三值互斥变量函数的图形表示与化简方法的研究

吴桂初　吴 烈　陈偕雄*　杭国强*

(温州师范学院物理与电子信息科学系　温州　325003)

*(浙江大学信息电子工程系　杭州　310028)

摘　要：该文分析了三值互斥变量的约束条件，提出一种三值互斥变量的图形表示方法和图形化简规则，大大压缩了卡诺图的规模，把变量的互斥性直观地表现出来，化简直观方便。

关键词：多值逻辑，三值 K 图，互斥变量 K 图

中图分类号：TN431.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2005)05-0823-04

Research on Mapping and Simplification of Ternary Function with Mutually Exclusive Variables

Wu Gui-chu　Wu Lie　Chen Xie-xiong*　Hang Guo-qiang*

(*Dept. of Physics and Electronic Information Science, Wenzhou Normal College, Wenzhou* 325003, *China*)

*(*Department of Electronic Engineering, Zhejiang University, Hangzhou* 310028, *China*)

Abstract　This paper analyzes the restrictive conditions, proposes a mapping of ternary function with mutually exclusive variables and the graphic simplification rules. It can greatly reduce the size of K-map, and has several advantages such as intuition, convenience easily operating on computers.

Key words　Multivalued logic, Ternary K-map, K-map for mutually exclusive variables

1　引言

卡诺图(K)图具有直观和方便的优点，在逻辑函数的化简中，得到了广泛的应用。然而随着逻辑变量的增加，K 图变得复杂，渐渐失去了其直观性和方便性的特点。因此，在逻辑代数中的二值 K 图一般讨论到 5 变量($2^5=32$ 个函数值)；三值 K 图一般讨论到 3 变量($3^3=27$ 个函数值)[1]。对变量更多的情况则需使用降维 K 图技术[2]。在变量互相排斥的情况下，可利用其约束条件，压缩其 K 图规模，而且把变量之间的互相排斥性也直观地给予表示。文献[3]讨论了二值互斥变量函数的表示与化简方法。然而，迄今为止对于三值互斥变量的表示与化简尚缺乏研究，本文将针对这个问题展开研究。

2　三值互斥变量函数的定义和图形表示

在二值逻辑中变量是只能取 0, 1 两个值，而在多值逻辑上变量可取 $0, 1, \cdots, r-1$ 多个分立值，因此对互斥变量的定义可作如下修改。

2.1　三值互斥变量函数的定义

定义　在多值（三值）逻辑中如果变量 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 不能同时有两个或两个以上变量取非零值，即最多只能有一个变量取非零值，则称它们为多值（三值）互斥变量。

以三值四互斥变量为例，只有 1000，2000，0100，0200，0010，0020，0001，0002，0000 等 9 个输入组合存在，其余输入条件均是不可能发生的。其 K 图如图 1 所示。

2.2　三值互斥变量函数的图形表示

从图 1 可以看出用通常的 K 图表示三值互斥变量函数，有许多空白的格子，是一种浪费。参照二值互斥变量的讨论[3]，可以画出相应的三值四互斥变量 K 图，如图 2 所示。由图 2 可见，三值互斥变量 K 图有如下特点：

(1) n 变量的三值互斥变量的 K 图有 $2n-1$ 格，它们分别对应 x_1=1 或 2, x_2=1 或 2, $\cdots$, x_n=1 或 2, 及 $x_1=x_2=\cdots x_n=0$(称为全零格 c_0)共 $2n-1$ 种输入条件，各变量之间满足如下约束方程：$x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=0$。

(2) 在变量 x_i 插入区内 x_i=1 或 2，在 x_i 插入区外 x_i=0。

(3) 图中各格都最多被一个变量插入，从而表现出变量之间的相互排斥性(即没有一个格子同时被两个或两个以上变量插入)。

2004-03-01 收到，2005-01-07 改回
浙江省自然科学基金 (699015) 资助课题

(4) 图中除c_0格外处于不同变量括入区的任意二格之间必定有两个变量不同，因此不能合并。

(5) 图中全零格(c_0)可以与任一 x_i 括入区的两个格子合并，如c_0可与c_1，c_2格，c_3，c_6格，c_9，c_{18}格及c_{27}，c_{54}格合并化简。

一个四互斥变量的三值函数如用传统的三值K图表示，则它的K图应有3^4=81个格子(如图1)，而使用三值互斥变量K图则仅有2×4+1=9个格(如图2)。对于r值n互斥变量函数，互斥变量K图可使它的规模从r^n格压缩至$(r-1)n+1$格。

