“邻居单元”为基础的预条件方法及其应用

李 磊　张 玉　谢拥军　梁昌洪
（西安电子科技大学天线与微波技术国家重点实验室　西安　710071）

摘　要：该文提出了一种具有物理意义的预条件方法——“邻居单元”为基础的预条件方法。该方法充分考虑了矩阵元素中的“主要”信息量，可以有效加快迭代收敛速度。在构造预条件因子时，采用从目标的 “几何结构剖分”出发，而不是从“矩阵元素”出发确定“基权函数之间的作用量关系”，这样保证了构造预条件矩阵的计算复杂度仅为 $O(N)$ 。作为实例，该文将这种预条件方法与共轭梯度方法结合应用于矩量法基站天线分析所得方程的求解，数值结果表明了该文方法的有效性。

关键词：预条件方法，共轭梯度方法，基站天线
中图分类号：0441　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2005)03-0502-03

Preconditioning Method Based “Neighbor Element” and Its Application

Li Lei　Zhang Yu　Xie Yong-jun　Liang Chang-hong
(Nat. Lab of Antennas and Microwave Tech., Xidian University, Xi'an 710071, *China)*

Abstract　A new preconditioning method based on “neighbor element” which has distinct physical background is presented in this paper. The dominant information of impedance matrix is fully considered in the neighbor element preconditioner. The preconditioner is generated from the target's “geometry structure ” and not from the “matrix element”, which assured the computational complexity for generating the preconditioner is only $O(N)$. This preconditioning method combined with conjugate-gradient method is used to solve the integral-equations generated from a base station antenna with MoM method in this paper. Numerical results are presented to demonstrate the validity of this method.

Key words　Preconditioning method, Conjugate-gradient method, Base station antenna

1　引言

矩量法已被广泛用于电磁散射问题的分析，也可用于研究具有复杂结构的天线辐射问题，本文应用该方法对现代移动通信中广泛采用的一种板状振子型基站天线的辐射特性进行了分析。矩量法将积分方程转化为线性方程组，其系数矩阵是一个满矩阵。共轭梯度法 (CG)是求解线性方程组的主要方法之一，但其迭代步数在很大程度上依赖于积分算子或者矩阵的谱特性。为了减少迭代次数，国内外的许多研究者将不同的预条件方法[1-9]运用于 CG 方法。其中被广泛采用的一种是系数矩阵或者单元块的不完全分解(Incomplete decomposition) 方法。另外一种是基于系数矩阵近似逆矩阵的预处理[6,7]。然而，为了构造这些预条件算子，不同的预条件方法可能需要不同的大量计算时间，因此，在构造预条件因子的时候，构造预条件因子的计算复杂度应该要求不大，满足这一要求的最简单的方法就是把系数矩阵的对角或者对角逆作为预条件因子，但是。这种简单的构造方法却又不能带来迭代次数的明显减少[7,9]。我们曾给出一种近场作用量为基础的预条件处理技术[9]，该方法可以成功地将基于电场积分方程矩量法求解速度显著提高，并与 MLFMA 算法结合分析了半空间电大目标散射问题。作为该方法的进一步研究，本文提出了一个非常有效的NEB(Neighbor Element Basis function） —— “基函数邻居单元”为基础的预条件方法，从而将该工作进一步推广到具有不同形式的基函数的矩量法问题。这种预条件数方法物理含义清晰，在构造预条件因子时，充分考虑了矩阵元素中的主要信息量元素，与 CG 方法结合，可以有效加快迭代收敛速度。

2　板型基站天线矩量法分析

用 S 表示理想导电散射体的表面，l 表示线天线。由理想导体表面切向电场为零，得到电场积分方程：

$$-\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(r_s)_{\tan}=[-j\omega\boldsymbol{A}(r_s)-\nabla\Phi(r_s)]_{\tan}\text{，}\quad r_s\text{ 在 }S\text{ 上}\tag{1}$$

$$-\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(r_l)_{\tan}=[-j\omega\boldsymbol{A}(r_l)-\nabla\Phi(r_l)]_{\tan}\text{，}\quad r_l\text{ 在 }l\text{ 上}\tag{2}$$

式中

2003-12-15 收到，2004-04-27 改回
国家自然科学基金（60201002）资助课题

$$A(r)=A(J,r)+A(I,r)=\mu\iint_S J(r')G_s\mathrm{d}s'\mu\int_l I(r')G_l\mathrm{d}l' \quad (3)$$

$$\Phi(r)=\Phi(\sigma,r)+\Phi(q,r)=\frac{1}{\varepsilon}\iint_S \sigma(r')G_s\mathrm{d}s'+\frac{1}{\varepsilon}\int_l q(r')G_l\mathrm{d}l' \quad (4)$$

