待定多线性约束最大信噪比波束形成器

徐振海　　王雪松　　肖顺平　　庄钊文
(国防科技大学电子科学与工程学院　长沙　410073)

摘　要：在多线性约束(MLC)最小方差准则和最大信噪比准则的基础上，提出了待定多线性约束(MLCD)最大信噪比波束形成器，确定了最优增益向量，导出了最优权矢量和最大输出信号干扰噪声比的解析表达式，与多线性约束最小方差波束形成器相比，待定多线性约束最大信噪比波束形成器具有更优越的滤波性能。

关键词：信号处理，波束形成，多线性约束，信号干扰噪声比，最优权，增益向量
中图分类号：TN911.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2005)10-1521-03

The Maximal SNR Beamformer with Multiple Linear Constraint to Determine

Xu Zhen-hai　Wang Xue-song　Xiao Shun-ping　Zhuang Zhao-wen
(*School of Electronic Sci. and Eng*, *National University of Defense Technology*, *Changsha* 410073, *China*)

Abstract　Combining the Multiple Linear Constraint (MLC)minimal variance criterion and maximal SNR criterion, the maximal SNR beamformer is proposed with Multiple Linear Constraint to Determine. (MLCD)The maximal SINR is obtained to evaluating the filtering performance. The optimal weighted vector is presented according to the optimal gain vector of desired signals. The filtering performance is improved greatly contrasting to the multiple linear constraint minimal variance beamformer.

Key words　Signal processing, Beamforming, Multiple linear constraint, Signal to Interference plus Noise Ratio(SINR), Optimal weighted vector, Gain vecto

1　引言

阵列信号处理的许多准则的出发点是期望信号为一个，当阵列设计需要提取某单一信号时可以采用主波束约束准则[1,2]。主瓣约束准则可以描述为：在确保期望信号完全通过条件下，其它信号以最佳的方式减小或拒绝通过，此时阵列信号滤波问题相当于单一线性约束下的优化问题。在多个确知信号环境中，当阵列设计希望提取多个(至少多于一个)信号并抑制剩余其它信号时，则需要将单一线性约束推广为多个线性约束，阵列对每个信号的增益决定了该信号提取和抑制的程度[3]。例如，若增益为 1 则表示该信号被提取，该约束条件相当于阵列的主瓣;若增益为 0 则表示该信号被抑制，该约束条件相当于阵列的零点。多线性约束准则[1]描述为：在多个线性约束条件下使得阵列的输出功率最小。当期望信号与干扰信号以及噪声互不相关时阵列输出功率最小等价于干扰噪声输出功率最小，这样对其它未知的干扰信号也产生较强的抑制作用。

在多线性约束准则中，阵列对多个信号的增益是事先给定的，在给定的增益向量约束下阵列的滤波性能未必达到理论最优。另外，如果让某一期望信号完全通过，则必定对其它的期望信号产生一定的抑制作用，所以增益向量不能随意指定，增益向量的选择须以一定的代价函数为目标。本文以阵列输出信号干扰噪声比为目标，利用主瓣约束的思想和多线性约束的方法，首先在目标函数的约束下求得最优的增益向量，进而根据多线性约束准则得到阵列最优加权矢量和阵列最大输出信号干扰噪声比。

2　最优加权和最大 SINR

在阵列信号滤波中，假定有 $K\ (\geq 2)$ 个期望信号，M 个干扰信号，并且 $K+M<N$，其中 N 为阵元的数目。期望信号导向矢量分别为 $\boldsymbol{s}_k$，时域波形信号分别为 $s_k(t)$，$(1\leq k\leq K)$。干扰信号导向矢量分别为 $\boldsymbol{i}_m$，时域波形信号分别为 $i_m(t)$，$(1\leq m\leq M)$，并且所有信号的导向矢量模长为 1。此时阵列信号接收模型为

$$\boldsymbol{x}(t)=\sqrt{N}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{s}_k\cdot s_k(t)+\sqrt{N}\sum_{m=1}^{M}\boldsymbol{i}_m\cdot i_m(t)+\boldsymbol{n}(t) \tag{1}$$