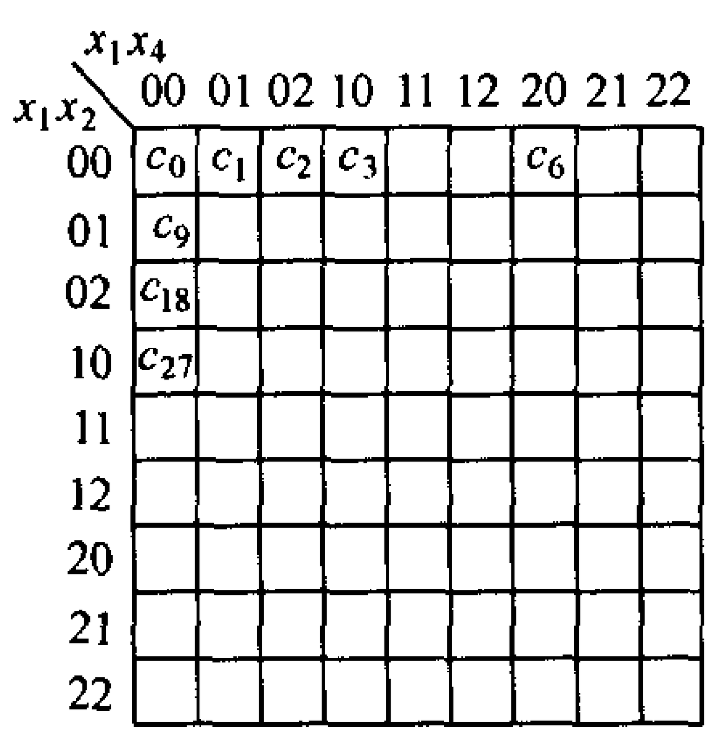


图1 三值四变量K图

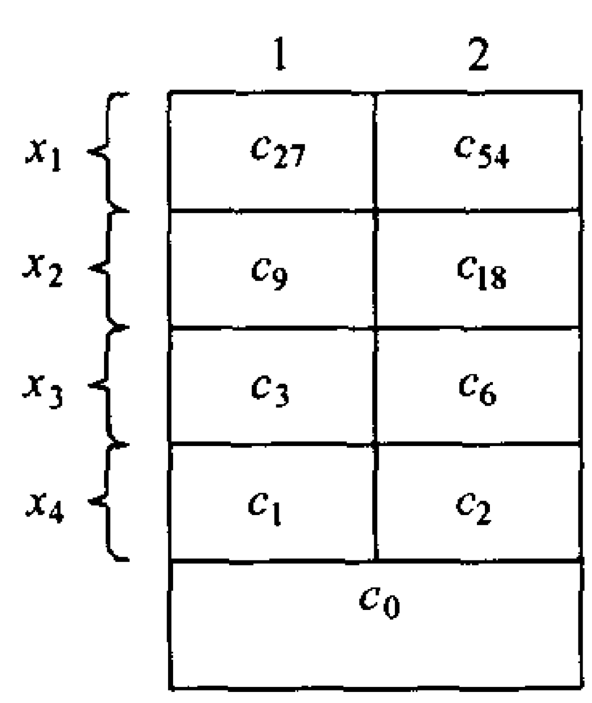


图2 三值四互斥变量K图

3 三值互斥变量函数的图形化简

三值函数的化简主要依据如下两个公式[2]:

$$\text{消变量}\quad {}^0x^0+{}^1x^1+{}^2x^2=2 \tag{1}$$

$$\text{消文字}\quad \left.\begin{array}{l}1\cdot{}^1x^1+{}^2x^2=x\\ 1\cdot{}^1x^1+1\cdot{}^2x^2=1\cdot x\end{array}\right\} \tag{2}$$

根据三值互斥变量K图特点(4)和(5)，任一x_i括入区的2个格子只能与全零格(c_0)合并。例如：若图1中c_0=0，c_1=1，c_2=1时，则通过上述式(2)化解，可得

$$1\cdot{}^0x_1^0{}^0x_2^0{}^0x_3^0{}^1x_4^1+1\cdot{}^0x_1^0{}^0x_2^0{}^0x_3^0{}^2x_4^2={}^0x_1^0{}^0x_2^0{}^0x_3^0(1\cdot{}^1x_4^1+1\cdot{}^2x_4^2)$$
$$={}^0x_1^0{}^0x_2^0{}^0x_3^0(1\cdot x_4)$$

再利用图1中所有x_3x_4=01，02，11，12，21，22的不可能出现项(即作约束)和上述式(1)，消去变量${}^0x_1{}^0\cdot{}^0x_2{}^0\cdot{}^0x_3{}^0$，最后得到$1\cdot x_4$。

若图1中C_0=1，C_1=1，C_2=1时，则

$$1\cdot{}^0x_1^0\cdot{}^0x_2^0\cdot{}^0x_3^0\cdot{}^0x_4^0+1\cdot{}^0x_1^0\cdot{}^0x_2^0\cdot{}^0x_3^0\cdot{}^1x_4^1+1\cdot{}^0x_1^0\cdot{}^0x_2^0\cdot{}^0x_3^0\cdot{}^2x_4^2$$
$$=1\cdot{}^0x_1^0\cdot{}^0x_2^0\cdot{}^0x_3^0({}^0x_4^0+{}^1x_4^1\cdot{}^2x_4^2)=1\cdot{}^0x_1^0\cdot{}^0x_2^0\cdot{}^0x_3^0$$

