

不规则边界问题的区域分解法*

潘生根

(上海科技大学无线电系)

提 要

本文根据明晰的物理概念,提出了求解具有不规则边界传输线特性阻抗的区域分解法.实际上,这是将不规则边界问题的求解工程化,也就是把不规则边界问题分解为比较规则图形的边界问题来处理.为了说明方法的具体运用,文中分析了特殊截面传输线问题,并通过与文献中的结果比较和理论分析,以证实其准确性和实用性.

一、引 言

在电磁工程以及具有相同数学模型的工程技术领域中,常出现不规则边界问题.随着电磁工程技术的迅速发展和广泛应用,促使人们研究新的计算方法,使问题能得到更精确的解^[1-13].本文提出求解不规则边界问题的区域分解法,将不规则截面分解为比较规则图形的组合,来处理不规则边界问题.

二、不规则截面的区域分解法

区域分解法已广泛应用于求解具有对称结构的特殊截面传输线问题,但直到现在,这种方法尚未推广到一般的不规则截面的边界问题.本文尝试从场形分布的结构来研究这个问题.

本文所提出的方法是基于这样一个基本概念,即在良导体边界,电场的切向分量为零,只存在垂直分量.如不规则截面同轴传输线的内、外导体边界上的法向矢量重合在一条直线上,则相应的电力线应接近于直线分布(图形完全对称时为直线分布).作为近似,将这些边界曲线上法向矢量重合的点的电场分布看作直线分布,由此不规则截面可划分为若干个具有比较简单几何形状的子区域,不规则截面传输线的总电容则是各子区域的电容值的代数和.

为了以后讨论的方便,在进行具体的数值计算和比较之前,首先给出两个重要性质.

性质 1 如求得的各子区域的电容值是准确值或下限值,则它们的代数和是不规则截面边界问题电容值的下限,即求得的特性阻抗是上限值.

* 1986年5月2日收到,1987年1月2日修改定稿.

上述性质从物理概念看是很明显的, 因为非对称图形的法向矢量重合的点附近的电场分布是凸形曲线(如图 1 所示), 如按直线分布处理, 实质上是忽略了子区域分解线附近的杂散电容(或边缘电容), 因而区域分解法求出的复杂截面传输线的电容值是准确值的下限。

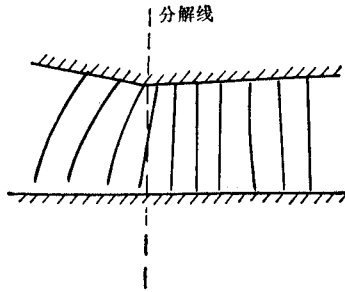


图 1 场形结构和分解线

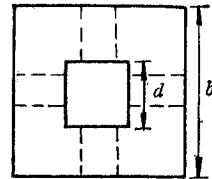
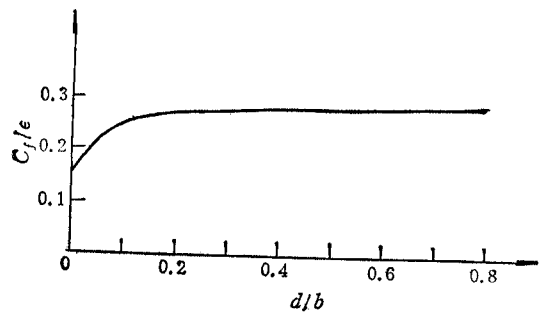


图 2 正方形同轴传输线截面图

下面以图 2 所示的正方形同轴传输线为例加以说明。方形线的总电容可看作是平板电容 C_f 和角电容 C_f 组成。 C_f 是内外导体直径比 d/b 的渐增函数(图 3)。

由区域分解法, 将方形线每条边的中间分割出一部分平板电容, 剩下的四个 L 形区域仍可组合成一个方形线, 但内外导体直径比 d/b 减少。由图 3 可知, 相应的角电容 C_f 值减小, 所以由区域分解法求出的电容值是准确值的下限。