为了准确计算和方便求解，我们对导体面电流采用RWG基函数[10]展开，而对线电流采用 pulse[11]函数展开，然后对式(1)选用 RWG 基函数作为检验函数；对于式(2)选择 δ (Dirac)函数作为检验函数。利用这两个检验函数分别对式(1)、式(2)作内积，得到下面矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} Z_{ss} & Z_{sl} \\ Z_{ls} & Z_{ll} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{ns} \\ I_{nl} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ V_l \end{bmatrix} \quad (5)$$

简写为

$$\boldsymbol{ZI=V} \quad (6)$$

式中，下标 s 表示导体表面的相关量，下标 l 表示线天线上的相关量，$[V_l]=[0\ \cdots\ 0\ \ V_0\ \ 0\ \cdots\ 0]^{\mathrm{T}}$ 是线天线上的激励项，分块矩阵$[Z_{ss}]$代表导体面上电流对导体面的自作用，$[Z_{ll}]$代表线天线上电流对线天线的自作用，$[Z_{sl}]$代表线天线上电流对导体面的作用，$[Z_{ls}]$则代表导体面上电流对线天线的作用。

3 NEB 预条件矩阵的构造

阻抗矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 显然是稠密矩阵，如果采用直接解法，比如LU分解，计算复杂度为$O(N^3)$，这样求解将花费相当长的时间。采用迭代解法只需要 $O(N_{\mathrm{iter}}N^2)$的计算量即可求解出未知量，N_{iter}表示迭代次数。系数矩阵预条件处理后，可以改善矩阵条件数从而可以明显地加快迭代解法的收敛速度。现在我们假设$[\boldsymbol{P}]$为 $N\times N$ 的预条件矩阵，引入$[\boldsymbol{P}]$的目的是使求解 $\boldsymbol{PZI=PV}$ 比求解 $\boldsymbol{ZI=V}$ 的迭代步数要明显减少，同时要求构造$[\boldsymbol{P}]$的方法要非常高效，以节省整体计算时间。我们期望 $\boldsymbol{PZ}$ 高度对角化，从而可以改善条件数。

为了达到此目标，我们首先创建一个列表数组。对于某一个指定的RWG三角形的公共边(或线天线的小段)m，我们首先找出它在给定R_p范围(R_p可以近似理解为划分邻居单元范围的半径)内的相邻几何结构单元，如图1、图2所示，并将此信息存储起来。通过这个列表数组，我们可以方便地确定第m个基函数的自作用矩阵元素$Z(m,m)$以及与它作用量比较大的权函数产生的互阻抗矩阵元素（实质上也就是第m个公共边或者线天线的小段上基函数的自作用和它所有的相邻几何结构上的权函数之间的互作用）。通常将R_p选为0.125个波长就可以将近场作用充分考虑到预条件矩阵中。在上述列表中，我们假定是对第m个公共边（或者线天线的小段）来建立的，所以该边（或者小段）排在第一位。

