第11卷 第1期 电子科学学刊 Vol. 11, No. 1
1989年1月 JOURNAL OF ELECTRONICS Jan., 1989

应用电磁场"互能公式"简化电磁场公式的符号表示*

赵 双 任
(西北电讯工程学院,西安)

摘要 本文利用内积和互能公式来简化一些重要的电磁场公式的符号表示.

关键词 电磁场;内积;互能公式

1. 引言

符号是科学技术工作者交流思想的工具. 采用正确和简单的符号往往可起到事半功倍的作用. 目前电磁场的一些基本公式和定理的表达式仍较繁,本文试图将这些公式化简.

2. 基本概念

空间中的电磁场状态和场源分布分别为

$$\boldsymbol{\zeta}=\{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}\}, \qquad \boldsymbol{\tau}=\{\boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\} \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 分别为电场,磁场,电流密度和磁流密度.

共轭场、共轭源和共轭介质 设空间中某一场 $\boldsymbol{\zeta}$ 和源 $\boldsymbol{\tau}$ 满足 Maxwell 方程

$$\bar{\boldsymbol{L}}\cdot\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\tau} \tag{2}$$

式中算子 $\bar{\boldsymbol{L}}$ 定义为

$$\bar{\boldsymbol{L}}=\begin{bmatrix}-j\omega\varepsilon\bar{\boldsymbol{I}}_3 & \bar{\mathscr{D}} \\ -\bar{\mathscr{D}} & -j\omega\mu\bar{\boldsymbol{I}}_3\end{bmatrix} \tag{3}$$

式中,$\bar{\mathscr{D}}$ 由 $\bar{\mathscr{D}}\cdot\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 定义,此处 $\boldsymbol{A}$ 为任意矢量,ω 为简谐场的频率,ε, μ 分别为介电常数和磁导率. 定义共轭场 $\boldsymbol{\zeta}^+$,共轭源 $\boldsymbol{\tau}^+$,共轭介质 ε^+, μ^+,共轭算子 $\bar{\boldsymbol{L}}^+$ 为:

$$\boldsymbol{\zeta}^+=\{\boldsymbol{E}^*, -\boldsymbol{H}^*\}; \qquad \boldsymbol{\tau}^+=\{-\boldsymbol{J}^*, \boldsymbol{K}^*\} \tag{4}$$

$$\varepsilon^+=\varepsilon^*; \qquad \mu^+=\mu^* \tag{5}$$

$$\bar{\boldsymbol{L}}^+=\begin{bmatrix}-j\omega\varepsilon^+\bar{\boldsymbol{I}}_3 & \bar{\mathscr{D}} \\ -\bar{\mathscr{D}} & -j\omega\mu^+\bar{\boldsymbol{I}}_3\end{bmatrix} \tag{6}$$

式中"*"为复数共轭号、"+"为场和源等的共轭号. 可证明共轭场和共轭源在共轭介质中满足 Maxwell 方程,即:

$$\bar{\boldsymbol{L}}^+\cdot\boldsymbol{\zeta}^+=\boldsymbol{\tau}^+ \tag{7}$$

* 1987年2月21日收到,1987年7月31日修改定稿

共轭变换　在一个电磁场公式中用共轭场 $\boldsymbol{\zeta}^+$，共轭源 $\boldsymbol{\tau}^+$ 和共轭介质 ε^+，μ^+ 替换 $\boldsymbol{\zeta}$，$\boldsymbol{\tau}$ 和 ε. μ 称为共轭变换. 经共轭变换后电磁场公式仍然成立.

曲面广义内积　在闭曲面 Γ 上可定义内积:

$$[\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2]_\Gamma = \oint\!\!\oint_\Gamma (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2^* + \boldsymbol{E}_2^* \times \boldsymbol{H}_1) \cdot \hat{n} dS \tag{8}$$

式中，$\boldsymbol{\zeta}_i = \{\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{H}_i\}$，$i = 1, 2$，$\hat{n}$ 是曲面 Γ 的外法线单位矢，该内积满足内积公理[1](正定性除外，故加广义二字).