可见用互斥变量K图化解三值互斥变量函数，结果与全零格c_0取值有关，下面讨论全零格c_0分别取值为0, 1, 2　3种情况下，直接由K图读出三值函数最简“与/或”式的规则。

3.1 全零格c_0为0时

全零格c_0为0时，直接由三值互斥变量K图读出函数最简“与/或”式的规则为：

(1) 最简“与/或”式为各变量x_i括入区相应的“与/或”式之“或”。

(2) 如x_i括入区为12，则相应的“与/或”式为x_i。

(3) 如x_i括入区为11，则相应的“与/或”式为$1\cdot x_i$。

(4) 如x_i括入区为其它非零值，则相应的“与/或”式为$k_{i1}\cdot{}^1x_i^1+k_{i2}\cdot{}^2x_i^2$，式中$k_{i1}$对应$x_i$=1格的值，$k_{i2}$对应$x_i$=2格的值,下同。

例1 试化简图3(a)，3(b)所示互斥变量K图的三值四变量函数f_1与f_2，写出最简“与/或”式。

解 由互斥变量K图可见全零格均为0，按上述规则可读得f_1，f_2的最简“与/或”式如下：

$$f_1(x_1\sim x_4)={}^1x_1^1+{}^2x_1^2+1\cdot x_2+1\cdot{}^2x_4^2,$$
$$f_2(x_1\sim x_4)=x_1+{}^1x_2^1+1\cdot x_3+1\cdot x_4。$$

