

二维摆动磁场自由电子激光自发 辐射的频谱特性*

彭良福 杨中海 刘盛纲

(电子科技大学高能电子学研究所,成都 610054)

摘要 本文对二维摆动磁场自由电子激光的自发辐射频谱进行了理论分析,并对分析结果进行了数值计算。计算结果表明,采用 $l(k_x = k_y)$ 值不同的二维摆动磁场,可以增强第 l 次谐波的自发辐射强度,从而能够有选择地实现自由电子激光的高次谐波运转。

关键词 自由电子激光;二维摆动磁场;频谱特性;高次谐波

一、引言

随着自由电子激光(FEL)在非军事领域应用的发展,人们更加重视对如何获得短波长(紫外或X射线)自由电子激光输出的研究^[1,2]。利用相干谐波发生的方法最近已获得三次谐波(177 nm)和五次谐波(106 nm)的输出,使自由电子激光的波长达到了真空紫外区^[3]。

采用二维摆动磁场(TDU)的自由电子激光是获得高次谐波,从而缩短输出波长的一种新途径^[4]。我们已用 Madey 定理分析了二维摆动磁场自由电子激光在观测角 $\theta = 0$ 情况下的谐波特性。在本文中,我们考虑 $\theta \neq 0$ 情况下二维摆动磁场自由电子激光的辐射特性。从理论上分析了相对论性电子通过二维摆动磁场时的自发辐射频谱,并对理论分析结果进行了计算和讨论。

二、理论分析

采用旁轴近似,二维摆动磁场旁轴区域的磁场可表示为

$$B_w = B_{x0} \sin k_x z t + B_{y0} \sin k_y z t \quad (1)$$

式中 B_{x0}, B_{y0} 分别为 x, y 方向的磁场强度; $k_{x,y} = 2\pi/\lambda_{x,y}, \lambda_{x,y}$ 分别为 x, y 方向磁场的周期长度。相应的辐射电磁场分别为

1992.04.21收到,1992.07.23定稿。

* 国家 863 高技术计划强激光技术领域和国家教委博士点基金资助课题。

彭良福 男,1966年生,博士研究生,从事自由电子激光及其应用的研究工作。

杨中海 男,1944年生,教授,主要从事相对论电子学、微波电子学、等离子体电子学、PIC模拟等学科的研究。

刘盛纲 男,1933年生,教授,博士生导师,中国科学院学部委员,从事微波电子学、电子回旋脉塞、自由电子激光和相对论电子学等领域的研究工作。

$$E_x = E_y \cos \phi_2 \hat{x} - E_z \cos \phi_1 \hat{y} \tag{2a}$$

$$E_y = B_x \cos \phi_1 \hat{x} + B_y \cos \phi_2 \hat{y} \tag{2b}$$

其中 $\phi_{1,2} = s\omega_0 t - sk_0 z + \phi_{1,2}$, s 为谐波次数, ω_0, k_0 分别为基波的频率和波数, $\phi_{1,2}$ 为初位相.

电子在场中的运动由 Lorentz 方程确定. 略去辐射电磁场对电子运动的影响, Lorentz 方程为

$$m d(\gamma v) / dt \approx -(|e|/c) v \times B_0 \tag{3}$$

式中 γ 为相对论因子, $m, |e|$ 分别为电子的静止质量和电荷量. 设电子沿 z 轴运动且 γ 为常数, 在理想注入的条件下积分上式可得

$$\beta(t) \approx -\frac{K_y}{\gamma} \cos \omega_x t \hat{x} + \frac{K_x}{\gamma} \cos \omega_x t \hat{y} + \left[1 - \frac{1}{4\gamma^2} (K_x^2 \cos 2\omega_x t + K_y^2 \cos 2\omega_x t) \right] \hat{z} \tag{4}$$

$$r(t) \approx -\frac{K_y}{\gamma k_x} \sin \omega_x t \hat{x} + \frac{K_x}{\gamma k_x} \sin \omega_x t \hat{y} + \left[ct - \frac{1}{8\gamma^2} \left(\frac{K_x^2}{k_x} \sin 2\omega_x t + \frac{K_y^2}{k_y} \sin 2\omega_x t \right) \right] \hat{z} \tag{5}$$

