

带分布时延神经网络: 从稳定到振荡再到稳定的动力学现象¹

廖晓峰 吴中福 王康 虞厥邦*

(重庆大学计算机学院 重庆 400044)

*(电子科技大学光电子技术系 成都 610054)

摘要 该文主要研究一个带连续分布时延且具有强核的神经网络。作者发现当平均时延参数增加时,系统的状态从稳定变化到振荡现象;当平均时延参数继续增加时,又从振荡变为稳定。这一特殊的动力学现象对于具有弱核的神经网络是不可能发生的,用平均时延作分岔参数,作者也证明了 Hopf 分岔的存在性,用计算机仿真实验表明所得的结论的正确性。

关键词 稳定性, 振荡, 连续分布时延, 神经网络, Hopf 分岔

中图分类号 TN-052

1 引言

众所周知,神经网络是一个高度复杂的非线性动力学系统,因此,它也应具有动力学系统中固有的一些现象,如稳定性,不稳定性,振荡和混沌现象。然而目前关于神经网络的动态特性主要集中在稳定性的研究,对振荡以及混沌现象的研究还甚少,在生物神经网络或人工神经网络中不可避免存在时延。因此,时延也是神经网络所固有的特性。但带时延神经网络的动力学特性比不带时延的神经网络的动力学特性更为复杂,其研究也较为困难。文献 [1-6] 讨论了带离散时延神经网络的动力学特征,也主要集中于稳定性的研究,这是因为稳定的平衡点对于神经网络的联想记忆有着非常重要的作用,然而最近文献 [1,7] 报道利用振荡的神经网络来进行联想记忆。另外在轴突信息传递过程中不可能均为离散时延。最近文献 [8] 将 2 个神经元系统推广为带连续分布时延的神经网络,并对这种模型进行了详细的局部稳定性与分岔分析。

本文讨论一个带连续时延的神经网络,这里主要研究带强核的情形,至于弱核的讨论可参见文献 [7]。我们发现当平均时延增加时,平衡点的稳定性将被破坏并出现振荡现象。若进一步增加平均时延时,我们发现系统又处于稳定状态。这种从稳定到振荡再到稳定的动力学现象对于弱核情形是不可能发生的^[7]。我们进行了数值仿真,结果表明了所得结论的正确性。

2 连续时延神经网络模型

设 $x(t)$ 记一个神经元激活水平,这个神经元能通过动态阈值来调节自激活且它依赖于它以前的激活。我们研究如下神经网络模型^[2,7]:

$$\frac{dx}{dt} = -x(t) + a \tanh[x(t) - b \int_0^{\infty} F(s)x(t-s)ds - c] \quad (1)$$

这里 a, b 和 c 是非负数,权函数 $F(s)$ 是定义在 $[0, \infty]$ 上的一非负有界函数,描述了过去结果对当前动态性质的影响,在这个模型中假设连续时延的出现并不影响平衡值,因此我们正规化核为

¹ 1998-10-26 收到, 2000-05-22 定稿
中国博士后科学基金资助

$$\int_0^{\infty} F(s)ds = 1 \quad (2)$$

定义平均时延为

$$T = \int_0^{\infty} sF(s)ds \quad (3)$$

特别, 弱核为

$$F(s) = \alpha e^{-\alpha s}, \quad \alpha > 0 \quad (4)$$

且强核为

$$F(s) = \alpha^2 s e^{-\alpha s}, \quad \alpha > 0 \quad (5)$$

系统 (1) 式的初始条件为

$$x(s) = \phi(s), \quad -\infty < s < \infty \quad (6)$$

这里 $\phi(s)$ 是 $(-\infty, 0]$ 上的连续函数. 为了方便起见, 考虑系统 (1) 式中 $c = 0$, 对 $c \neq 0$ 可类似讨论. 令

$$y(t) \equiv x(t) - b \int_0^{\infty} F(s)x(t-s)ds \quad (7)$$

因此, 我们有

$$\frac{dy}{dt} = -y(t) + a \tanh[y(t)] - ab \int_{-\infty}^0 F(s) \tanh[y(t+s)]ds \quad (8)$$

利用文献 [2,7] 的结果, 我们假设 a, b 使得

$$a > 0, \quad b \geq 0, \quad a(1-b) < 1 \quad (9)$$

所以系统 (10) 式有唯一平衡点 $y(0) \equiv 0$, 也就是系统 (1) 式有唯一平衡点 $x^* = 0$.