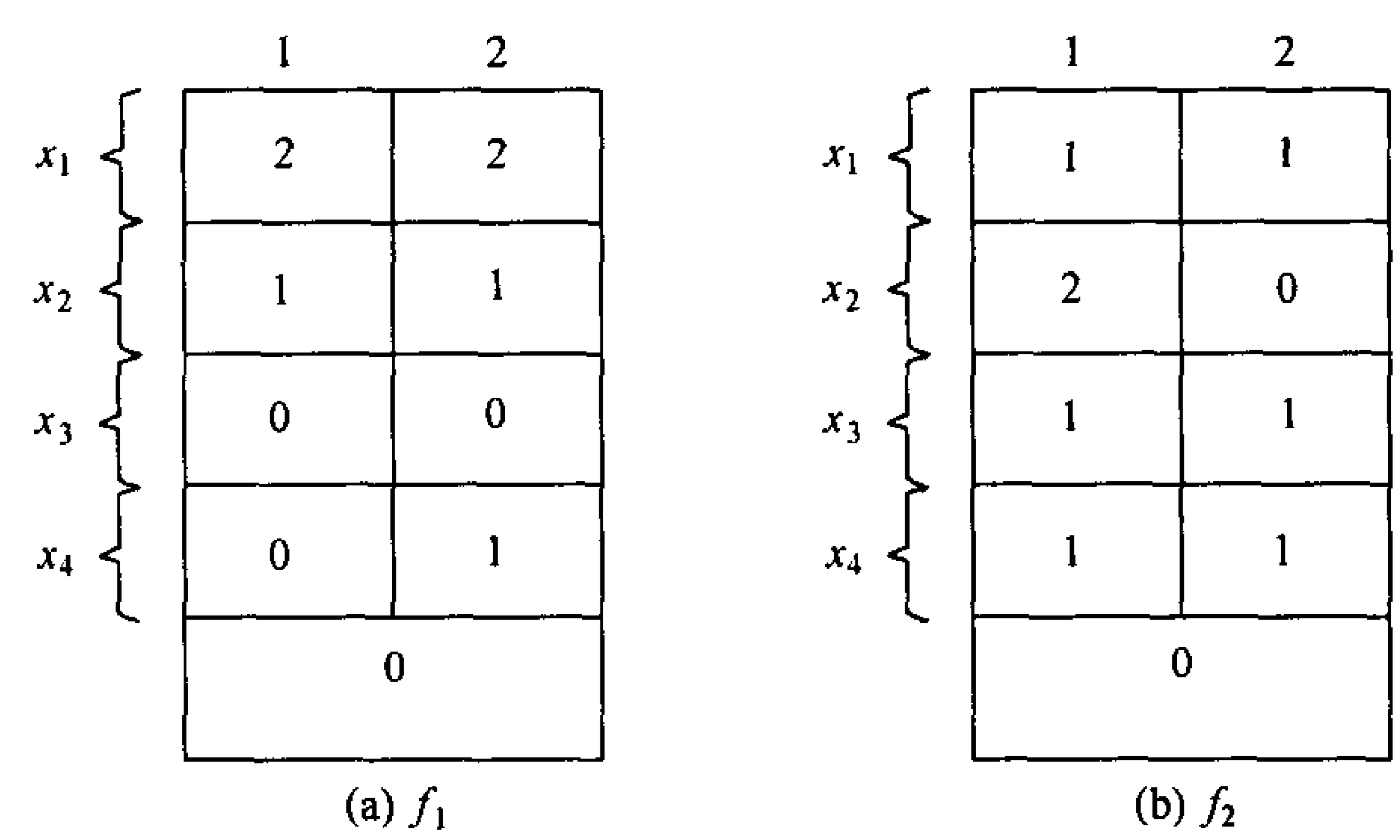


图3 f_1和f_2的互斥K图

3.2 全零格c_0为1时

设三值n互斥变量中，有r个变量$(y_1\sim y_r)$括入区内不含0值格，m个变量$(z_1\sim z_m)$括入区内至少含一个0值格，这里$r+m=n$，则最简“与/或”式按下列规则组成：

(1) 最简“与/或”式为各变量x_i括入区相应的“与/或”式之“或”。

(2) 1值全零格可与$y_1\sim y_r$合并，合并后“与/或”式为$1\cdot{}^0z_l^0{}^0z_{k2}^0\cdots{}^0z_m^0$，表示全零格与$y_1\sim y_r$括入区内1值格已被圈过。