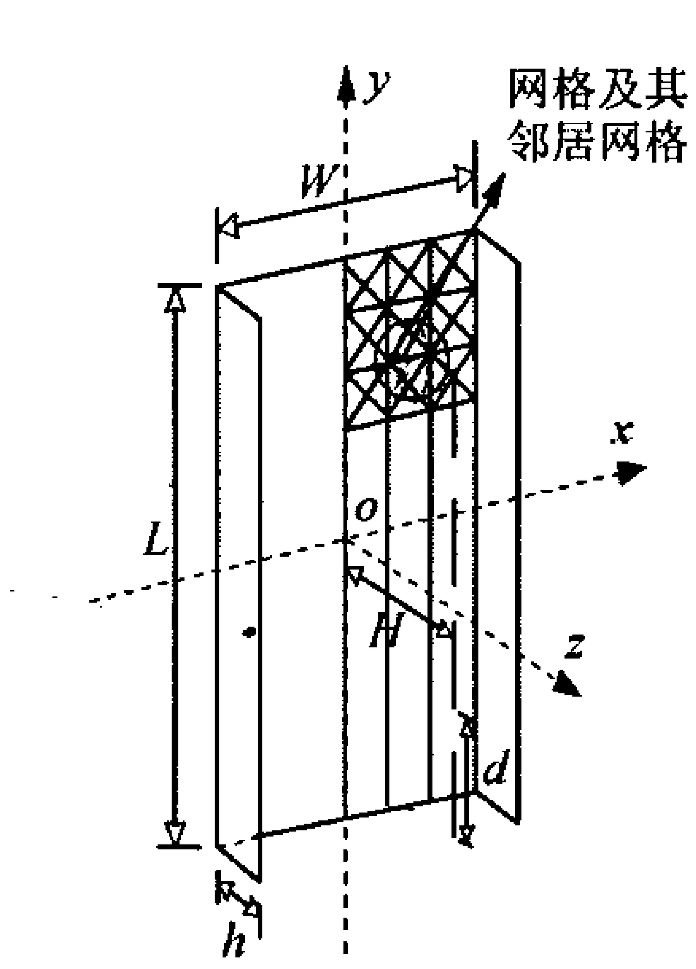

图1 板型基站天线的示意图

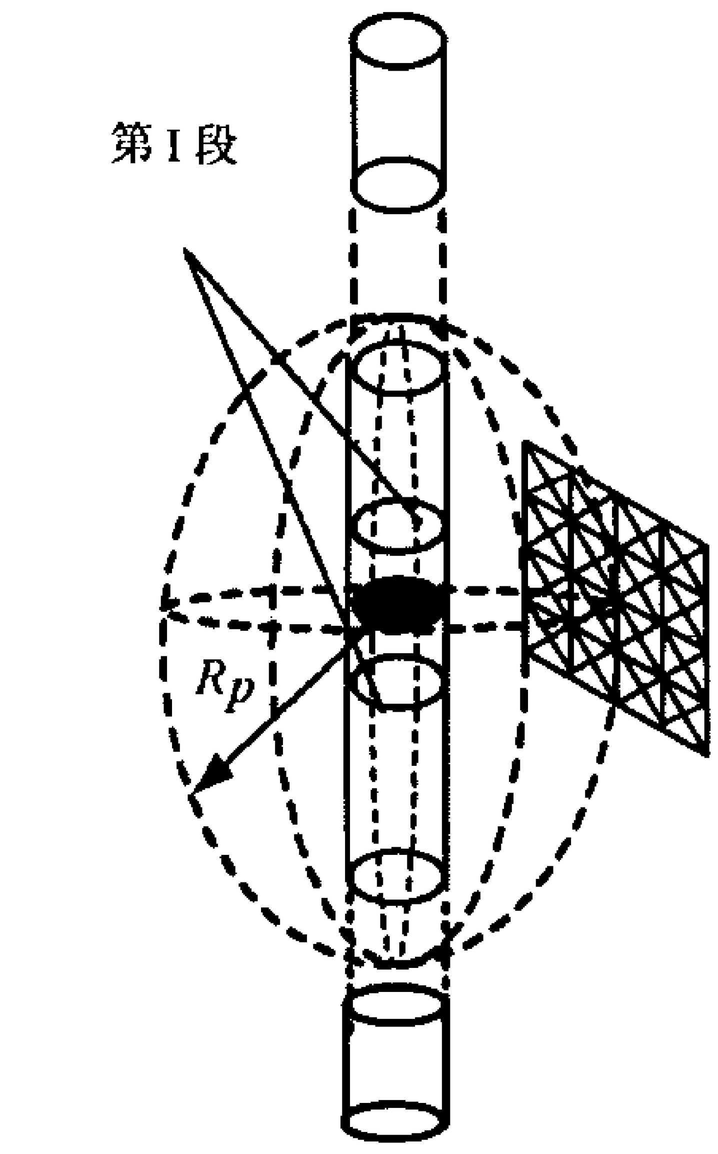

图2 天线及其邻单元放大示意图

对$[\boldsymbol{P}]$矩阵中第 m 行中的非零元素，首先找出矩阵(m,m)处的元素所在的边（或者天线的小段)，然后得到其所有的k个邻居边（或者天线的小段)，从而可以构造出如下小矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} Z_{1,1}^n & Z_{1,2}^n & \cdots & Z_{1,k}^n \\ Z_{2,1}^n & Z_{2,2}^n & \cdots & Z_{2,k}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{k,1}^n & Z_{k,2}^n & \cdots & Z_{k,k}^n \end{bmatrix}[\boldsymbol{P}_m]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中Z^n是子矩阵，表示“边”或者“小段”m的相邻几何结构上的基权函数作用，比如对应编号为s的边(或者天线的小段)的基函数与编号为 t 的边(或者天线的小段)的权函数的相互作用（此时它与阻抗矩阵的Z_{st}相对应)。$\boldsymbol{P}_m$是待求的预条件矩阵$[\boldsymbol{P}]$的第m行的非零元素构成的向量。式(7)的右侧是一个具有 k 个元素的列向量，第一个元素为1，其余为零。