2004-05-10 收到，2004-11-22 改回

其中 $\boldsymbol{n}(t)$ 为阵列接收热噪声，其协方差矩阵为: $E\left\{\boldsymbol{n}(t)\boldsymbol{n}(t)^{\mathrm{H}}\right\}=\sigma^2\boldsymbol{E}_N$，$\sigma^2$ 为热噪声强度，$\boldsymbol{E}_N$ 为 N 维单位矩阵。令 $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{s}_1\ \boldsymbol{s}_2\cdots\boldsymbol{s}_K]$，$\boldsymbol{s}(t)=\left[s_1(t)s_2(t)\cdots s_K(t)\right]^{\mathrm{T}}$，则期望信号的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{R}_S=N\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}_S\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_S=E\left\{\boldsymbol{s}(t)\boldsymbol{s}(t)^{\mathrm{H}}\right\}$ 为期望信号复包络协方差矩阵。令 $\boldsymbol{I}=[\boldsymbol{i}_1\quad \boldsymbol{i}_2\quad\cdots\quad \boldsymbol{i}_M]$，$\boldsymbol{i}(t)=\left[i_1(t)\quad i_2(t)\quad\cdots\quad i_M(t)\right]^{\mathrm{T}}$，则阵列干扰噪声协方差为

$$\boldsymbol{M}=N\boldsymbol{I}\boldsymbol{Q}_I\boldsymbol{I}^{\mathrm{H}}+\sigma^2\boldsymbol{E}_N \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_I=E\left\{\boldsymbol{i}(t)\boldsymbol{i}(t)^{\mathrm{H}}\right\}$ 为干扰信号复包络协方差矩阵。阵列的加权矢量为 $\boldsymbol{w}$，此时阵列输出 SINR 为

$$\mathrm{SINR}=\frac{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_S\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{w}} \tag{4}$$

可以看出阵列输出 SINR 与加权矢量的模长无关，仅与加权矢量的方向有关，该优化问题即矩阵束 $\{\boldsymbol{R}_S,\boldsymbol{M}\}$ 的广义特征值分解问题，大尺寸的矩阵特征分解比较复杂。本文采用主波束约束的方法思想，在期望信号通过的前提下，尽量减小或抑制干扰信号。与多线性约束准则不同的是：期望信号通过的方式是未知的，所以暂且先假定一种通过的方式，即 $\boldsymbol{s}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}=d_k$，$d_k$ 是未知的待定参量，$(k=1,2,\cdots,K)$，写为矩阵形式：

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{d} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{d}=[d_1\quad d_2\quad\cdots\quad d_K]^{\mathrm{T}}$ 为待定参量, 此时 SINR 最大化问题可以描述带多线性约束的数学优化问题：

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{w}}\ \boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{w}\\&\text{s.t. } \boldsymbol{S}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{d}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

在增益向量待定的条件下，该优化问题实质上就是多线性约束最小方差滤波器，利用 Lagrange 乘子法，多线性约束最小方差波束形成器的最优权为

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{d})=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-1}\boldsymbol{d} \tag{7}$$

此时最小的干扰噪声功率为

$$P_{\mathrm{IN}}(\boldsymbol{d})_{\min}=\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{d})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{d})=\boldsymbol{d}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-1}\boldsymbol{d} \tag{8}$$

根据前面可得阵列输出期望信号功率为

$$P_S(\boldsymbol{d})=\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{d})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_S\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{d})=N\boldsymbol{d}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_S\boldsymbol{d} \tag{9}$$

所以在增益向量待定的条件下, 最大输出 SINR 为

$$\mathrm{SINR}(\boldsymbol{d})=\frac{N\boldsymbol{d}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_S\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-1}\boldsymbol{d}} \tag{10}$$