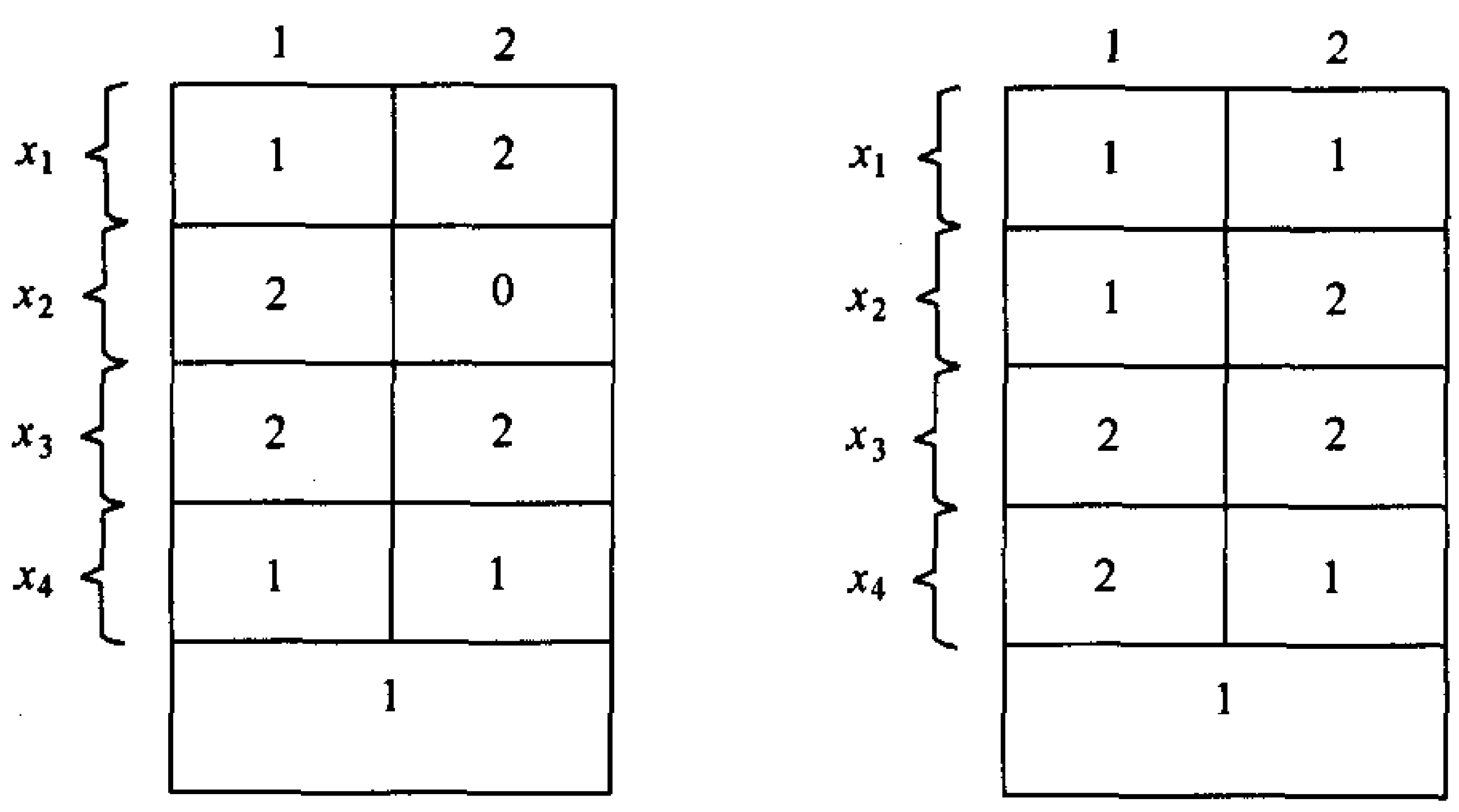
(3) 如x_i括入区为12，则相应的“与/或”式为x_i。

(4) 如x_i括入区为11，12以外的非零值，则相应的“与/或”式为$k_{i1}\cdot{}^1x_i^1+k_{i2}\cdot{}^2x_i^2$。

例2 试化简图4(a)，4(b)所示的互斥变量K图表示的三值四变量函数f_3和f_4，写出最简“与/或”式。

解 在f_3和f_4的互斥变量K图中全零格c_0均为1，f_3中x_1，x_3，x_4括入区内不含0值格，x_2括入区内含一个0值格，因此可按C_0=1的规则读得它们的最简“与/或”式：

$$f_3=1\cdot{}^0x_2^0+x_1+{}^1x_2^1+{}^1x_3^1+{}^2x_3^2$$
$$f_4=1+x_2+{}^1x_3^1+{}^2x_3^2+{}^1x_4^1$$



(a) f_3　　(b) f_4

图 4　f_3 和 f_4 的互斥 K 图

3.3 全零格 c_0=2 时

设三值 n 互斥变量中，有 r 个变量（y_1~y_r）括入区内为全 2 值格，m 个变量（z_1~ z_m）括入区内至少有一个为非 2 值格，这里 $r+m=n$，则最简“与/或”式按下列规则组成：

(1) 最简“与/或”式为各变量 x_i 括入区相应“与/或”式之“或”；

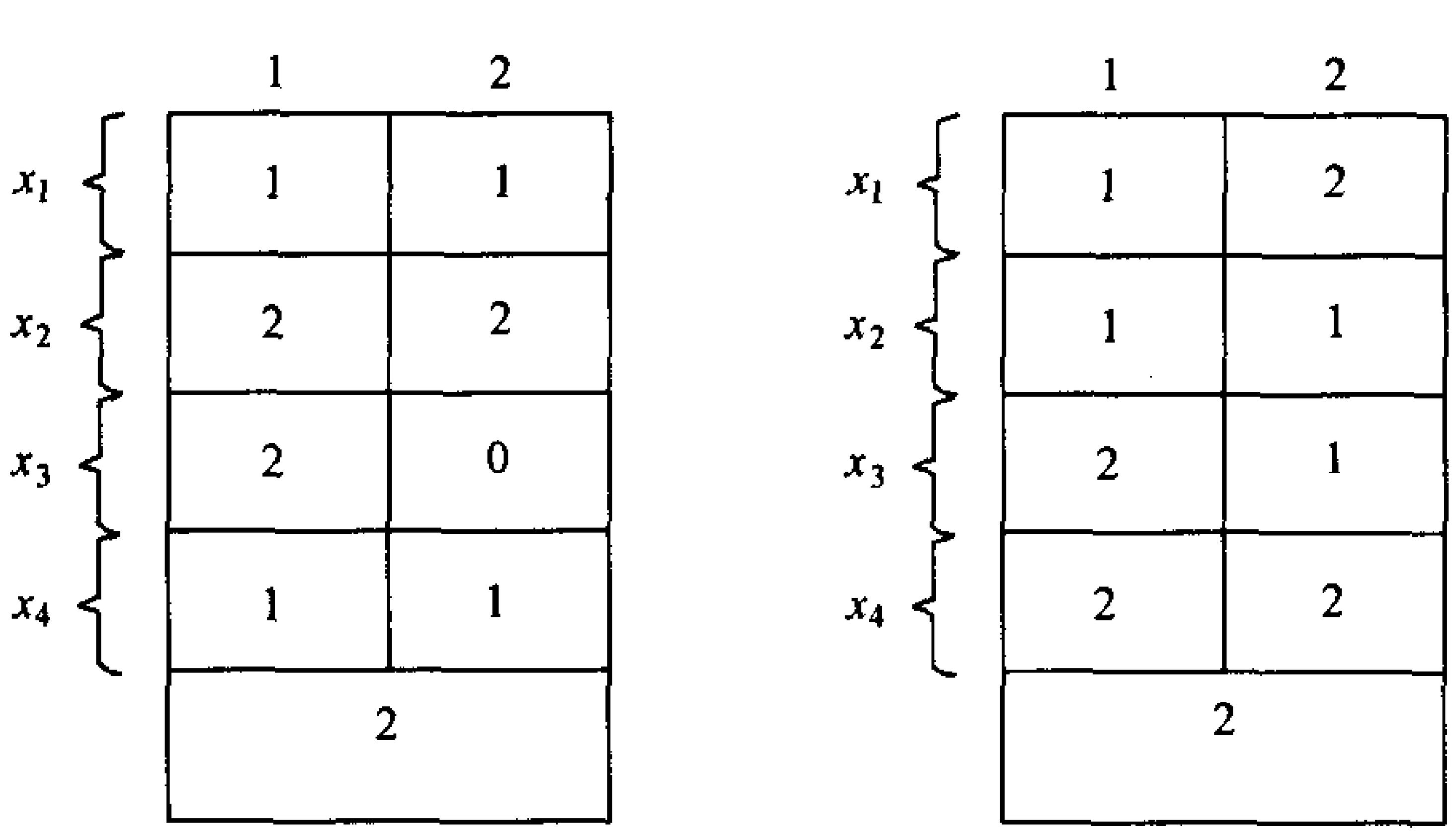
(2) 2 值全零格 c_0 可与 y_1~ y_r 合并，合并后“与/或”式为 ${}^0z_1^0{}^0z_2^0\cdots{}^0z_m^0$，表示全零值与括入区内全 2 值格均已被圈过；