现在我们考察一下构造NEB预条件矩阵的方法计算复杂度。我们需要求解 N 个式（7）表示的小方程以求解$[\boldsymbol{P}]$中每行中非零元素，因而，计算复杂度仅仅是$O(N)$。而且，采用稀疏矩阵的存储方法，因为每个单元的邻居数 k 并不完全相同，我们大约需要存储 $N\times k$ 个元素。

应该指出，在实际编程时，由于预条件矩阵$[\boldsymbol{P}]$的大多数元素都为 0，因此在每一步迭代过程中，采用稀疏矩阵的矩阵乘法算法，只需要很少的额外计算量。

4 数值结果及讨论

为了说明这种预条件方法的有效性，我们将其与CGN (Conjugate-Gradient Normal)迭代解法结合进行了实例计算。

4.1 方板上方的半波振子天线

图3给出了迭代步数随着方板从半个波长变化到2个波长时，迭代步数与未知量的关系。可见，随着未知量的增多，

NEB-CG预条件方法与Diagonal-CG（DIAG-CG）预条件方法以及没有预处理的CG(NONE-CG)方法相比，迭代步数明显减少。与此同时，由于采用了稀疏矩阵的乘法算法，每一步的迭代时间与不用条件数预处理技术相比，几乎没有增加，如图4所示。

