号函数.

Donoho 和 Johnstone 提出的 VisulShrink 方法定义小波门限值可按下面的公式给定

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(n)} \quad (13)$$

式中  $n$  是信号的长度,  $\sigma$  是噪声的标准差。VisulShrink 估计方法是一种简单的门限方法, 但它已被证明, 在 Besov 空间, 它是自适应的和渐近最优的, 估计效果优于所有的线性估计方法。

Minimax 方法则是按下面的方法取定门限值。

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{若 } n \leq 32 \\ \sigma(0.396 + 0.1829 \times \log_2 n), & \text{若 } n > 32 \end{cases} \quad (14)$$

SureShrink 方法是基于 Stein 无偏风险原理上的估计方法, 是数据驱动的估计方法, 估计门限值略低于 VisulShrink 方法估计值, 它也是渐近最优的。HeurSure 方法是对 SureShrink 方法和 VisulShrink 方法的改进型估计方法。有关 SureShrink 方法和 HeurSure 方法原理及实现算法请参考有关文献 [1, 2, 7]。上述方法中都涉及对噪声标准差  $\sigma$  的估计, 实际处理中对噪声标准差  $\sigma$  的估计有三种方法: (1) 简单地令  $\sigma = 1$ , (2) 取首次分解的噪声小波系数的中值估计子, (3) 各级取各级的噪声小波系数的中值估计子。

## 5 数值实验

这里我们将要对第 4 节提出的二进小波去噪方法进行数值实验验证。我们取 4 个检验函数, 它们是 Blocks 函数、Bump 函数、Heavisine 函数、Doppler 函数 (如图 2 所示)。这 4 个函数几乎含盖包括图象、光谱、地震及其它科学领域所遇到的信号特征, 它们已经成为检验小波去噪性能的标准测试函数。这 4 个函数的支撑区间在  $[0, 1]$  上, 它们可以在 Matlab 的小波工具箱中通过 wnoise 函数产生。

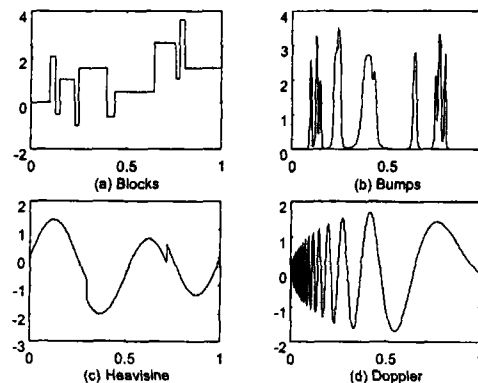


图 2 4 个标准测试函数

在 Gaussian 白噪声背景下, 比较二进小波去噪和小波级数去噪的效果。去噪性能采用常用的输入、输出信噪比衡量, 设观测序列为  $y_i = f(t_i) + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , 估计信号采样为  $\hat{f}(t_i)$ , 则输入信噪比 ( $\text{SNR}_{\text{input}}$ ) 和输出信噪比 ( $\text{SNR}_{\text{output}}$ ) 为

$$SNR_{input} = 20 \log_{10} \left[ \frac{\text{std}(f)}{\text{std}(\varepsilon)} \right]$$

$$SNR_{output} = 20 \log_{10} \left[ \frac{\text{std}(f)}{\|f - \hat{f}\|_2} \right]$$

式中  $\text{std}(x)$  表示序列  $x$  的标准差。提高信噪比定义为输出信噪比和输入信噪比之差。考虑到噪声样本的随机性, 对于每一个输入信噪比, 输出信噪比为 100 次不同噪声样本下的输出信噪比的均值。对四个测试信号的采样点数为 1024, 图 3~6 是使用八阶 Daubechies 小波、分解级数为 5 级, 单一硬门限去噪的处理结果, 在图 3~6 中, 实线是二进小波去噪结果, 虚线是小波级数去噪结果。

由图可见对于这四个函数去噪, 二进小波去噪比小波级数去噪的效果有显著提高。由于小波去噪性能取决于系统的多个指标参数, 例如去噪使用的小波的正则性, 小波域处理方法、未知噪声方差的估计方法, 以及小波分解级数等等多个因素, 我们对各个因素都进行了对比实验, 对这四个检验函数无一例外地证明了基于二进小波变换的去噪效果明显优于基于小波级数的去噪效果。