(3) 如 x_i 括入区为 12，则相应“与/或”式为 x_i；

(4) 如 x_i 括入区为 11，则相应“与/或”式为 1• x_i 或按全零格取 1 时写出相应“与/或”式，然后二者比较后选最简“与/或”式。

(5) 如 x_i 括入区为 11，12 以外的非零值，则相应的“与/或”式为 $k_{i1}\cdot{}^1x_i^1+k_{i2}\cdot{}^2x_i^2$。

例 3　试化简图 5(a), 5(b)所示三值四变量函数 f_5 和 f_6，写出最简与/或式。



(a) f_5　　(b) f_6

图 5　f_5 和 f_6 的互斥 K 图

解　由于它们的互斥变量 K 图中 c_0 均为 2，f_5 中 x_2 括入区内为全 2 值格，f_6 中 x_4 括入区内为全 2 值格，因此按全零格为 2 的规则可读得

$$f_5=1\cdot x_1+{}^0x_1^0\cdot{}^0x_3^0\cdot{}^0x_4^0+{}^1x_3^1+1\cdot x_4,$$

或

$$f_5=1\cdot{}^0x_3^0+{}^0x_1^0\cdot{}^0x_3^0\cdot{}^0x_4^0+{}^1x_3^1,$$

$$f_6=1+{}^0x_1^0\cdot{}^0x_2^0\cdot{}^0x_3^0+x_1+{}^1x_3^1。$$

对于 f_5 而言，显然后者更为简化。

4　应用

二值互斥变量 K 图的化简已在逻辑电路的设计中获得了应用[4]，下面举例说明三值互斥变量 K 图的化简在多值逻辑电路设计中的应用。

例 4　设计一个三值同步序列发生器，其输出时序为表 1。

表 1　三值同步序列发生器状态转换表

现态($Q_1Q_2Q_3Q_4$)	次态 ($Q_1'Q_2'Q_3'Q_4'$)	输出信号($O_1O_2O_3O_4$)
1000	0100	1000
0100	0010	0200
0010	0001	0010
0001	2000	0002
2000	0200	1000
0200	0020	0200
0020	0002	0010
0002	1000	0002

解　根据题意，可用 4 个三值 D 触发器构成同步三值环形计数器来实现，如图 6(a)所示。关键是求出输出电路和驱动电路。为求出输出电路和驱动电路，以 Q_1~Q_4 作为输入，以 O_1~ O_4 和 D_1 作为输出，列出序列发生器输出和驱动真值表，如表 2 所示。Q_1~Q_4 是相互排斥的，所以可由表 2 得图 7 所示的互斥变量 K 图。由于全零格在表 2 中没有出现，可视为约束项，化简时可取任何值，这里取为 0。