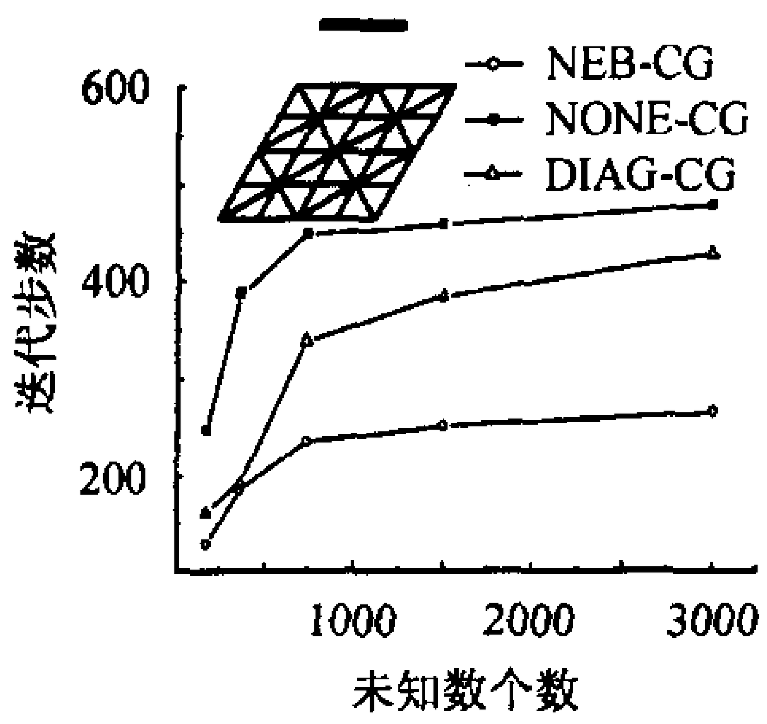

图3 迭代次数与未知数个数的关系

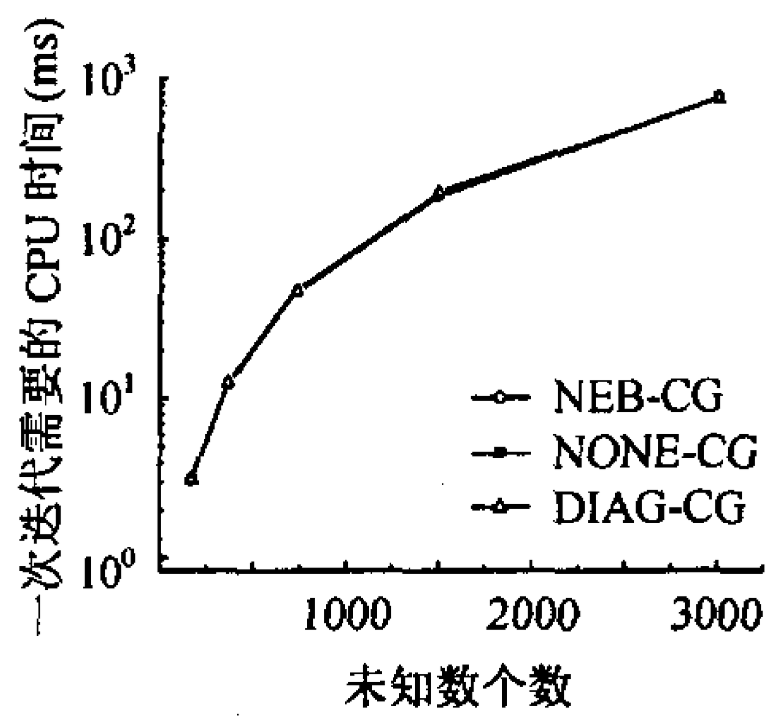

图4 迭代时间与未知数个数的关系

4.2 板型基站天线

我们对图 1 所示的一种基站天线($L=3.75\lambda$, $W=0.80\lambda$, $L=3.75\lambda$, $W=0.80\lambda$, $h=0.05\lambda$, $d=0.75\lambda, H=0.25\lambda$)进行了矩量法分析，由图 5 可见，采用 NEB 预条件处理技术后，加快了迭代收敛速度，图 6 给出了该天线的方向图。