式中 K_x, K_y 分别为摆动磁场 x, y 方向的偏离系数, 且有

$$K_x = |e| B_{x0} / (mc^2 k_x)$$

$$K_y = |e| B_{y0} / (mc^2 k_y)$$

$$\omega_x = k_x c, \quad \omega_y = k_y c$$

为便于计算且不失一般性, 假定 $k_y = lk_x$ (l 为整数), 即二维摆动磁场 x 方向磁场周期长度是 y 方向磁场周期长度的整数倍. 由 Doppler 频移公式知谐振条件为

$$\omega_0 = \omega_x \frac{2\gamma^2}{1 + (K_x^2 + K_y^2)/2 + \gamma^2 \theta^2} - \frac{\omega_y}{l} \frac{2\gamma^2}{1 + (K_x^2 + K_y^2)/2 + \gamma^2 \theta^2} \tag{6}$$

选取图 1 所示的坐标系, 图中 \hat{n} 为观测方向单位矢量, θ 为观测方向 \hat{n} 与 z 轴之间的夹角, ϕ 为 \hat{n} 在 x, y 平面内的投影与 x 轴的夹角.

$$\hat{n} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \tag{7}$$

我们知道, 单个电子在单位频率间隔单位立体角内自发辐射的能量为^[5]

$$\frac{d^2 I}{(d\omega d\Omega)} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left\{ \hat{n} \times (\hat{n} \times \beta) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\hat{n} \cdot r}{c} \right) \right] \right\} \right|^2 \tag{8}$$

将 (4), (5), (7) 式代入上式, 按照文献 [6] 中的方法经过一系列复杂的运算后得

$$\frac{d^2 I}{(d\omega d\Omega)} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c \omega_x^2} \left[\frac{\sin^2(\omega/\omega_0 - s) N \pi}{(\omega/\omega_0 - s)^2} \right] \tag{9}$$

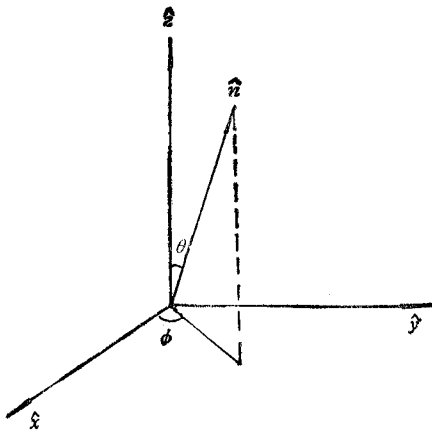


图 1 观测方向与直角坐标的关系

其中

$$\begin{aligned}
 \left[\right] = & \sin^2\theta A_0^2 + (\sin^2\theta \cos^2\phi + \cos^2\theta) \frac{K_x^2}{\gamma^2} A_1^2 \\
 & + (\sin^2\theta \sin^2\phi + \cos^2\theta) \frac{K_y^2}{\gamma^2} A_1^2 + \sin^2\theta \frac{K_x^2}{16\gamma^4} A_2^2 \\
 & + \sin^2\theta \frac{K_y^2}{16\gamma^4} A_2^2 - \sin 2\theta \sin \phi \frac{K_x}{\gamma} A_0 A_1 \\
 & + \sin 2\theta \cos \phi \frac{K_y}{\gamma} A_0 A_1 - 2 \sin^2\theta \frac{K_x^2}{4\gamma^2} A_0 A_2 \\
 & - 2 \sin^2\theta \frac{K_y^2}{4\gamma^2} A_0 A_2 - \sin 2\theta \cos \phi \frac{K_x K_x^2}{4\gamma^3} A_1 A_2 \\
 & + \sin 2\theta \sin \phi \frac{K_x K_y^2}{4\gamma^3} A_1 A_2 + \sin 2\theta \sin \phi \frac{K_x^3}{4\gamma^3} A_1 A_2 \\
 & - \sin 2\theta \cos \phi \frac{K_y^3}{4\gamma^3} A_1 A_2 + \sin^2\theta \sin 2\phi \frac{K_x K_y}{\gamma^2} A_1 A_1 \\
 & + 2 \sin^2\theta \frac{K_x K_y^2}{16\gamma^4} A_2 A_2
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 A_i = & \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(-\xi) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_q\left(-\frac{s}{l} \theta_y\right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(-s\theta_x) \\
 & \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [J_{n-i}(-\zeta) + J_{n+i}(-\zeta)]
 \end{aligned} \tag{11}$$