3 稳定性转换和 Hopf 分岔

文献 [7] 已研究了弱核的情况并且发现它没有稳定性转换. 在这一节, 我们主要研究带强核的系统 (1) 式的稳定性和 Hopf 分岔. 将 (8) 式 Taylor 展开, 我们有

$$\frac{dy}{dt} = Ly(t) + \int_{-\infty}^0 K(s)y(t+s)ds + H(y) + \text{高阶项} \quad (10)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} L &= -(1-a) \\ K(s) &= -abF(-s) \\ H(y) &= -\frac{a}{3}y^3(t) + \frac{ab}{3} \int_0^{\infty} F(-s)y^3(t+s)ds \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

线性化系统的特征方程是

$$D(\lambda) = \lambda + (1 - a) + ab \int_{-\infty}^0 F(-s)e^{\lambda s} ds \quad (12)$$

如果 $F(s)$ 是强核, 即 $F(s) = \alpha^2 se^{-\alpha s}$, $\alpha > 0$, 那么, 特征方程是

$$\lambda^3 + (2\alpha + 1 - a)\lambda^2 + \alpha[\alpha + 2(1 - a)]\lambda + \alpha^2[1 - a(1 - b)] = 0 \quad (13)$$

我们定义

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= b_1(\alpha) = 2\alpha + 1 - a \\ b_2 &= b_2(\alpha) = \alpha[\alpha + 2(1 - a)] \\ b_3 &= b_3(\alpha) = \alpha^2[1 - a(1 - b)] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

则特征方程有

$$\lambda^2 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0 \quad (15)$$

设 $\varphi_1: (0, \infty) \rightarrow R$ 是一连续可微函数:

$$\varphi(\alpha) = b_1(\alpha)b_2(\alpha) - b_3(\alpha) \quad (16)$$

如果 $\varphi_1(\alpha) > 0$, 则由 Routh-Hurwitz 准则, 平衡点 $y^* = 0$ 是局部渐近稳定的。但是

$$\varphi(\alpha) = \alpha\{2\alpha^2 + [4(1 - a) - ab]\alpha + 2(1 - a)^2\} \quad (17)$$

设

$$\varphi_1(\alpha) = 2\alpha^2 + [4(1 - a) - ab]\alpha + 2(1 - a)^2 \quad (18)$$

因此, 函数 $\varphi_1(\alpha)$ 的两个根是

$$\alpha_{\pm} = \frac{[ab + 4(a - 1)] \pm \sqrt{ab[ab + 8(1 - a)]}}{4} \quad (19)$$

在下面的讨论中, 我们将考虑两种情形:

(1) 若 $a < 1$, 因为 $\alpha > 0$, 那么利用 (18) 式, 我们有

$$b < \frac{2\alpha}{a} + \frac{4(1 - a)}{a} + \frac{2(1 - a)^2}{a\alpha} \equiv f(\alpha) \quad (20)$$

当 α 从 0 到 $+\infty$ 变化时, 在上面不等式的右边 $f(\alpha)$ 从 $+\infty$ 衰减到点 $\alpha = 1 - a$ 的最小值 $\frac{8(1-a)}{a}$, 然后又再增加。因此, 如果 $b < \frac{8(1-a)}{a}$, 不等式 (20) 对所有 α 均成立。然而如果 $b > \frac{8(1-a)}{a}$, 不等式对小的 α 和大的 α 成立 (亦即 $\alpha < \alpha_-$ 或 $\alpha > \alpha_+$ 不等式 (20) 成立); 但是有一个区间 $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ 不等式不成立。在这种情况下, 当 α 变化时有一从稳定到不稳定再到稳定的改变。

(2) 若 $a > 1$ 和 $\alpha > 2(a - 1)$, 那么 $b_1 > 0, b_2 > 0$ 。由条件 (9) 式, 我们有 $b_3 > 0$ 。显然 $\alpha_+ > \alpha_- > 0$ 。因此, 当 $\alpha \in (\alpha_+, \infty)$, 我们有 $\varphi(\alpha) > 0$, 亦即系统 (1) 式是局部渐近稳定的。

在上面讨论的情形中, 如存在 $\alpha_0 > 0$ 有 $\varphi_1(\alpha_0) = 0$, 且特征方程有一对纯虚根 $\lambda_{1,2} = \pm\omega_0 i$ ($\omega_0 = \sqrt{b_2(\alpha_0)}$) 和一实根 $\lambda_3 = -b_1(\alpha_0) < 0$, 经过计算有

$$\frac{d}{d\alpha} [\operatorname{Re}\lambda_1]_{\alpha_0} = -\frac{1}{2(b_1^2 + b_2)} \left. \frac{d\varphi_1}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} \quad (21)$$

这里

$$\left. \frac{d\varphi_1}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} = 6\alpha_0^2 - 2\alpha_0(4 - 4a - ab) + 2(1 - a)^2 \quad (22)$$

因此, 我们有下面的结果:

定理 1 (稳定性转换和 Hopf 分岔的存在性)

(1) 如果 $a < 1$ 和 $b < \frac{8(1-a)}{a}$, 那么系统 (1) 式对所有 α 都是渐近稳定的

(2) 如果 $a < 1$ 和 $b > \frac{8(1-a)}{a}$, 那么系统 (1) 式对 $\alpha < \alpha_-$ 或 $\alpha > \alpha_+$ 是渐近稳定的, 但有一个区间 $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ 系统 (1) 式是不稳定的.

