

含非线性滞回电感电路的分叉和混沌*

燕庆明 李 强
(西北电讯工程学院, 西安)

摘要 本文利用滞回电阻实现了滞回电感, 然后研究了包含该滞回电感的二阶非自治动态电路中的分叉和混沌行为. 计算机模拟和实验结果是定性相似的. 系统的分叉结果具有应用价值.

关键词 非线性电路; 滞回电感; 分叉; 混沌

1. 引言

非线性系统中的分叉和混沌现象广泛地存在于化学、物理学、气象学、声学、光学、生物学和社会学等各个领域^[1]. 揭示出非线性电路中的混沌行为虽然才是最近几年的事, 但已引起专家们的高度重视. 到目前为止, 已报道了几种电路的计算机模拟或实验结果^[2-4]. 由于混沌是一项新兴的基础研究, 所以, 要建成这座理论大厦并开辟应用前景, 有关分叉和混沌的实验结果是不可缺少的基石. 本文在实现滞回电阻和电感的基础上, 研究了系统稳态响应的演化过程. 计算机模拟结果与实验在定性上非常相似. 其分频性能和混沌时的连续功率谱结构在电子工程中具有重要的应用价值.

2. 电路原理、分叉和混沌

实验电路如图1(a)所示. 它为简单的二阶非自治动态电路. 其中含有一个具有滞回特性的非线性电感, 其 $\varphi-i$ 特性如图1(c)所示. 该电感由图1(c)所示的滞回形电阻^[5]经图1(d) R-L (3)型互换器实现的^[6]. $v_s = U_m \cos \omega t$.

由图1(a)可得状态方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_c}{dt} &= \frac{1}{C} f(\varphi) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -v_c - r f(\varphi) + U_m \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

为了观察周期分叉和对比方便, 我们以 v_c 和 v_1 构成另一个状态空间, 经推导有状态方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_c}{dt} &= \frac{1}{Cr} (-v_1 + U_m \cos \omega t) \\ \frac{dv_1}{dt} &= -r \frac{di}{d\varphi} (v_1 - v_c) - U_m \omega \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

实验中, 我们根据文献[4]中的思想, 取 v_1 作为参考信号源, v_c 为响应, 当改变控制参数电源电压或电源频率 $f (= \omega/2\pi)$ 时, 响应均出现周期分叉和混沌. 例如, 当固定

* 1987年6月29日收到, 1987年10月9日修改定稿.

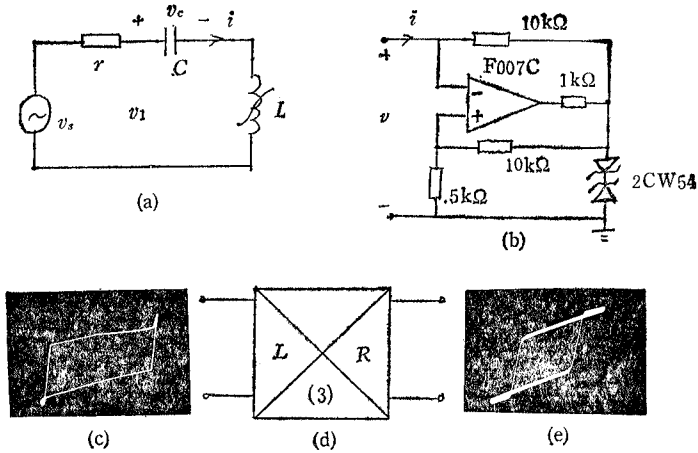


图 1 实验电路和滞回电感的实现, (a) 电路模型, 其中 $r = 202\Omega$, $C = 0.01\mu\text{F}$, (b) 滞回电阻的实现, (c) 滞回电感的 $\varphi-i$ 特性, (d) $R-L$ (3)型互换器, (e) 滞回电阻的 $v-i$ 特性

$U_m/\sqrt{2} = 1\text{V}$ 时, 电容上电压随信号源频率的增高(在 $250\text{Hz} - 20\text{kHz}$ 内), 其稳态下的行为如下:

$$5H \rightarrow 2H \rightarrow 3H \rightarrow C_H \rightarrow 2H \rightarrow C_0 \rightarrow 2p \rightarrow C_p \rightarrow 7p \rightarrow 5p \rightarrow 8p \rightarrow C_p \rightarrow 3p \rightarrow 13p \rightarrow 9p \rightarrow 5p \rightarrow 13p \rightarrow C_p \rightarrow 7p \rightarrow 17p \rightarrow C_p \rightarrow 9p \rightarrow 11p \rightarrow 13p \rightarrow 15p \rightarrow 17p \rightarrow 19p \rightarrow \dots \rightarrow 27p$$