式中 J 为第一类 Bessel 函数, 且有 $s = 2m + 2ql + pl - n$

$$\begin{aligned}
 \zeta = & \frac{\omega}{\omega_x} \frac{K_x}{\gamma} \sin \theta \sin \phi = s \frac{2K_x \gamma}{1 + (K_x^2 + K_y^2)/2 + \gamma^2 \theta^2} \sin \theta \sin \phi \\
 \xi = & \frac{\omega}{\omega_y} \frac{K_y}{\gamma} \sin \theta \cos \phi = \frac{s}{l} \frac{2K_y \gamma}{1 + (K_x^2 + K_y^2)/2 + \gamma^2 \theta^2} \sin \theta \cos \phi \\
 \theta_x = & \frac{K_x^2}{4[1 + (K_x^2 + K_y^2)/2 + \gamma^2 \theta^2]} \cos \theta \\
 \theta_y = & \frac{K_y^2}{4[1 + (K_x^2 + K_y^2)/2 + \gamma^2 \theta^2]} \cos \theta
 \end{aligned}$$

(9) 式即为电子的自发辐射频谱公式。当 $K_x = 0$ 时, 即仅存在一维摆动磁场的情况下,

(10) 式简化为

$$\begin{aligned}
 \left[\right] = & \sin^2\theta A_0^2 + (\sin^2\theta \sin^2\phi + \cos^2\theta) \frac{K_y^2}{\gamma^2} A_1^2 + \sin^2\theta \frac{K_y^2}{16\gamma^4} A_2^2 \\
 & + \sin 2\theta \cos \phi \frac{K_y}{\gamma} A_0 A_1 - 2 \sin^2\theta \frac{K_y^2}{4\gamma^2} A_0 A_2 - \sin 2\theta \cos \phi \frac{K_y^3}{4\gamma^3} A_1 A_2
 \end{aligned}$$

其中

$$A_i = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(-\xi) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_q\left(-\frac{s}{l} \theta_y\right) (\delta_{s, 2q+p+i} + \delta_{s, 2q+p-i})$$

此即文献 [7] 中一维摆动磁场自由电子激光的自发辐射频谱公式。当观测角 $\theta = 0$ 时, (10) 式简化为

$$\left[\quad \right] = \frac{K_x^2}{\gamma^2} A_1^2 + \frac{K_y^2}{\gamma^2} A_1^2$$

其中

$$A_1 = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_q\left(\frac{s}{l}\theta_y\right) (-1)^{q+l+\frac{l-1}{2}} [J_{q+l-\frac{l-1}{2}}(s\theta_x) - J_{q+l+\frac{l+1}{2}}(s\theta_x)]$$

$$A_2 = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(s\theta_x) (-1)^{\frac{1}{2}(p+\frac{l}{2})-\frac{1}{2}} \left[J_{\frac{1}{2}(p+\frac{l}{2})-\frac{1}{2}}\left(\frac{s}{l}\theta_y\right) - J_{\frac{1}{2}(p+\frac{l}{2})+\frac{1}{2}}\left(\frac{s}{l}\theta_y\right) \right]$$