性质 2 区域分解法的方法误差是随着复杂截面内、外导体间距的减少而单调减少。

图 3 C_f 与 d/b 的关系曲线

由于电力线在良导体边界上只有垂直分量, 随着内外导体间距的减小, 子区域分解线附近的电场分布更趋于直线分布, 所以区域分解对原场形结构的扰动减弱, 即方法的误差减小。从另一角度看, 随着间距减小, 分解线两边区域的场形分布的相互影响减弱, 分解后的子区域的场形分布更趋于原复杂区域的场形分布, 因而方法的误差减小。上述性质亦可从方形同轴传输线到数值验证。如用区域分解法从方形线中间分割出的平行板的宽度不变, 随着内外导体间距减小(即 d/b 增大), 剩下的 L 形区域组成的方形线的 d/b 值与原有值的差值减少, 所以相应的角电容 C_f 更趋于真值, 则方法误差减小。

由于静电场的电容问题是如下泛函的极小值问题^[2],

$$\lambda = C/\epsilon = \int_R \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi dV, \quad (1)$$

式中 φ 在 R 中和边界 s 上连续, 在 R 中 φ 具有分段连续的一阶偏导数。在数学上, 性质 1 给出了求解复杂边值问题泛函(1)式的极小值的下限的一种新方法, 即先将复杂区域 R 分解为 n 个子区域 r_i , 如求出泛函

$$\lambda_i = \int_{r_i} \nabla g_i \cdot \nabla g_i dV \quad (2)$$

(式中 g_i 在 r_i 中有分段连续的一阶偏导数,) 在边界 s 上满足 Dirichlet 条件, 在分解线上满足 Neumann 条件, 则全体 λ_i 的代数和是泛函 (1) 式的极小值的下限. 同样, 由性质 2 可知, 随着边界 s_1 和 s_0 的间距减小, 下限值逐渐接近极小值.

值得指出, 上述的性质是从物理概念和数值例子的论证得到. 下面将用本节的方法求解特殊截面传输线问题.

三、若干特殊规则截面传输线组合成的不规则边界问题

实际应用的许多传输线, 可归结为若干特殊规则截面传输线组合成的不规则边界问题. 下面选用圆形内导体槽形线和矩形内导体槽形线为例, 具体阐述本文方法的运用.

1. 圆形内导体槽形传输线

由区域分解法, 圆形内导体槽形传输线 (图 4) 可近似地分解为由矩形外导体-圆形内导体传输线的一半和平行板外导体-圆形内导体传输线的一半组成. 总电容为

$$C = \frac{1}{2} (C_{\text{矩-圆}} + C_{\text{平-圆}}), \quad (3)$$

式中 $C_{\text{矩-圆}}$ 和 $C_{\text{平-圆}}$ 分别是矩形外导体-圆形内导体传输线和平行板外导体-圆形内导体传输线的电容值.

圆形内导体槽形传输线的特性阻抗值为

$$Z = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{C} = \frac{2}{1/Z_{\text{矩-圆}} + 1/Z_{\text{平-圆}}}. \quad (4)$$

由 (4) 式算出的特性阻抗值与文献 [1] 中求精确值的比较结果列于表 1. (4) 式中 $Z_{\text{矩-圆}}$ 采用林-钟法的结果, $Z_{\text{平-圆}}$ 采用 Wheeler 的结果 [1].

由表 1 可知, 当 d/b 或 $d/h < 0.6$ 时, 由本文方法求出的特性阻抗值与 Chisholm 的结果一致 [1]. 当 d/b 或 $d/h > 0.6$ 时, Chisholm 的结果逐渐偏大. 这是因为 Chisholm 采用的静电模型中的电荷分布 $\rho(\phi)$, 随着 d/b 或 d/h 的增大而接近于 δ 函数的分布, 采用有限项进行数值计算的截断误差很大. 从平行板外导体-圆形内导体传输线 ($h/b \rightarrow \infty$) 的情况看, Chisholm 的结果随着 d/b 的增大而逐渐大于林-钟法和 Wheeler 的精确值.