在该演化序列中, p 为周期运动的符号, np (n 为正整数) 表示响应 v_c 的周期 T_c 与信号源周期 T_s 之比, 即出现次谐波的阶次数; nH 表示 $1p$ 区内的倍频过程, 即 v_c 中含高次谐波的阶次数; C_H 表示倍频区中出现的混沌; C_0 表示倍频区与周期分叉区(分频区)交界处出现的混沌; C_p 表示分频区内出现的混沌。

为了明确起见, 将上述序列中几个状态的定量关系列在表 1 中。

表 1 (f 为信号源的频率, f_c 为 v_c 的频率)

v_c \ $f(\text{Hz})$	250	580	1260	1600	1750	4100	11000	16500	18000
状 态	$1p$ $5H$	C_H	C_0	$5p$	$8p$	C_p	$15p$	$25p$	$27p$
$f_c(\text{Hz})$	250			320	219		733.3	660	666.67

当固定信号源频率 $f = 5\text{kHz}$, 电源有效值 U 在 $0 - 7\text{V}$ 内渐增时, v_c 的稳态响应演化如下:

$$\text{自振} \rightarrow 1p \rightarrow 5p \rightarrow C_p \rightarrow 5p \rightarrow C_p \rightarrow 1p$$

其定量关系如表 2。

图 2 给出了 $U = 1\text{V}$ 时电路响应的实景照片样品。图中, 凡 $v_c - v_i$ 平面的李沙育图形, y 轴加的是 v_i 分量, 作参考量, x 轴加的是 v_c 分量。这样得到的李沙育图, 其向左或向右的叶瓣(尖峰)个数, 就是 v_c 的 nH 数(倍频区), 如图 2(a), (b) 所示; 在分频区, 向上

表 2 (f_c 单位 Hz)

$U(V)$	0	≤ 1	1—2	2.2	2.2—3.4	3.4—4	> 4
状态 v_c	自振 $f_c = 1840$	$1p$	$5p$	C_p	$5p$	C_p	$1p$