由点乘构成的内积　设 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ 为两个任意的 6 维矢量（注：可以是场也可以是源)，定义

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)_V = \int_V \sum_{i=1}^{6} \eta_{1i}\eta_{2i}^* dv \tag{9}$$

3. 电磁场互能公式与 Lorentz 互易定理

(1) 电磁场互能公式　可证明一个与矢量格林公式类似的数学公式

$$-[\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2]_\Gamma = (\bar{\boldsymbol{L}} \cdot \boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2)_V + (\boldsymbol{\zeta}_1, \bar{\boldsymbol{L}} \cdot \boldsymbol{\zeta}_2) \tag{10}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{L}}$ 由(3)式定义，此处 $\bar{\boldsymbol{L}}$ 中 ε，μ 取实数. 利用 Maxwell 方程(2)式得

$$-[\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2]_\Gamma = (\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\zeta}_2)_V + (\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\tau}_2)_V \tag{11}$$

作者称上式为电磁场互能公式，如将它写成分立形式，有

$$-\oint\!\!\oint_\Gamma (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2^* + \boldsymbol{E}_2^* \times \boldsymbol{H}_1) \cdot \hat{n} dS = \int_V (\boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2^* + \boldsymbol{K}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2^* + \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{J}_2^* + \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{K}_2^*) dv \tag{12}$$

(2) 互能公式与互易定理之间的关系　对互能公式关于角标 2 的量作共轭变换，得

$$-[\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2^+]_\Gamma = (\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\zeta}_2^+)_V + (\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\tau}_2^+)_V \tag{13}$$

改写成分立形式

$$\oint\!\!\oint (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) \cdot \hat{n} dS = \int_V (\boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{K}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{J}_2 + \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{K}_2) dv \tag{14}$$

这正是 Lorentz 互易定理. 反之在无耗媒质中对互易定理关于角标 2 的量作共轭变换可得互能公式.

4. 修正的互能公式

对各向异性或双各向异性的媒质，文献[2]用本构关系 $\bar{\boldsymbol{C}}_{EH}$ 描述

$$\bar{\boldsymbol{C}}_{EH} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} & \bar{\boldsymbol{\alpha}} \\ \bar{\boldsymbol{\beta}} & \bar{\boldsymbol{\mu}} \end{bmatrix} \tag{15}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{C}}_{EH}$ 满足 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{C}}_{EH} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$；$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$，$\bar{\boldsymbol{\mu}}$ 分别为电容率张量和磁导率张量；$\bar{\boldsymbol{\alpha}}$，$\bar{\boldsymbol{\beta}}$ 为两个电磁转换张量；$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{B}$ 分别为电位移矢量和磁感应强度矢量.

互补媒质、共轭媒质和共轭互补媒质　由本构关系 (15) 式定出的媒质所对应的互补媒质、共轭媒质和共轭互补媒质分别定义为:

$$\bar{C}^c_{EH}=\begin{bmatrix}\bar{\varepsilon}^c & \bar{\alpha}^c\\ \bar{\beta}^c & \bar{\mu}^c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\varepsilon}^t & -\bar{\beta}^t\\ -\bar{\alpha}^t & \bar{\mu}^t\end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\bar{C}^+_{EH}=\begin{bmatrix}\bar{\varepsilon}^+ & \bar{\alpha}^+\\ \bar{\beta}^+ & \bar{\mu}^+\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\varepsilon}^* & -\bar{\alpha}^*\\ -\bar{\beta}^* & \bar{\mu}^*\end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\bar{C}^d_{EH}=\begin{bmatrix}\bar{\varepsilon}^d & \bar{\alpha}^d\\ \bar{\beta}^d & \bar{\mu}^d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\varepsilon}^{t*} & \bar{\beta}^{t*}\\ \bar{\alpha}^{t*} & \bar{\mu}^{t*}\end{bmatrix} \tag{18}$$

上述媒质所对应的 Maxwell 算子分别记作 $\bar{L}, \bar{L}^c, \bar{L}^+, \bar{L}^d$，即

$$\bar{L}^f=\begin{bmatrix}-j\omega\bar{\varepsilon}^f & \mathscr{D}-j\omega\bar{\alpha}^f\\ -\mathscr{D}-j\omega\bar{\beta}^f & -j\omega\bar{\mu}^f\end{bmatrix} \tag{19}$$

式中，f 取值 $c, +, d$ 或干脆无上标．源 τ 在各种媒质中的场分别记为 ζ, ζ^c, ζ^+ 和 ζ^d，满足 Maxwell 方程

$$\bar{L}^f\cdot\zeta^f=\tau \tag{20}$$

与(10)式类似在双各向异性媒质中下式成立

$$-[\zeta_1, \zeta_2]_\Gamma=(\bar{L}\cdot\zeta_1, \zeta_2)_V+(\zeta_1, \bar{L}^d\cdot\zeta_2)_V \tag{21}$$