此时的 SINR 与待定参量 $\boldsymbol{d}$ 有关，现在进一步对 $\boldsymbol{d}\in C^{K\times 1}$ 寻优，该问题即 Hermit 矩阵广义 Rayleigh 熵问题，容易得到待定多线性约束最大信噪比波束形成器的 SINR 为

$$\begin{aligned}\mathrm{SINR}_{\max}&=N\lambda_{\max}\left\{\left[\left(\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{-1}\right]^{-1}\boldsymbol{Q}_S\right\}\\&=N\lambda_{\max}\left\{\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}_S\right\}\end{aligned} \tag{11}$$

最优增益参量 $\boldsymbol{d}_{\mathrm{opt}}$ 为矩阵 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}_S$ 最大特征值对应的

特征向量，将 $\boldsymbol{d}_{\mathrm{opt}}$ 代入式(7)即可得到阵列最优的加权矢量。待定多线性约束最大信噪比波束形成器输出的 SINR 是以增益向量为变量的全局最优解，显然其滤波性能优于多线性约束最小方差波束形成器。

本文将高阶(N 阶)的特征值问题转化为低阶(K 阶)特征值问题，对于 K 阶矩阵的特征值问题可以容易求解。待定多线性约束最大信噪比波束形成器主要利用了主瓣约束的思想,和多线性约束的方法，通过待定参量分两步求得优化问题的解，导出最优增益向量和最优的 SINR 以及最优权矢量。

3 算例分析

本节通过具体的算例来展示待定多线性约束最大信噪比波束形成器的滤波性能，并与多线性约束最小方差波束形成器进行比较。假定电磁环境中存在两个期望信号和一个干扰信号，并且阵列需要提取这两个期望信号。考虑均匀线阵情况，阵列阵元数目为 $N=8$，阵元沿 X 轴间隔半波长均匀排列，所有信号位于 YOZ 平面，不考虑阵元间的互耦等非理想因素。期望信号复包络协方差矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_S&=\begin{bmatrix}E\left\{\left|s_1(t)\right|^2\right\} & E\left\{s_1(t)s_2(t)^*\right\}\\ E\left\{s_2(t)s_1(t)^*\right\} & E\left\{\left|s_2(t)\right|^2\right\}\end{bmatrix}\\&=E\left\{\left|s_1(t)\right|^2\right\}\begin{bmatrix}1 & \rho^*\sqrt{\varepsilon}\\ \rho\sqrt{\varepsilon} & \varepsilon\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\varepsilon=E\left\{\left|s_2(t)\right|^2\right\}\Big/E\left\{\left|s_1(t)\right|^2\right\}$ 为两信号能量比，$\rho=E\left\{s_2(t)s_1(t)^*\right\}\Big/\sqrt{E\left\{\left|s_1(t)\right|^2\right\}E\left\{\left|s_2(t)\right|^2\right\}}$ 为两信号的时域复相关系数。干扰噪声协方差矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\sigma^2\boldsymbol{E}_N+NP_I\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}^{\mathrm{H}} \tag{13}$$

根据矩阵求逆引理可得

$$\boldsymbol{M}^{-1}=\frac{1}{\sigma^2}\left(\boldsymbol{E}_N-\frac{\mathrm{AINR}}{1+\mathrm{AINR}}\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}^{\mathrm{H}}\right)=\frac{1}{\sigma^2}\left(\boldsymbol{E}_N-\chi\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}^{\mathrm{H}}\right) \tag{14}$$

其中 $\chi=\mathrm{AINR}/(1+\mathrm{AINR})$ 为常数，$\mathrm{AINR}=NP_I/\sigma^2$ 为阵列

干扰噪声比(Array Interference to Noise Ratio)。阵列输出最大 SINR 为

$$\mathrm{SINR}_{\max}=\mathrm{ASNR}_1\lambda_{\max}\cdot\left\{\begin{bmatrix}1-\chi\left|\langle \boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{i}\rangle\right|^2 & \langle \boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\rangle^*-\chi\langle \boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{i}\rangle^*\langle \boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{i}\rangle \\ \langle \boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\rangle-\chi\langle \boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{i}\rangle\langle \boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{i}\rangle^* & 1-\chi\left|\langle \boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{i}\rangle\right|^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & \rho^*\sqrt{\varepsilon} \\ \rho\sqrt{\varepsilon} & \varepsilon\end{bmatrix}\right\} \tag{15}$$