或向下的叶瓣(尖峰)个数,就是分叉的 n 数,即 v_c 含次谐波的阶次数,如图 2(g), (h) 所示。

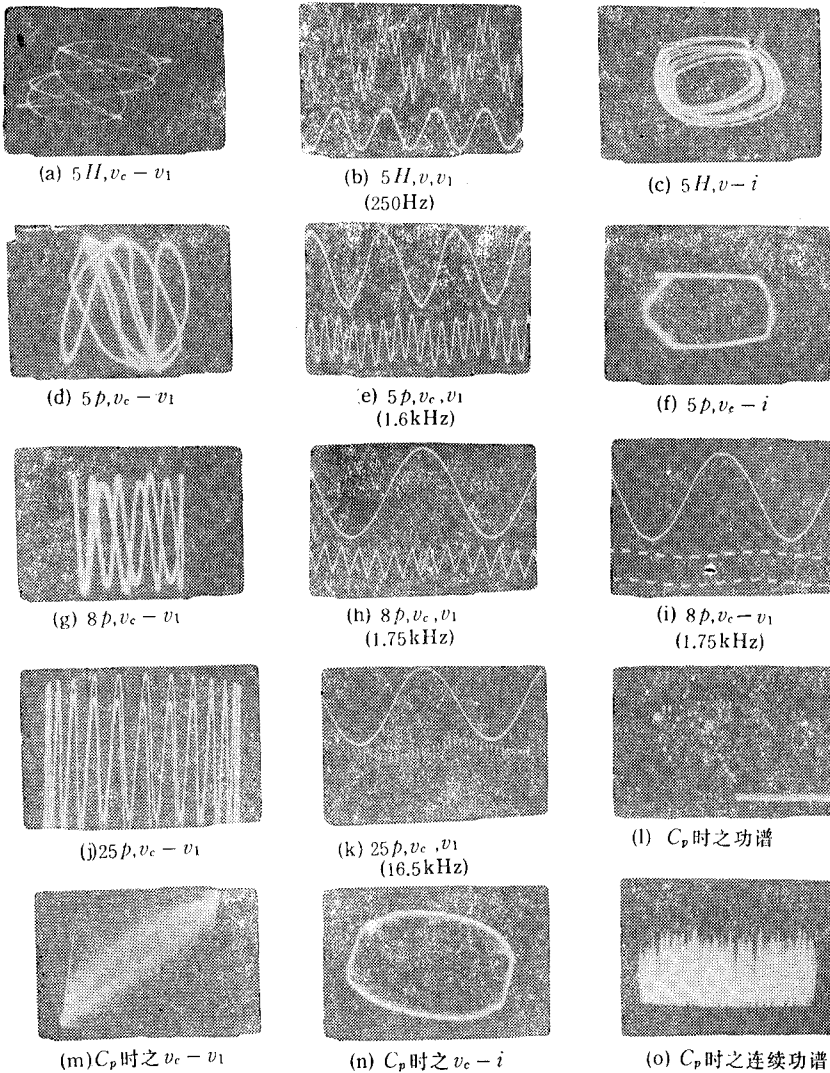


图 2 分叉与混沌的实际行为。其中 (a), (d), (g), (j), (m) 为 $v_c - v_1$ 李沙育图; (b), (e), (h), (i), (k) 为 v_c (上面) 和 v_1 (下面); (c), (f) 为 $v_c - i$ 状态轨道; (n) 为 $v_c - i$ 平面上的混沌吸引子; (l) 和 (o) 分别为混沌时的数字动态谱和连续谱结构。

3. 计算机模拟

在实验的基础上,我们对该电路进行了模拟分析。根据图 1(c) 实测的非线性电感特

性,这里采用了将 $\varphi-i$ 特性分段线性近似,如图 3 所示.

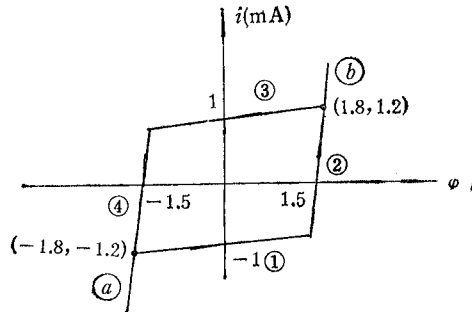


图 3 分段线性的 $\varphi-i$ 特性

对于滞回特性的电感,其运动路线规定为 $(a) \rightarrow ① \rightarrow ② \rightarrow (b) \rightarrow ③ \rightarrow ④ \rightarrow (a)$. 对图中的四段,可写出其表达式

$$i = f(\varphi) = \begin{cases} (0.111\varphi - 1) \times 10^{-3}, & -1.8 \leq \varphi \leq 1.3 \\ (4\varphi - 3) \times 10^{-3}, & \varphi \geq 1.3 \\ (0.111\varphi + 1) \times 10^{-3}, & -1.3 \leq \varphi \leq 1.8 \\ (4\varphi + 3) \times 10^{-3}, & \varphi \leq -1.3 \end{cases}$$

按方程(1)并运用各段的 $f(\varphi)$ 关系,用龙格-库塔法编程计算,我们得到了 $2p, 3p$, 混沌, $5p, 8p, 10p, 12p, \dots, 23p$ 等结果. 例如,取 $r = 200\Omega, C = 0.01\mu F, U_m = 1V, f = 130\text{Hz}$ 时, v_c 出现 $8p$ 的正弦响应,如图 4(a) 所示. 图 4(d) 的李沙育图($8p$)与实测基本一致. 当取 $r = 2000\Omega, C = 1\mu F, U_m = 2V, f = 25\text{Hz}$ 时,电路出现混沌状态,

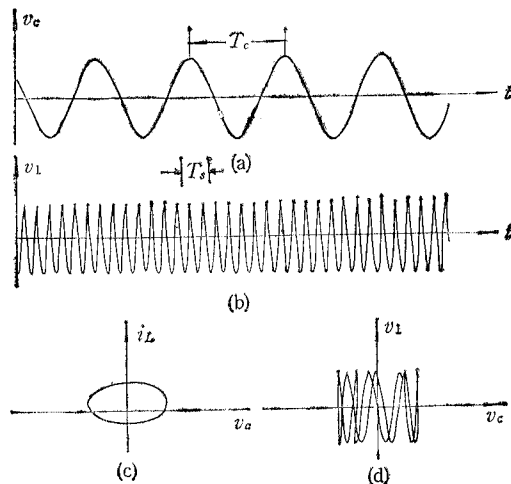


图 4 $8p$ 分叉时的响应和轨道

如图5(a)所示. 图5(c)和(d)分别为 v_c-i_L 平面和 v_c-v_1 平面的混沌吸引子,它们与实测非常相似. 由于计算中非线性电感模型是近似的,其他元件参数为理想值,故模拟结果也只能与实验结果定性相似. 顺便指出,图 4 与图 5 各结果,均是用长城 0520 机在绘图状态下边计算边在屏幕上同时绘出的. 为了保证显示稳态结果,程序中已将计算的前 100