以 ζ_2^d 取代上式中 ζ_2，并利用(20)式，得

$$-[\zeta_1, \zeta_2^d]_\Gamma=(\tau_1, \zeta_2^d)_V+(\zeta_1, \tau_2)_V \tag{22}$$

作者称上式为修正的互能公式，将它写成分立的形式得

$$-\oint\!\!\!\oint_\Gamma(E_1\times H_2^{d*}+E_2^{d*}\times H_1)\cdot\hat{n}dS$$
$$=\int_V(J_1\cdot E_2^{d*}+K_1\cdot H_2^{d*}+E_1\cdot J_2^*+H\cdot K_2^*)dv \tag{23}$$

对上式含角标 2 的量作共轭变换，并注意到 $(\bar{C}^d_{EH})^+=\bar{C}^c_{EH}$，即共轭互补媒质经共轭变换后为互补媒质，得

$$\oint\!\!\!\oint(E_1\times H_2^c-E_2^c\times H_1)\cdot\hat{n}dv=\int_V(J_1\cdot E_2^c-K_1\cdot H_2^c-E_1\cdot J_2+H_1\cdot K_2)dv \tag{24}$$

这正是修正的互易定理[3]．

对称媒质和无耗媒质　　若一媒质 $\bar{C}_{CH}$ 与它的互补媒质相同，即 $\bar{C}_{EH}=\bar{C}^c_{EH}$，该媒质称作对称媒质；若某一媒质 $\bar{C}_{EH}$ 与它的共轭互补媒质相同，即 $\bar{C}_{EH}=\bar{C}^d_{EH}$，该媒质称作无耗媒质．在对称媒质中互易定理(14)式成立；在无耗媒质中互能公式（12）式成立．

综上所述，在双各向异性媒质中，修正的互易定理与修正的互能公式等价，但有不同的形式；而互易定理与互能公式不等价，一个仅在互补媒质中成立，一个仅在无耗媒质中成立．

5. 互能公式的应用

（1）*惠更斯原理*　　若区域 V 的边界为 Γ，$\hat{n}^{(-)}$ 为曲面 Γ 的内单位法矢，并设惠更斯源定义为

$$\tau_{S1}=\{\hat{n}^{(-)}\times H_1, -\hat{n}^{(-)}\times E_1\} \tag{25}$$

互能公式(11)可化为

$$-(\boldsymbol{\tau}_{S1}, \boldsymbol{\zeta}_2)_\Gamma = (\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\zeta}_2)_V + (\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\tau}_2)_V \tag{26}$$

此处，设源 $\boldsymbol{\tau}_1 = \{\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{K}_1\}$，$\boldsymbol{\tau}_2 = \{\hat{q}\delta(x - x_p), 0\}$，及其产生的场 $\boldsymbol{\zeta}_1 = \{\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{H}_1\}$，$\boldsymbol{\zeta}_2 = \{\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{H}_2\}$，见图 1。

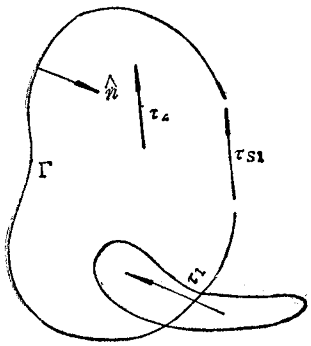

图 1 曲面、场和源

由于 $\boldsymbol{\tau}_2 = \{\hat{q}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p), 0\}$，$\boldsymbol{x}_p$ 在 V 内，$\hat{q}$ 为任意单位矢量，δ 为 Dirac δ 函数，将 $\boldsymbol{\tau}_2$ 代入(26)式可得：

$$\hat{q} \cdot \boldsymbol{E}_1 = -(\boldsymbol{\tau}_{S1}, \boldsymbol{\zeta}_2)_\Gamma - (\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\zeta}_2)_V \tag{27}$$

这便是惠更斯原理，写成分立形式有

$$\hat{q} \cdot \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x}_p) = -\oint\!\!\!\oint_\Gamma (\hat{n}^{(-)} \times \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2^* - \hat{n}^{(-)} \times \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2^*) dS$$
$$- \int_V (\boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2^* + \boldsymbol{K}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2^*) dv \tag{28}$$