2. 矩形内导体槽形传输线 (图 5)

由区域分解法, 矩形内导体槽形传输线 (图 5) 可近似地分解为矩形同轴线的一半和平行板外导体-矩形内导体传输线的一半组成. 总电容为

$$C = \frac{1}{2} (C_{\text{矩-矩}} + C_{\text{平-矩}}), \quad (5)$$

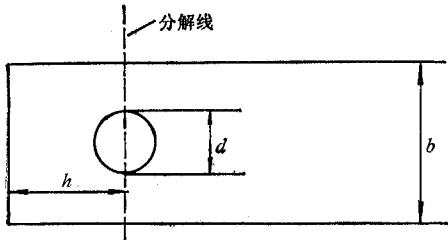


图 4 圆形内导体槽形传输线截面图

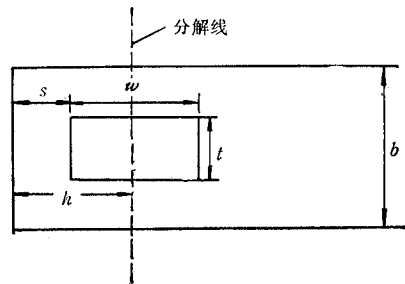


图 5 矩形内导体槽形传输线截面图

表 1 圆形内导体槽形传输线特性阻抗值的比较

$h/b = 1/4$											
d/b	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.49					
Z_0 (本文方法)	170.53	128.17	85.01	58.54	36.21	6.53					
Z_0 (Chisholm ^[12])	168.72	126.95	84.45	61.37	44.12	16.77					
$h/b = 1/2$											
d/b	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.94
Z_0 (本文方法)	188.98	147.40	105.77	81.46	64.01	50.46	39.25	29.60	20.92	12.62	9.10
Z_0 (Chisholm ^[12])	188.89	147.33	105.74	81.36	64.01	50.46	39.28	29.67	21.12	13.24	10.19
$h/b = 3/4$											
d/b	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.94
Z_0 (本文方法)	193.01	151.46	109.89	85.55	68.23	54.69	43.45	33.65	24.64	15.57	11.47
Z_0 (Chisholm ^[12])	193.01	151.45	109.89	85.55	68.13	54.69	43.46	33.69	24.77	16.07	12.46

式中 $C_{\text{矩-矩}}$ 和 $C_{\text{平-矩}}$ 分别是矩形同轴线和平行板外导体-矩形内导体传输线的电容。

矩形内导体槽形传输线的特性阻抗值为

$$Z = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{C} = \frac{2}{1/Z_{\text{矩-矩}} + 1/Z_{\text{平-矩}}} \quad (6)$$

由(6)式算出的特性阻抗值与文献中结果的比较列于表 2, 其中 $Z_{\text{矩-矩}}$ 采用 Bowman 的结果, $Z_{\text{平-矩}}$ 采用 Waldral 的结果^[1]。

表 2 方形内导体槽形传输线特性阻抗值的比较 ($w = t, h = b/2$)

t/b	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.85
Z_0 (本文方法)	137.44	95.82	71.46	54.21	41.65	30.09	21.05	13.26	9.82
Z_0 (文献[10])	136.50	95.12	70.51	53.44	40.77	30.50	—	—	—
Z_0 (文献[8])	134.86	95.27	—	54.58	—	30.28	—	13.32	—

从表 2 可知, 本文求得特性阻抗值与文献[10]的结果基本一致。当 $t/d > 0.2$ 时, 亦与文献[8]的结果相符。对一般的矩形内导体槽形传输线, (6)式中的矩形传输线的特性阻抗值可采用 Riblet 的公式^[11], 或采用 Matcalf 的曲线^[1]。

四、非对称特殊截面传输线问题

由于随着截面几何图形的对称性减少,边值问题的求解难度增大,一般讲,计算误差亦增大。目前文献中有关非对称结构传输线的研究不多,但这类问题的研究在实际应用中很重要,不仅可解决一些特殊截面传输线问题,而且能为通常广泛应用的传输线的加工精度提供理论依据。下面用区域分解法求解偏心矩形传输线和矩形外导体-圆形内导体偏心传输线。