(3) 如果存在 $\alpha_0 = \alpha_-$ 或 $\alpha_0 = \alpha_+$ 使得 $\varphi(\alpha_0) = 0$ 且 $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{\alpha_0} \neq 0$, 那么 α 通过 α_0 时, 在 $y^* = 0$ 出现 Hopf 分岔.

定理 2

如果 $a > 1$ 和 $\alpha > 2(a-1)$, $\alpha \in (\alpha_+, \infty)$, 那么系统 (1) 式是局部渐进稳定的. 然而, 当 $\alpha \in (0, \alpha_+)$ 时, 系统 (1) 式在 $y^* = 0$ 处不稳定. 如果存在 $\alpha_0 = \alpha_+$ 使得 $\varphi(\alpha_0) = 0$ 且 $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{\alpha_0} \neq 0$, 那么 α 通过 α_0 时在 $y^* = 0$ 出现 Hopf 分岔.

4 数值例子

在带强核的情形, 对于不同的 a, b 值, 我们可计算出具体值见表 1:

为了模拟系统 (1) 式, 取 $a=1.75, b=0.93$, 用计算机模拟当 $\alpha > 2.0377$ 时, 从图 1, 图 2 可看出平衡点 $x^* = 0$ 是稳定的. 当 α 通过 $\alpha=2.0377$ 时, 平衡点 x^* 失去它的稳定性并出现 Hopf 分岔, 亦即是一族周期解从平衡点 $x^* = 0$ 分岔. 同样我们取 $a=0.8, b=2.5$ 对不同的 α 值用计算机模拟的结果见图 3, 图 4. 计算机模拟结果表明了我们的结论的正确性.

表 1 对于不同 a, b 值, 系统 (1) 式的稳定性条件

	α_-	α_+	稳定性条件	不稳定性条件
$a=2, b=1$	0.3820	2.6180	$(2.6180, +\infty)$	$(2, 2.6180)$
$a=4, b=1.25$	1.2396	7.2604	$(7.2064, +\infty)$	$(6, 7.2604)$
$a=1.75, b=0.93$	0.2760	2.0377	$(2.0377, +\infty)$	$(1.5, 2.0377)$
$a=1.25, b=1.75$	0.0402	1.5535	$(1.5535, +\infty)$	$(0.5, 1.5535)$
$a=0.8, b=2.5$	0.0763	0.5236	$(0, 0.0763)$ 或 $(0.5236, +\infty)$	$(0.0763, 0.5236)$
$a=0.2, b=35$	0.4376	1.4623	$(0, 0.4376)$ 或 $(1.4623, +\infty)$	$(0.4376, 1.4623)$