(2) 并矢格林定理　设 $\bar{\boldsymbol{g}}$ 为一 6×6 的二阶张量，且满足

$$\bar{\boldsymbol{L}} \cdot \bar{\boldsymbol{g}} = \bar{\boldsymbol{I}}_6 \delta(x - x_p) \tag{29}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{L}}$ 由(3)式定义，称 $\bar{\boldsymbol{g}}$ 为 6 维并矢格林函数，记 $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\boldsymbol{I}}_6\delta(x - x_p)$，与前面类似有

$$-[\boldsymbol{\zeta}_1, \bar{\boldsymbol{g}}] = (\boldsymbol{\tau}_1, \bar{\boldsymbol{g}})_V + (\boldsymbol{\zeta}_1, \bar{\boldsymbol{\tau}})_V \tag{30}$$

式中 $\hat{n}$ 指向区域 V 外，而

$$[\boldsymbol{\zeta}_1, \bar{\boldsymbol{g}}]_\Gamma = \oint\!\!\!\oint_\Gamma \hat{n} \cdot (\boldsymbol{E}_1 \times \bar{\boldsymbol{H}}^* - \boldsymbol{H}_1 \times \bar{\boldsymbol{E}}^*) dS \tag{31}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{E}}, \bar{\boldsymbol{H}}$ 为 $\bar{\boldsymbol{g}}$ 的分块矩阵，定义为 $\bar{\boldsymbol{g}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{E}} \\ \bar{\boldsymbol{H}} \end{bmatrix}$，而

$$(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{g})_V = \int_V (\boldsymbol{J}_1 \cdot \bar{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{K}_1 \cdot \bar{\boldsymbol{H}}) dv \tag{32}$$

$(\boldsymbol{\zeta}_1, \bar{\boldsymbol{\tau}})_V$ 也有类似的定义，利用 $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ 的定义，(30)式可写为

$$\boldsymbol{\zeta}_1(\boldsymbol{x}_p) = -[\boldsymbol{\zeta}_1, \bar{\boldsymbol{g}}]_\Gamma - (\boldsymbol{\tau}_1, \bar{\boldsymbol{g}})_V \tag{33}$$

对上式作共轭变换得：

$$\boldsymbol{\zeta}_1(\boldsymbol{x}_p) = -[\boldsymbol{\zeta}_1, \bar{\boldsymbol{g}}^+]_\Gamma - (\boldsymbol{\tau}_1, \bar{\boldsymbol{g}}^+)_V \tag{34}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{g}}^+ = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{E}}^* \\ -\bar{\boldsymbol{H}}^* \end{bmatrix}$. 上式称为 6 维并矢格林定理. (33)式同样可用来求 Γ 内的场. 若 $\boldsymbol{\zeta}_1$ 的源和 $\bar{\boldsymbol{g}}$ 的源都在 V 内，由辐射条件可证明，上式右边第一项消失，即 $[\boldsymbol{\zeta}_1, \bar{\boldsymbol{g}}^+]_\Gamma = 0$. 故有

$$\boldsymbol{\zeta}_1(\boldsymbol{x}_p) = -(\boldsymbol{\tau}_1, \bar{\boldsymbol{g}}^+)_V \tag{35}$$

自由空间中的 6 维并矢格林函数为：

$$\bar{\boldsymbol{g}} = \begin{bmatrix} -j\omega\mu\bar{\boldsymbol{G}} & -\nabla \times \bar{\boldsymbol{G}} \\ \nabla \times \bar{\boldsymbol{G}} & -j\omega\varepsilon\bar{\boldsymbol{G}} \end{bmatrix} \tag{36}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{G}} = \left(\bar{\boldsymbol{I}}_3 + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G_0$，$G_0 = e^{-jkr}/(4\pi r)$，$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$，$r = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p\|$.

6. 结论

利用内积和互能公式，一些重要的电磁场公式都可以用十分紧凑的形式表达出来，这

样的表达式对于理解，记忆和计算机编程序都有很大帮助。

参　考　文　献

[1] 郑维行，突变函数与泛函分析概要，人民教育出版社，1980 年，第 159—181 页.
[2] J. A. 孔，电磁场理论，人民教育出版社，1980 年，第 6 页.
[3] J. A. 孔，电磁场理论，人民教育出版社，1980 年，第 170 页.

THE SIMPLIFICATION OF FORMULAS OF ELECTROMAGNETIC FIELDS BY USING "MUTUAL ENERGY FORMULA"

Zhao Shuangren
(Northwest Telecommunication Engineering Institute, Xi'an)

Abstract The expression of a few important formulas of electromagnetic fields are simplified by using the inner product and mutual energy formula.

Key words Electromagnetic fields; Inner product; Mutual energy formula