此即用 Madey 定理导出的 $\theta = 0$ 情况下的结果。

三、计算结果和讨论

为了分析二维摆动磁场自由电子激光的自发辐射特性,我们分别在 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi/2$ 两种情况下对 (9) 式进行了计算。当 $\phi = 0$ 时, (10) 式简化为

$$\left[\quad \right] = \sin^2\theta A_0^2 + \frac{K_x^2}{\gamma^2} A_1^2 + \cos^2\theta \frac{K_y^2}{\gamma^2} A_1^2 + \sin^2\theta \frac{K_x^4}{16\gamma^4} A_2^2$$

$$+ \sin^2\theta \frac{K_y^4}{16\gamma^4} A_2^2 + \sin 2\theta \frac{K_y}{\gamma} A_0 A_1 - 2\sin^2\theta \frac{K_x^2}{4\gamma^2} A_0 A_2$$

$$- 2\sin^2\theta \frac{K_y^2}{4\gamma^2} A_0 A_2 - \sin 2\theta \frac{K_y K_x^2}{4\gamma^3} A_2 A_1$$

$$- \sin 2\theta \frac{K_y^3}{4\gamma^3} A_1 A_2 + 2\sin^2\theta \frac{K_x^2 K_y^2}{16\gamma^4} A_2 A_2$$

其中

$$A_i = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(-\xi) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_q\left(-\frac{s}{l}\theta_y\right) \left[J_{q-l-\frac{l-p+i}{2}}(s\theta_x) + J_{q-l-\frac{l-p-i}{2}}(s\theta_x) \right]$$

$$\xi = \frac{s}{l} \frac{2K_y \gamma}{1 + (K_x^2 + K_y^2)/2 + \gamma^2 \theta^2} \sin \theta$$

当 $\phi = \pi/2$ 时, (10) 式简化为

$$\left[\quad \right] = \sin^2\theta A_0^2 + \frac{K_x^2}{\gamma^2} A_1^2 + \cos^2\theta \frac{K_y^2}{\gamma^2} A_1^2 + \sin^2\theta \frac{K_x^4}{16\gamma^4} A_2^2$$

$$+ \sin^2\theta \frac{K_y^4}{16\gamma^4} A_2^2 - \sin 2\theta \frac{K_x}{\gamma} A_0 A_1 - 2\sin^2\theta \frac{K_x^2}{4\gamma^2} A_0 A_2$$

$$- 2\sin^2\theta \frac{K_y^2}{4\gamma^2} A_0 A_2 + \sin 2\theta \frac{K_x K_y^2}{4\gamma^3} A_1 A_2$$

$$+ \sin 2\theta \frac{K_x^3}{4\gamma^3} A_1 A_2 + 2\sin^2\theta \frac{K_x^2 K_y^2}{16\gamma^4} A_2 A_2$$

其中

$$A_i = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(-\zeta) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_q\left(-\frac{s}{l}\theta_y\right) \left[J_{q l - \frac{s+p+i}{2}}(s\theta_x) + J_{q l - \frac{s+p-i}{2}}(s\theta_x) \right]$$

$$\zeta = s \frac{2K_x \gamma}{1 + (K_x^2 + K_y^2)/2 + \gamma^2 \theta^2} \sin \theta$$

图2—图4为 $\gamma = 1370$ ($E = 700$ MeV), $K_x = K_y = 1$ 时, $l = 1, 2, 3$ 三种情况下各次谐波的自发辐射密度 $d^2I/(d\omega d\Omega)$ 随观测角 θ 的变化情况。

由图 2 可知, 当 $K_x = K_y$, 且 $l = 1$ 时, 亦即采用 x, y 方向磁场强度和磁场周期长度均相等的二维摆动磁场时, 在 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi/2$ 两种情况下的 $d^2I/(d\omega d\Omega)-\theta$ 曲线完全相同。这是因为当 x, y 方向磁场结构均相同时, 旋转 $\pi/2$ 后其磁场结构仍然不变, 因而 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi/2$ 两种情况下的 $d^2I/(d\omega d\Omega)-\theta$ 曲线相同。同时我们还看到基波和奇次谐波的辐射集中在靠近 z 轴的狭小夹角内, 而偶次谐波在 z 轴上 ($\theta = 0$) 的辐射为零, 但在 $\theta \neq 0$ 处存在偶次谐波辐射。这种情况同一维摇摆场的情况相似^[9]。