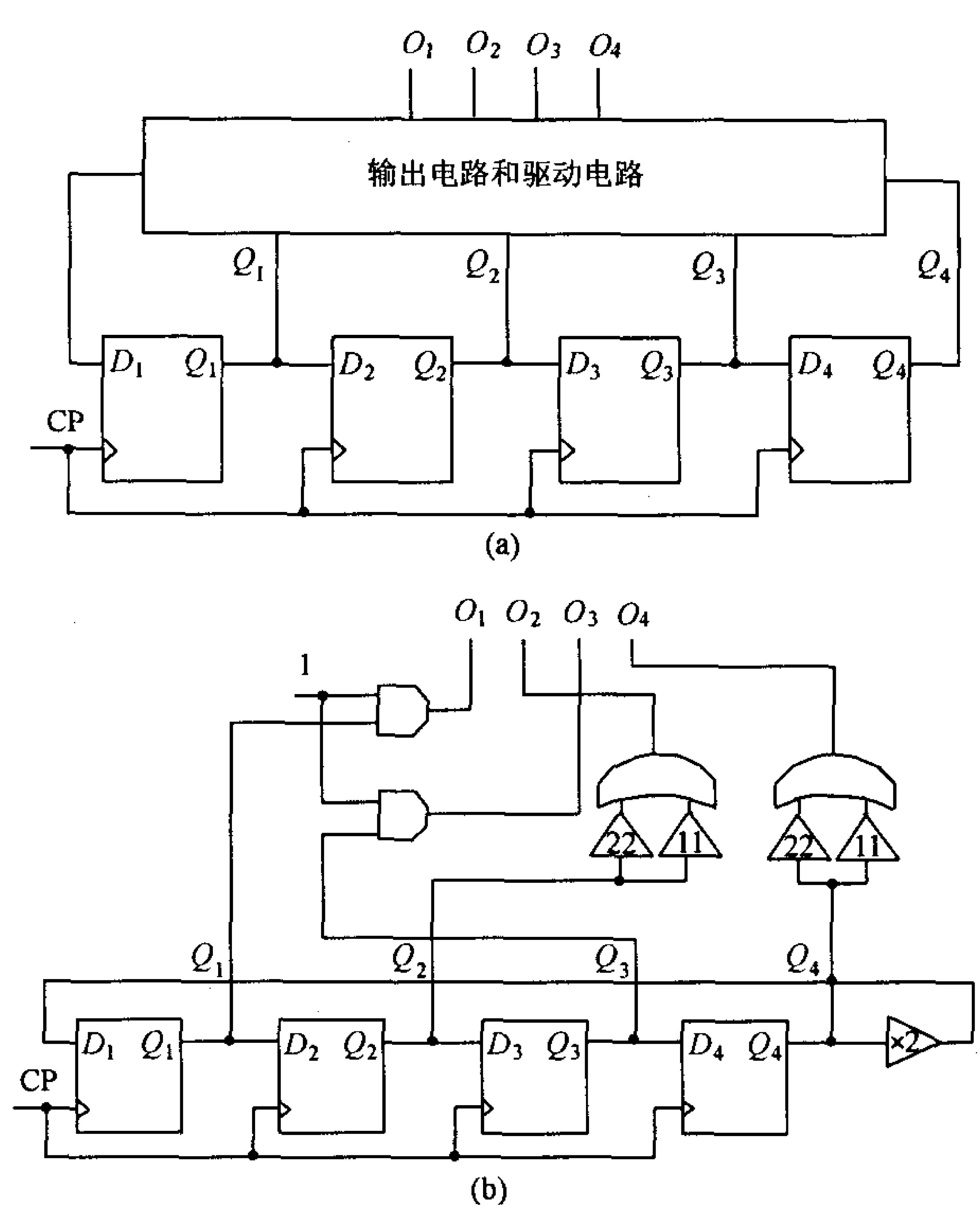


图 6　三值同步序列发生器电路

表 2 序列发生器输出和反馈电路真值表

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	D_1	O_1	O_2	O_3	O_4
1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	2	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	2	0	0	0	2
2	0	0	0	0	1	0	0	0
0	2	0	0	0	0	2	0	0
0	0	2	0	0	0	0	1	0
0	0	0	2	1	0	0	0	2