1. 偏心矩形传输线

用区域分解法,偏心矩形传输线(图 6)可分解为四个 1/4 不同几何尺寸的矩形传输线,其总电容为

$$C = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 C_{\text{矩-矩}}^i \tag{7}$$

式中 $C_{\text{矩-矩}}^i$ 表示具有第 i 区域几何尺寸的矩形传输线的电容值。

偏心矩形传输线的特性阻抗值为

$$Z = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{C} = 4 / \sum_{i=1}^4 (1/Z_{\text{矩-矩}}^i). \tag{8}$$

由(8)式算出的水平偏心矩形传输线的特性阻抗值与文献[2]用变分法求出的结果一并列于图 7,计算中矩形线的特性阻抗值采用 Metcalf 的曲线^[1]。

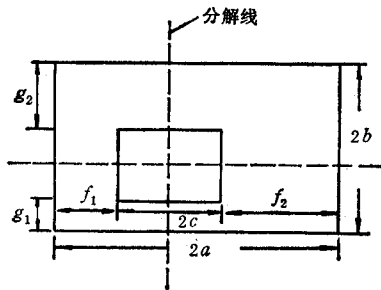


图 6 偏心矩形传输线截面图

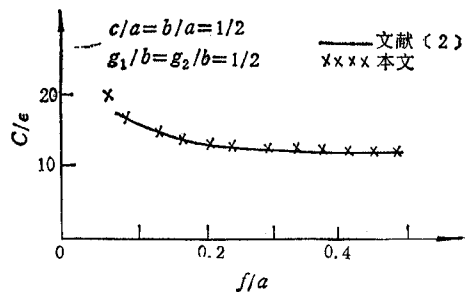


图 7 水平偏心矩形线电容值的比较

由图 7 可知,两种方法计算的特性阻抗值(或电容值)随偏心度变化的规律完全一致。

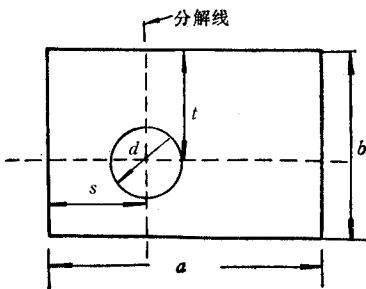


图 8 矩形外导体—圆形内导体偏心传输线截面图

从上节矩形内导体槽形线的结果来看,这种相符是预期的,因为矩形内导体槽形线可以认为是偏心矩形线的极端情况。

2. 矩形外导体-圆形内导体偏心传输线

矩形外导体-圆形内导体同轴传输线是在电磁工程中有较大用途的传输线,近四十年来进行了大量的研究,已有丰富成果^[1,2]。但由于问题的复杂性,目前尚未见到对矩形外导体-圆形内导体偏心传输线(图 8)这样的非对称结构进行过研究,下面用区域分解法

求解。

这种传输线可分解为四个 1/4 不同尺寸的矩形外导体-圆形内导体同轴传输线, 总电容为

$$C = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 C_{\text{矩-圆}}^i, \quad (9)$$

式中 $C_{\text{矩-圆}}^i$ 表示具有第 i 区域几何尺寸的矩形外导体-圆形内导体同轴传输线电容。

矩形外导体-圆形内导体偏心传输线的特性阻抗值为

$$Z = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{C} = 4 / \sum_{i=1}^4 (1/Z_{\text{矩-圆}}^i). \quad (10)$$

由 (10) 式算出的方形外导体-圆形内导体偏心传输线的特性阻抗列于表 3, 其中矩形外导体-圆形内导体同轴传输线的特性阻抗值采用林-钟法的结果^[1]。

表 3 矩形外导体——圆形内导体偏心传输线的特性阻抗值 ($t/s = 1.5, a/b = 1$)

d/b	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
Z_0 (本文方法)	152.10	110.34	85.83	68.37	54.69	43.32	33.49	24.49	15.59