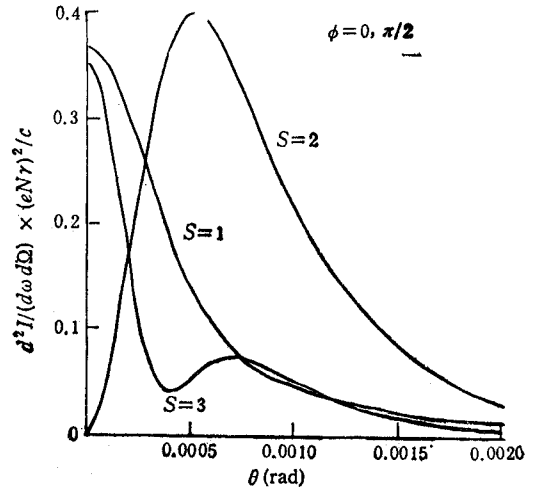
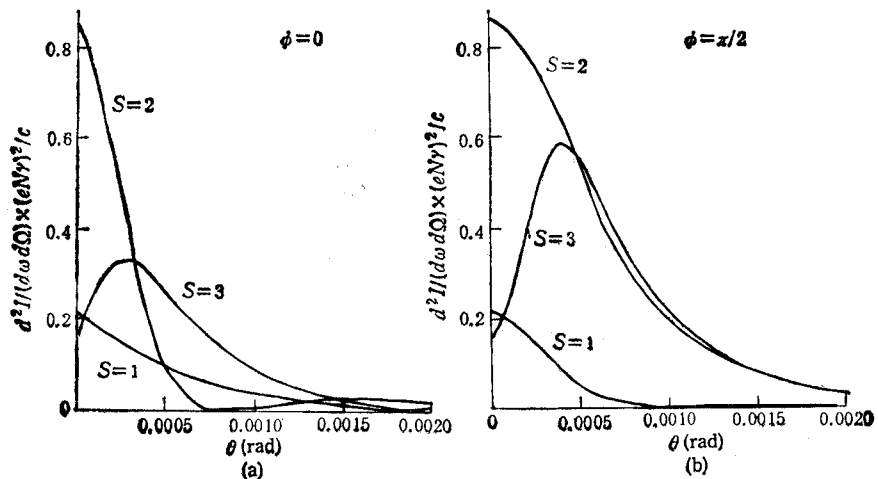


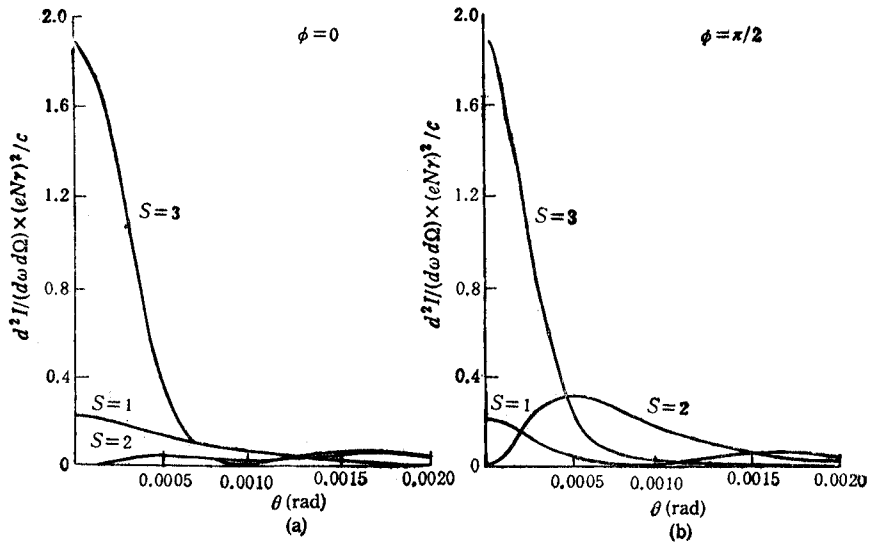
图 2 当 $l = 1, \phi = 0, \pi/2$ 时, $d^2I/(d\omega d\Omega)-\theta$ 关系曲线