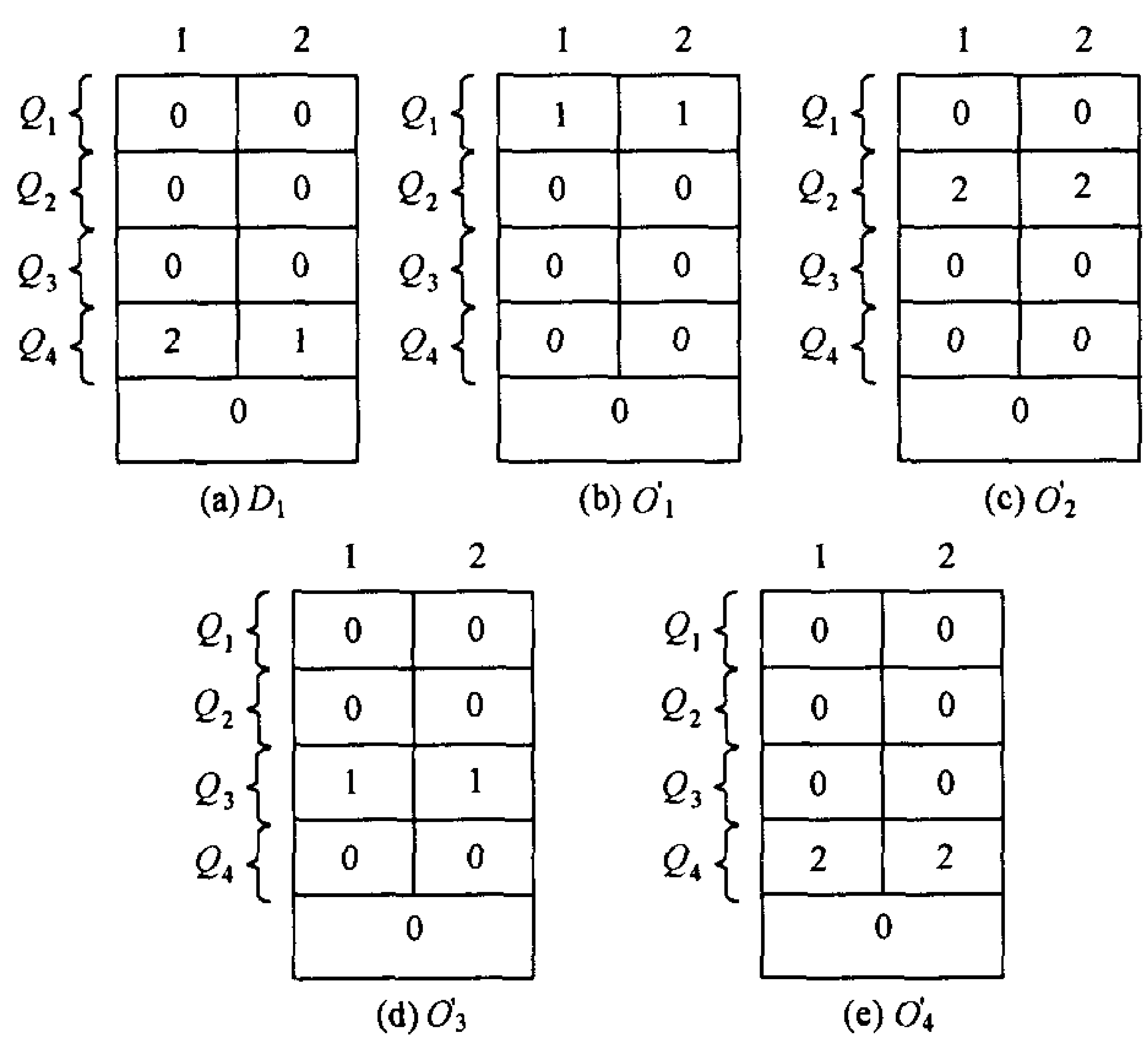


图 7 序列发生器输出电路互斥变量 K 图

通过互斥变量 K 图化简，可得下列驱动方程和输出方程：

$$D_1 = {}^1Q_4^1 + 1\cdot {}^2Q_4^2 = 2\times Q_4$$

$$O_1' = 1\cdot Q_1$$

$$O_2' = {}^1Q_2^1 + {}^2Q_2^2$$

$$O_3' = 1\cdot Q_3$$

$$O_4' = {}^1Q_4^1 + {}^2Q_4^2$$

式中“×”为乘法运算，最后，根据上面式子画出电路如图6(b)所示。

5 讨论

(1) 多值互斥变量 K 图能大大压缩 K 图规模，对于 n 互斥变量的 r 值函数，它的 K 图规模由 r^n 格压缩至 $(r-1)n+1$ 格。如 $n=r=4$, 则 K 图规模由 256 格压缩至 13 格。

(2) 全零格为 2 时的化简规则 4 中如 x_i 括入区为 11 时相应“与/或”式可按下列方法选择：如括入区为 11 的变量较多而含 0 的括入区变量很少时可按 1 值全零格的化简规则 2 写出“与/或”式；反之则可选相应“与/或”式 $1\cdot x_i$。

(3) 文中虽然仅限于讨论三值互斥变量 K 图及化简，但是可以推广应用于更高基数的多值逻辑。

参 考 文 献

[1] 陈偕雄，沈继忠. 近代数字理论. 杭州：浙江大学出版社，2001: 149 – 159.

[2] 吴训威. 多值逻辑电路设计原理. 杭州：杭州大学出版社，1994: 146 – 163.

[3] 吴训威，陈偕雄. 逻辑函数综合的图形方法研究. 杭州大学学报，1983, 10(4): 466 – 475.

[4] Prosser F, Wu X. Design of the one-zero-hot controller. *International Journal of Electronics*, 1988, 64(3): 399 – 407.

吴桂初： 男，1957 年生，副教授，主要从事电路与系统、计算机及应用方面的教学和研究.

吴 烈： 男，1968 年生，讲师，主要从事计算机及应用的教学和研究.

陈偕雄： 男，1941 年生，教授，博士生导师，主要从事电路与系统方面研究.

杭国强： 男，1968 年生，副教授，博士，主要从事电路与系统方面研究.