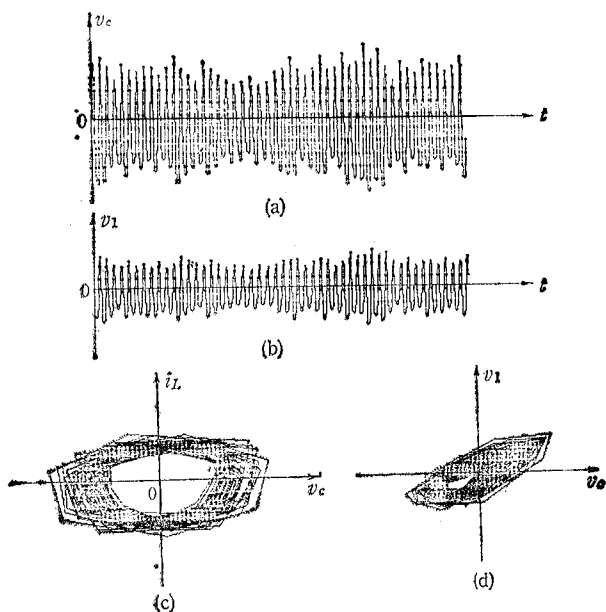


图 5 混沌响应及其吸引子

个点的值丢掉未绘。

4. 结论

研究表明,该系统的周期分叉和混沌有如下的重要行为:

(1) 除了在分频区出现多次混沌外,在倍频区 ($1p$) 也出现了混沌。

(2) 当信号源频率 $f > 5.5\text{kHz}$ 时,系统表现为周期迭加分叉,即 $9p \rightarrow 11p \rightarrow 13p \rightarrow 15p \rightarrow \dots$, 并且每增加 $2p$ 都有约 1.2kHz 的锁频范围。

(3) 系统的周期分叉规律决定于系统本身。例如,在图 2(h) 和(i)中,虽然周期激励为三角波或方波,但其分频性能基本一致。特别是,当系统发生 $8p$ 以上的分叉后,电压 v_c 表现为很好的正弦稳态,这在模拟电路分频器设计中有重要意义。

(4) 混沌运动的动态特性测量对于研究混沌的机理有重要价值。目前国内外尚无这方面的报道。我们用 BP-7 数字式动态频谱分析仪观察发现,混沌时,其功谱的低频段各分量跳动非常厉害,这说明低阶的次谐波主要决定着混沌吸引子的不稳定流形。图 2(1) 是将数字谱转到示波器上拍下的照片。用 ACIX-1 频谱分析仪测量发现,混沌时连续谱一般很宽,图 2(o) 仅显示了 $0-20\text{kHz}$ 频段的谱结构。用 UD5-A 电平表测量,该连续谱延伸到 360kHz 。

(5) 计算机模拟结果表明,含滞回电感的由确定性方程描述的系统确实存在着混沌响应。

本文是非线性系统中混沌过程专题研究的部分结果。在科研中得到了吴大正教授,史耀宗、张永瑞付教授的大力支持和帮助,特致谢意。

参 考 文 献

- [1] 郝柏林, 物理学进展, **3**(1983)3, 329—416.
- [2] 郭汾, 裴留庆, 吴淑贤, 电子学报, 1986年, 第1期, 第30—35页.
- [3] Liu Qing Pei, et al., *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-33**(1986)4, 438—442.
- [4] L. O. Chua, et al., *Int. J. Cir. Theor. Appl.*, **14**(1986), 315—329.
- [5] C-L. J. Hu, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-33**(1986)6, 636—641.
- [6] 燕庆明, 非线性电路与系统, 西北电讯工程学院, 内部教材, 1986, 第1章, 第29—43页.

BIFURCATION AND CHAOS IN A NON-LINEAR CIRCUIT CONTAINING A HYSTERESIS INDUCTOR

Yan Qingming Li Qiang

(*Xidian University, Xi'an*)

Abstract A hysteresis inductor via a hysteresis resistor is realized. Then the behaviors of bifurcation and chaos in a second-order non-autonomous dynamic circuit containing the hysteresis inductor are studied. The results of computer simulation agree well with the experiments in qualitative behaviour. The bifurcation results obtained are valuable.

Key words Nonlinear circuit; Hysteresis inductor; Bifurcations; Chaos