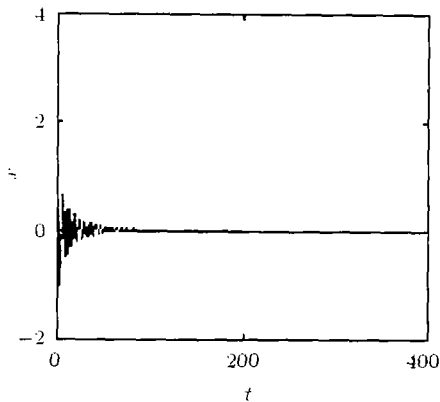


图 1 系统 (1) 的状态变量 $x(t)$ 的运动轨迹
 $a=1.75, b=0.93, \alpha=2.2$

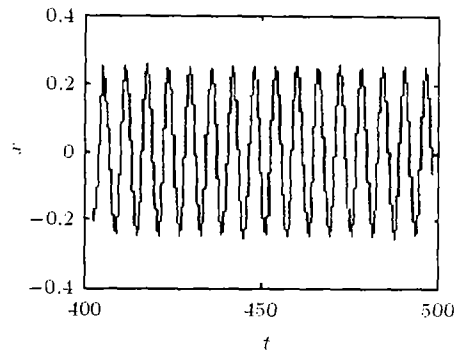


图 2 系统 (1) 的状态变量 $x(t)$ 的运动轨迹
 $a=1.75, b=0.93, \alpha=2.0$

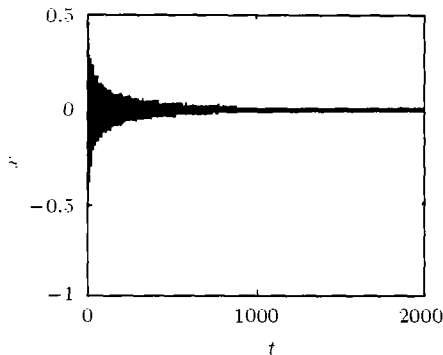


图 3 系统 (1) 的状态变量 $x(t)$ 的运动轨迹
 $a=0.8, b=2.5, \alpha=0.53$

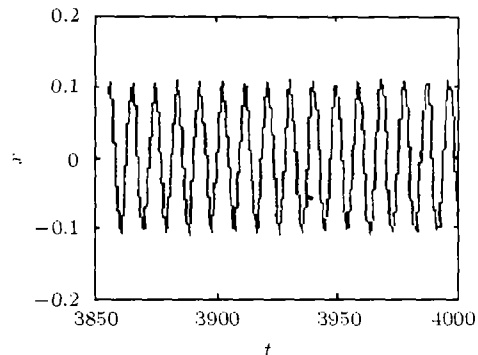


图 4 系统 (1) 的状态变量 $x(t)$ 的运动轨迹
 $a=0.8, b=2.5, \alpha=0.5$

5 结 论

本文研究了具有强核的分布时延神经网络模型的动态行为。我们发现当平均时延参数增加时, 系统的状态从稳定变化到振荡; 当平均时延参数继续增加时, 又从振荡变为稳定, 而这一特殊的动力学现象对于具有弱核的神经网络是不可能发生的^[7], 利用平均时延作为分岔参数, 证明了当这个参数通过临界值时出现 Hopf 分岔, 至于网络其他的动态行为例如倍周期, 混沌现象, 还有待于我们进一步深入研究。

参 考 文 献

- [1] B. Baldi, A. F. Atiya, How delays affect neural dynamical thresholds with delays, IEEE Trans. on Neural Networks, 1994, 5(4), 612-621.
- [2] K. Gopalsmay, Issic K. C. Leung, Convergence under dynamical thresholds with delays, IEEE Trans. on Neural Networks, 1994, 8(2), 341-348.
- [3] K. Gopalsmay, X. Z. He, Stability in asymmetric Hopfield net with transmission delays, Physica D, 1994, 76(5), 344-358.

- [4] C. M. Marcus, R. M. Westervelt, Stability of analog neural networks with delay, *Phys. Rev. A*, 1994, 39(7), 347-359.
- [5] Xiaofeng Liao, Juebang Yu, Qualitative analysis of bi-directional associative memory with time delay, *International Journal of Circuit Theory and Application*, 1998, 26(7), 219-229.
- [6] Xiaofeng Liao, Juebang Yu, Robust interval stability analysis for Hopfield with time delay, *IEEE Trans. on Neural Networks*, 1998, 9(5), 1042-1046.
- [7] Xiaofeng Liao, *et al*, Hopf bifurcation and stability of periodic solutions of a neural network with a continuously distributed delay, *International Symposium on Signal Processing and Intelligence system*, 1999, 214-218.
- [8] Xiaofeng Liao, Kwok-wo Wong, Zhongfu Wu, Bifurcation analysis in a two-neuron system with distributed delays, *Physica D*, 2001, 179(1-2), 125-141.

A SWITCH FROM STABILITY TO
OSCILLATION BACK TO STABILITY FOR
NEURAL NETWORK WITH DISTRIBUTED DELAY

Liao Xiaofeng Wu Zhongfu Wang Kang Yu Juebang*

(Institute of Computer, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**(Department of Optoelectronic Technology, UESTC, Chengdu 610054, China)*

Abstract In this paper, a neural network with strong kernel and continuously time delay is mainly investigated. A switch from stability to instability may occur for certain range of the parameters and must then be followed by a switch back to stability. Bifurcation phenomena of this model are also investigated. Using the mean time delays as a bifurcation parameter, authors have proven that Hopf bifurcation parameter passes through a critical value. Some computer simulations illustrate correctness of the results.

Key words Stability, Oscillation, Continuously distributed time delay, Neural network, Hopf bifurcation

廖晓峰: 男, 1964年生, 教授, 博士后, 主要兴趣是神经网络, 混沌保密通信以及信号处理等.

吴中福: 男, 1938年生, 教授, 博士生导师, 主要兴趣是: 计算机网络, 综合业务数字网与计算机体系结构等.

王康: 男, 1952年生, 教授, 主要兴趣是: 计算机网络与通信等.

虞厥邦: 男, 1932年生, 教授, 博士生导师, 主要兴趣是非线性电路, 神经网络等.