从图 3(a), 3(b) 可知, 当 $l = 2$ 时在轴上 ($\theta = 0$) 既存在偶次谐波又存在奇次谐波, 且二次谐波在轴上的辐射大于基波和其它谐波的辐射。

由图 4(a), 4(b) 可知, 当 $l = 3$ 时, 与 $l = 1$ 的情况相比, 相同的是在轴上 ($\theta = 0$) 仅存在基波和奇次谐波辐射, 偶次谐波的辐射在 $\theta \neq 0$ 处存在; 不同的是在 $l = 3$ 的情况



(a) 当 $l = 2, \phi = 0$ 时, $d^2I/(d\omega d\Omega)-\theta$ 关系曲线 (b) $l = 2, \phi = \pi/2$ 当 $d^2I/(d\omega d\Omega)-\theta$ 关系曲线
图 3



(a) 当 $l=3, \phi=0$ 时, $d^2I/(d\omega d\Omega)-\theta$ 关系曲线 (b) 当 $l=3, \phi=\pi/2$ 时, $d^2I/(d\omega d\Omega)-\theta$ 关系曲线
图 4

下,三次谐波的辐射大于基波和其它谐波的辐射。

综上所述可知,当 l 为奇数时,在轴上 ($\theta=0$) 仅存在奇次谐波辐射;当 l 为偶数时,在轴上既有奇次谐波又有偶次谐波存在。因而采用 l 为偶数的二维摆动磁场在轴上 ($\theta=0$) 既可获得奇次谐波又可获得偶次谐波^[4]。同时,要获得第几次谐波则应选取 l 等于几的二维摆动磁场。这样可以抑制基波和其它不需要的谐波,而我们所希望得到的第 l 次谐波则较强。这与采用组合型 Wiggler 选择谐波辐射的结论相类似^[9]。因此采用二维摆动磁场可以有选择性地实现自由电子激光的高次谐波运转,从而缩短自由电子激光的输出波长。

值得指出的是,本文未对电子运动的稳定性进行研究。这个问题我们将采用非线性理论在另文中予以分析和讨论。

参 考 文 献

- [1] B. G. Danly et al., *IEEE J. of QE*, **QE-23**(1987)10, 1739—1749.
- [2] R. Rampont et al., *Nucl. Inst. & Methods in Phys. Res.*, **A239**(1985)1, 386—389.
- [3] R. Prazeres et al., *IEEE J. of QE*, **QE-27**(1991)4, 1061—1068.
- [4] A. A. Varfolomeev, M. M. Pitalev, *Nucl. Inst. & Methods in Phys. Res.*, **A304**(1991)1, 507—511.
- [5] 刘盛纲,相对论电子学,科学出版社,北京,1987年,第448页。
- [6] B. M. Kincaid, *J. Appl. Phys.* **48**(1977)7, 2684—2691.
- [7] W. B. Colson, *Phys. Rev.*, **A31**(1985)2, 828—842.
- [8] J. Koch, *Ernst-Eckhard Handbook on Synchrotron Radiation*, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, (1983), p. 156.
- [9] R. W. Warren, N. Piovella, *Nucl. Inst. & Methods in Phys. Res.*, **A304**(1991)2, 696—699.

ANGULAR SPECTRUM PROPERTY OF SPONTANEOUS EMISSION IN A TWO-DIMENSIONAL UNDULATOR FREE-ELECTRON LASER

Peng Liangfu Yang Zhonghai Liu Shenggang

(University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054)

Abstract The angular spectrum of spontaneous emission in a two-dimensional undulator free-electron laser is analyzed theoretically. Numerical calculation shows that the s -th harmonic spontaneous emission power density can be greatly enhanced by using a two-dimensional undulator, for which $l=s$, so the harmonic number can be selected by selecting l . Therefore, the higher harmonic operation of a free-electron laser can be realized selectively.

Key words Free-electron laser; Two-dimensional undulator; Spectrum property; Higher harmonic