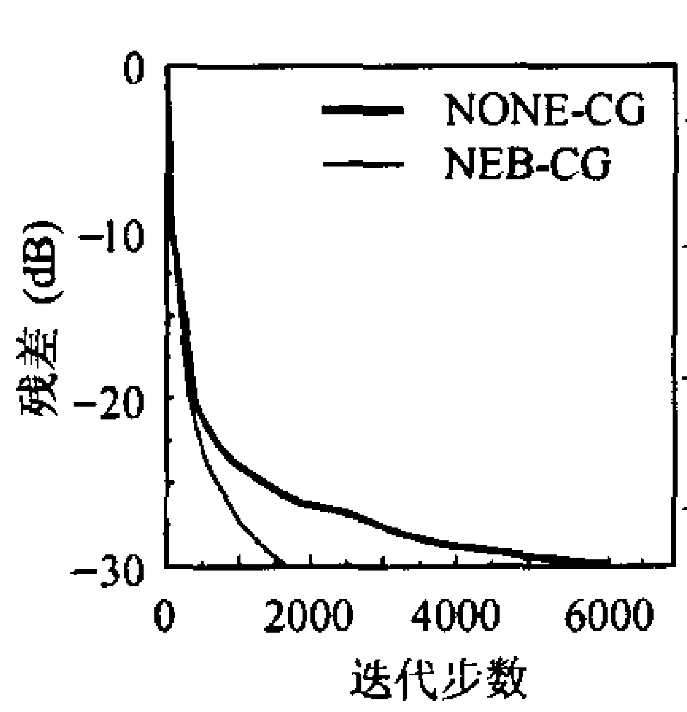

图 5 残差与迭代步数的关系

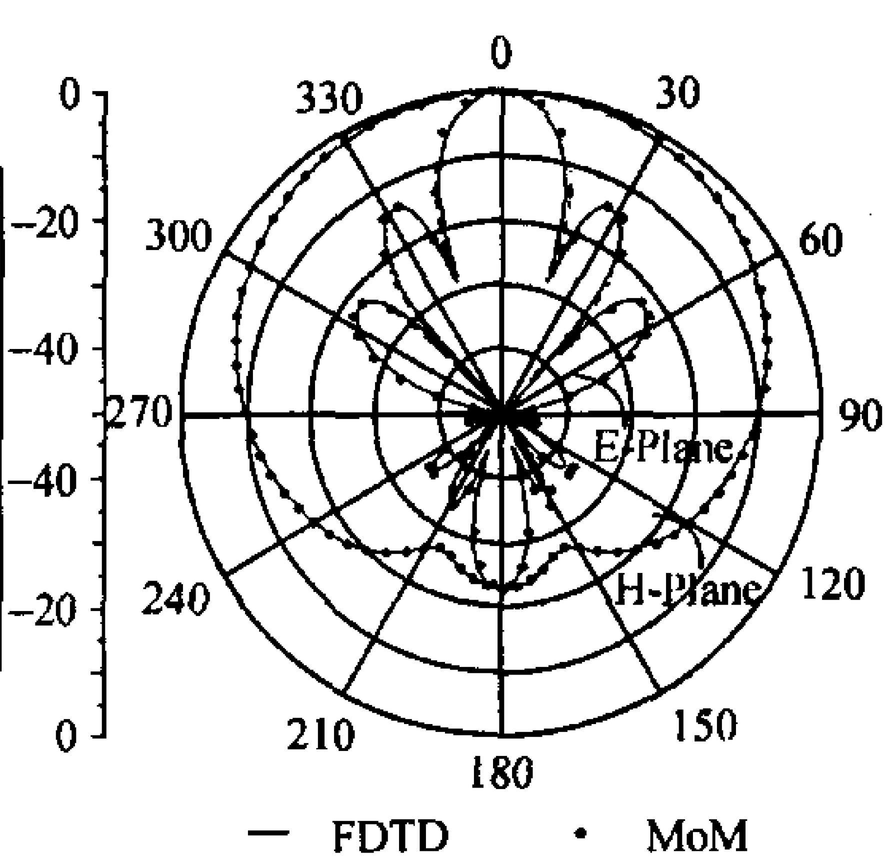

图 6 板型基站天线辐射方向图

5 结论

本文提出了一种基于邻居单元作用量作为预条件因子的方法，该方法的一个显著特点就是充分考虑了给定单元的“近场”作用，而且，在构造预条件矩阵时，直接根据矩量法需要的目标划分后所得到的几何结构出发，使得构造的复杂度仅仅为 $O(N)$。应用该方法结合 CG 算法，求解了板型基站天线的辐射特性，数值分析结果表明了本文方法的有效性。

参 考 文 献

[1] Chen K. On a class of preconditioning methods for dense linear systems from boundary elements. *SIAM. J. Sci. Comp.*, 1998, 20(5): 684 – 698.

[2] Amini S, Maines N D. Preconditioned Krylov subspace methods for boundary element solution of the Helmholtz equation. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1998, 41(6): 875 – 898.

[3] West J C. Preconditioned iterative solution of scattering from rough surfaces. *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, 2000, AP-48: 1001 – 1002.

[4] Chen R S, Yung E K N, Chan C H, *et al*.. Application of preconditioned conjugate-gradient algorithm to the edge FEM for electromagnetic boundary-value problems. *Microwave Opt. Technol. Lett.*, 2000, 27: 235 – 238.

[5] Axelsson O, Kolotilina L Y. Preconditioned conjugate gradient methods, Proceedings 1989, in A. Dold, B. Eckmann, and F. Takens, Eds. Lecture Notes in Mathematics Vol. 1457. New York, Springer, 1990: 44 – 57.

[6] Ahn C H, Chew W C, Zhao J S, *et al*.. Numerical study of approximate inverse preconditioner for two-dimensional engine inlet problems. *Electromag.*, 1999, 19: 131 – 146.

[7] Botros Y Y, Volakis J L. Preconditioned generalized minimal residual iterative scheme for perfectly matched layer terminated application. *IEEE Microwave and Guided Wave Lett.*, 1999, 45 – 47.

[8] Yaghjian A D. Banded-matrix preconditioning for electric-field integral equations, IEEE APS Int. Symp. Dig., Montreal, Canada, 1997: 1806 – 1809.

[9] Xie Yongjun, He Jiangqi, Sullivan Anders, *et al*.. A simple preconditioner for electric-field integral equations. *Microwave Opt. Technol. Lett.*, 2001, 30: 51 – 54.

[10] Rao S M , Wilton D R, Glisson A W. Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape, *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, May 1982, AP-30(3): 409 – 418.

[11] 刘其中，宫德明. 天线的计算机辅助设计. 西安：西安电子科技大学出版社，1988.

李 磊： 男，1980 年生，博士生，主要从事计算电磁学方面和微波毫米波集成电路设计方面的研究.

张 玉： 男，1978 年生，博士生，主要从事电磁场数值计算、电磁兼容、并行计算等方面的研究工作.

谢拥军： 男，1968 年生，教授，博士生导师。主要研究方向:计算微波与计算电磁学；微波通信；电磁兼容及电波传播特性等.

梁昌洪： 男，1943 年生，教授，博士导师，曾任西安电子科技大学校长，中国电子学会会士，IEEE Senior member, 研究方向包括计算场论、计算微波、微波网络理论、电磁散射与逆散射、电磁兼容等方面.