表 3 的数值目前尚无法比较, 如将圆形内导体槽形传输线看作是矩形外导体-圆形内导体偏心传输线的极端情况, 由上节的数值比较和理论分析可知, 用区域分解法求解这类传输线的非对称结构是可行的, 结果能满足理论研究和工程应用的需要。

五、在近似计算中的应用

求解不规则边界问题时, 如先由区域分解法将截面分解为一些较简单的子区域, 然后用解析法或数值法求解各子区域。这样的求解相比于通常在整个区域求解的方法, 往往能达到事半功倍的效果。下面结合正 n 边形同轴传输线 (图 9) 的例子, 说明方法的运用。

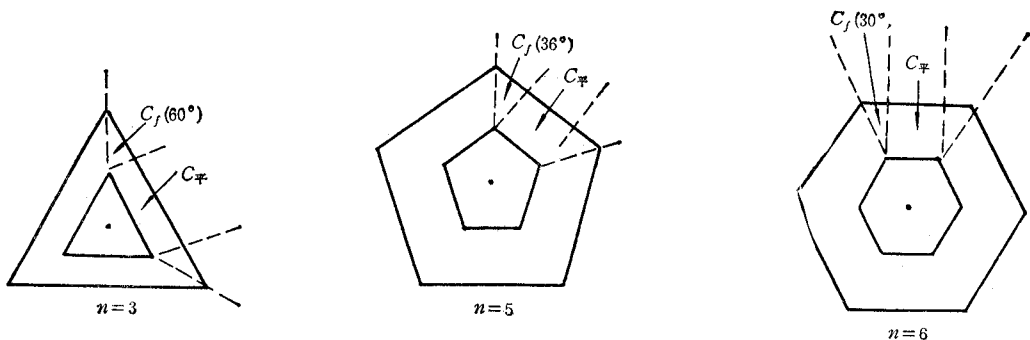


图 9 正三、五和六边形传输线截面图

由于截面边界的不规则, 除了正方形传输线 ($n = 4$) 的情况外, 一般的正 n 边形同轴传输线尚没有精确解。从设计阻抗变换器的需要, Green 用半解析的方法求解了正 n 边

形同轴传输线问题^[1]。与方形传输线的准确值比较来看,当 $d/b < 0.25$ 时, Green 方法的误差甚大。下面用区域分解法求解。

正 n 边形同轴传输线,可分解为 n 个两边长度不等的平行板结构。由区域分解法,该结构的电容可看作由平行板电容 $C_{\text{平}}$ 和角电容 $C_f(\theta)$ 两部分组成。 $C_{\text{平}}$ 容易求得,但任意 θ 角的 C_f 却不易精确求解。考虑到角电容是由内导体角电荷和平板组成,且电力线在分解线上为直线分布,作为一阶近似,认为平板并不影响角电荷的电场分布,则

$$C_f(\theta) = \int_0^\theta \frac{q}{r} \cos \theta d\theta = C \sin \theta, \quad (11)$$

式中 C 是图形结构的电容常数。对正方形同轴传输线, 45° 角电容 $C_{f\text{正}}$ 已有准确解,则 (11) 式可改写为

$$C_f(\theta) = \frac{C_{f\text{正}} \sin \theta}{\sin 45^\circ}. \quad (12)$$

由于 (12) 式推导时忽略了平板对角电荷的场分布影响,当 $\theta > 45^\circ$ 时,算出的 C_f 偏大;当 $\theta < 45^\circ$ 时,算出的 C_f 偏小。为了进一步提高 $C_f(\theta)$ 的计算精度,由幂级数保角变换和小线近似条件^[13,14],得正 n 边形同轴线的特性阻抗值,由此对 (12) 式修正,得

$$C_f(\theta) = \frac{C_{f\text{正}} \sin \left[\theta - \frac{(\theta - 45^\circ)}{12} \right]}{\sin 45^\circ}. \quad (13)$$