由上式可见，阵列最大输出 SINR 与期望信号和干扰信号的到达角有关，还与期望信号的能量比 ε 以及时域复相关系数 ρ 有关。

期望信号到达角分别为 $\theta_{S1}=0^{\circ}$，$\theta_{S2}=5^{\circ}$，阵列干扰噪声比为 $\mathrm{AINR}=20\mathrm{dB}$。与多线性约束准则进行比较，在多线性约束中，由于两个信号都要提取，所以设增益向量固定为 $\boldsymbol{d}_0=[1\quad 1]^{\mathrm{T}}$。

图 1 给出了波束形成器输出最大 SINR 与干扰到达角的关系曲线；其中，两信号能量相同，即 $\varepsilon=1$，时域复相关系数为 $\rho=0.5\exp(j\pi/3)$。图 2 给出了波束形成器输出最大 SINR 与信号能量比的关系曲线；其中，干扰到达角为 $\theta_I=2.5^{\circ}$，时域复相关系数为 $\rho=0.5\exp(j\pi/3)$。图 3 给出了波束形成器最大输出 SINR 与相关系数幅度的关系曲线；其中，两信号能量相同，即 $\varepsilon=1$，干扰到达角为 $\theta_I=2.5^{\circ}$，相关系数相位为 $\varphi_\rho=\pi/3$。

从 3 幅图中均可以看出，待定多线性约束最大信噪比波束形成器比多线性约束最小方差波束形成器滤波性能要好，通常输出信噪比改善 10dB 左右。

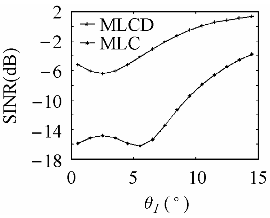

图 1　滤波性能与干扰到达角的关系

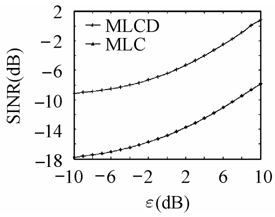

图 2　滤波性能与能量比的关系

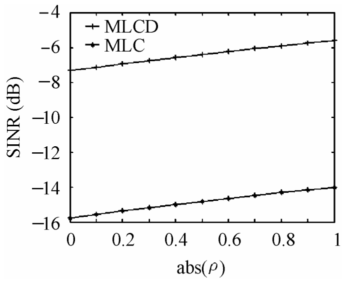

图 3　滤波性能与相关系数强度的关系

4　结束语

在多线性约束最小方差准则和最大信噪比准则的基础上，提出了待定多线性约束最大信噪比波束形成器，以阵列输出信噪比为目标函数，确定了最优增益向量，导出了最优权矢量和最大输出 SINR 的解析表达式，与多线性约束最小方差波束形成器相比，待定多线性约束最大信噪比波束形成器具有更优越的滤波性能。本文的研究可以应用在多径环境中，多径信号和直达信号具有一定的时域相关性，将多径信号和直达信号同时接收下来可以增加期望信号的能量，有利于信号的检测。

参 考 文 献

[1] Simon Haykin. Adaptive Filter Theory (Third Edition),, 1996：220－225.

[2] 刘德树，罗景青，张剑云. 空间谱估计及其应用. 合肥：中国科学技术大学出版社，1997：18－20.

[3] 张贤达. 现代信号处理(第二版). 北京：清华大学出版社，1995：242－244.

徐振海：　男，1977 年生，博士，讲师，研究方向为极化信息处理、阵列信号处理、雷达目标识别.

王雪松：　男，1972 年生，博士，教授，研究方向为极化信息处理、雷达目标识别、综合电子战.