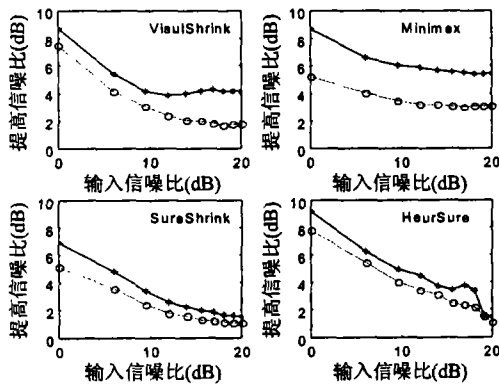


图 3 Blocks 函数的处理结果

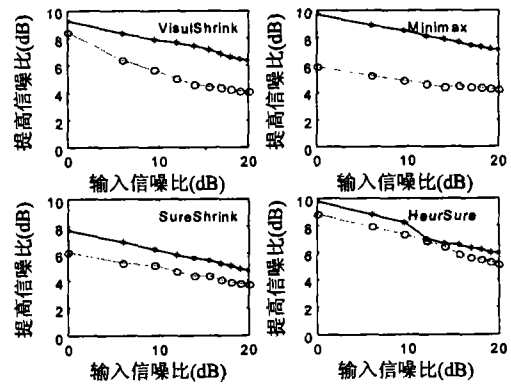


图 4 Bumps 函数的处理结果

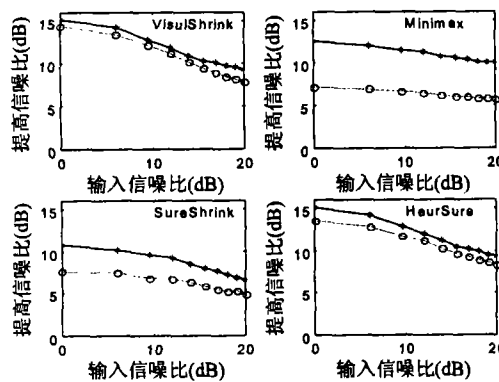


图 5 Heavisine 函数的处理结果

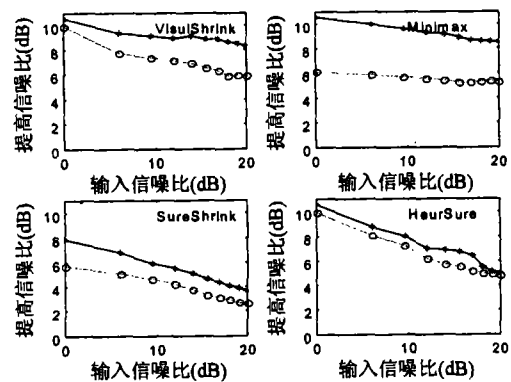


图 6 Doppler 函数的处理结果

## 6 结 论

本文在详细研究回归噪声的小波变换的特性的基础上, 结合已有的小波去噪方案, 提出了一个简单的基于二进小波变换的去噪方案。数值实验表明, 该方法对于所有标准测试信号是有效的, 同传统的小波级数去噪相比, 信号恢复信噪比有明显地改善。

## 参 考 文 献

- [1] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage, *Biometrika* 1994, 81(2), 425-455.
- [2] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, Wavelets and optimal nonparametric function estimation, Technical Report. Dept. of Statistics, U. C. Berkeley, 1990.
- [3] S. Mallat, A theory for multiresolution decomposition: the wavelet representation, *IEEE Trans. on Pattn. Anal. Mach. Intell.*, 1989, 11(7), 674-693.
- [4] S. Mallat, S. Zhong, Characterization of signals from multiscale edges, *IEEE Trans. on Pattn. Anal. Mach. Intell.*, 1992, 14(7), 709-732.
- [5] S. Mallat, W. L. Hwang, Singularity detection and processing with wavelets, Technical Report No. 549, Robotics Report, No. 245, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences. March, 1991.
- [6] S. Saitoh, Theory of reproducing kernels and its applications, Longman Scientific & Technical Press, 1988, 1-15.
- [7] D. L. Donoho, De-noising via soft-thresholding, *IEEE Trans. on Info. Theo.*, 1992, 41(3), 613-627.
- [8] F. Abramovich, *et al.*, Wavelet thresholding via a Bayesian approach. *J. R. Statisc. Soc.*, 1998, B60, Part 4, 725-749.

## DENOISING VIA DYADIC WAVELET TRANSFORM

Zhang Zongping    Liu Guizhong    Dong Enqing

(Dept. of Info. & Comm. Eng., School of Electron. & Info. Eng.,

Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract** Signals' representation in dyadic wavelet domain is very redundant. Compared with wavelet series reconstruction, signals' dyadic wavelet reconstruction dependency on the individual coefficients in transform domain will be decreased. Therefore, with the same error decision probability, the better reconstruction can be expected. Based on this idea, this paper extends the existing wavelet-based denoising approaches to the dyadic wavelet-based denoising. Numerical experiments show that the dyadic wavelet-based denoising can significantly improve the signal-to-noise rate (SNR).

**Key words** Wavelet-based denoising, Dyadic wavelet-based denoising, Nonparametric regression

张宗平: 男, 1971年生, 博士生, 主要研究兴趣包括小波分析、多媒体数据压缩、时频分析、非平稳信号处理、电磁场数值计算等。

刘贵忠: 男, 1962年生, 1989年6月获荷兰Eindhoven大学博士学位, 教授, 博士生导师, 主要从事非平稳信号的分析、处理、模式识别、反演等方面的理论、方法与应用研究。

董恩清: 男, 1965年生, 博士生, 主要研究方向为: 小波分析、时频分析、非平稳信号处理等。