表 4 正 n 边形同轴传输线特性阻抗值的比较

$n = 3$											
d/b	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.94
Z_0 (本文方法)	164.69	123.32	81.94	58.18	42.07	30.33	21.38	14.34	8.64	3.94	2.29
Z_0 (Green ^[1])	145.10	117.57	81.06	57.93	41.96	30.28	21.36	14.32	8.64	3.94	2.28
$n = 5$											
d/b	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.94
Z_0 (本文方法)	177.22	135.84	93.60	69.76	52.45	39.14	28.41	19.50	11.99	5.56	3.24
Z_0 (Green ^[1])	137.00	118.66	90.04	68.73	52.24	39.11	28.40	19.50	11.99	5.56	3.24
$n = 6$											
d/b	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.94
Z_0 (本文方法)	178.71	139.16	94.20	70.85	53.61	40.17	29.32	20.23	12.48	5.81	3.39
Z_0 (Green ^[1])	133.10	116.43	89.74	69.31	53.17	40.10	29.30	20.22	12.48	5.81	3.39

由(13)式和平板电容计算公式算出的正三、五和六边形同轴传输线的特性阻抗与 Green 结果的比较列于表 4, 计算中 C_{fz} 采用 Bowman 的结果^[1]。

由表 4 可知, 当 $d/b > 0.3$ 时, 本文的结果逐渐与 Green 的结果一致。当 $d/b < 0.3$ 时, 本文的结果与用幂级数保角变换的结果相符, 而 Green 的结果偏小。这是由于 Green 的结果是从 $d/b \rightarrow 1$ 的假定得到的, 当 d/b 较小时, 便出现了随着 n 的增加, 正 n 边形同轴传输线的特性阻抗值与圆形同轴传输线的差别增大的不合理趋势。

六、结 论

本文提出求解不规则边界问题的一种方法, 且对电磁工程中几类典型的特殊截面传输线进行了计算。通过数值比较和理论分析表明, 用本文的方法能给出较好的结果。这表明本文方法可将简单区域的精确结果应用于求解一般的不规则边界问题, 对工程技术问题具有实用意义。此外, 文中还表明本文方法求出的传输线的特性阻抗是准确值的上限, 计算误差随着传输线内、外导体间距的减小而减小。这些性质, 对分析和比较数值结果的精确度和适用范围是十分有用的。

参 考 文 献

- [1] M. Gunston, *Microwave Transmission Line Impedance Data*, VNR, London, 1972.
- [2] 林为干, 微波理论与技术, 科学出版社, 1979.
- [3] R. Levy, *IEEE Trans. MTT*, **MTT-28** (1980), 369.
- [4] 林为干、钟祥礼, 物理学报, **19**(1963), 249.
- [5] 林为干、曾令儒, 同上, **30**(1981), 12.
- [6] 曾令儒, 中国科学 (A 辑), 1982 年, 第 6 期, 第 553 页.
- [7] 曾令儒, 同上 1983 年, 第 4 期, 第 357 页.
- [8] E. Cristal, *IEEE Trans. MTT*, **MTT-12** (1964), 428.
- [9] 梁昌洪、官伯然, 电子学报, 1984 年, 第 5 期, 第 1 页.
- [10] 曾令儒, 物理学报, **31**(1982), 840.
- [11] H. Riblet, *IEEE Trans. MTT*, **MTT-20** (1972), 538.
- [12] T. Chen, *ibid.*, **MTT-8** (1960), 510.
- [13] 潘生根, 中国科学 (A 辑), 1986 年, 第 9 期, 第 999 页.
- [14] S. G. Pan (潘生根) *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-35** (1987), 61.

CONTRIBUTIONS TO IRREGULAR BOUNDARY PROBLEMS

Pan Shenggen

(Department of Radio Electronics, Shanghai University of Science and Technology)

A method is presented for a practical solution of irregular boundary problems. In this method, the irregular boundary is treated as a combination of several simple boundary value problems, which can be solved easily and exactly. To illustrate the application of the method, the characteristic impedances of some transmission lines with special cross-section are computed. The accuracy of the method is confirmed by comparing the values obtained here with those reported in the literature.