

特征值平移超分辨率算法¹

张永军 陈宗鹭*

(国防科工委指挥技术学院 北京 101407)

*(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

摘要 本文分析了逆幂迭代算法的收敛速度。为了克服逆幂迭代算法矩阵求逆的过程,提出了特征值平移幂迭代算法,并分析了它的收敛速度,给出了计算机模拟结果。

关键词 逆幂迭代, 特征值平移, 超分辨率

中图分类号 TN911.7

1 引言

非线性谱分析技术是近年来在谱分析、地球物理学、水下声学 and 射频阵列天线领域中极为引人注目的课题。由于时间序列谱与射频天线阵列空间谱的对偶性,许多时间序列谱分析超分辨率技术应用于阵列数据,获得了空间超分辨的能力^[1-3]。本文分析了特征矢量法超分辨率逆幂迭代算法^[1]的收敛速度。提出了特征值平移幂迭代算法并分析了它的收敛速度,因为这一算法避免了矩阵求逆,大大简化了运算。

2 逆幂迭代特征矢量算法

阵列如图 1 所示, $S = [\exp(j2\pi d_1 \sin \theta / \lambda), \exp(j2\pi d_2 \sin \theta / \lambda), \dots, \exp(j2\pi d_N \sin \theta / \lambda)]$ 为阵列引导向量, $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t))^T$ 为阵列接收信号, 协方差矩阵为 $R = E\{X^+(t)X(t)\}$, + 表示共扼转置运算, $E\{\cdot\}$ 表示求集合平均。矩阵 R 的特征向量 V_i 和特征值 λ_i 定义为

$$RV_i = \lambda_i V_i \quad (1)$$

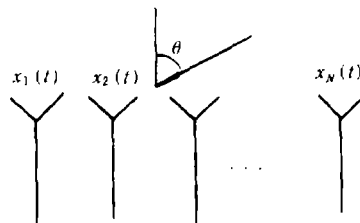


图 1 天线阵列

¹ 1994-11-16 收到, 1995-04-13 定稿

设 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_N$, 有 P 个目标, 其引导向量为 S_i :

$$S_i = [\exp(j2\pi d_1 \sin \theta_i / \lambda), \exp(j2\pi d_2 \sin \theta_i / \lambda), \dots, \exp(j2\pi d_N \sin \theta_i / \lambda)], \quad i = 1, 2, \dots, P, P < N.$$

文献 [1] 中指出

$$S_i^+ V_1 = 0. \quad (2)$$

由于计算误差或其它误差, 一般 $|S_i^+ V_1|^2 > 0$, 则可用

$$G(\theta) = 1/|S^+ V_1|^2 \quad (3)$$

作为空间谱。 $G(\theta)$ 具有很高的超分辨能力。文献 [1] 提出了逆幂迭代求最小特征向量 V_1 的方法

$$W(0) = [1, 0, \dots, 0]^t, \quad \tilde{W}(k+1) = R^{-1}W(k), \quad W(k+1) = \frac{\tilde{W}(k+1)}{|\tilde{W}^t(k+1)\tilde{W}^*(k+1)|^{1/2}},$$

其中 t 表示转置运算, $*$ 表示共轭运算。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W(k) = V_1. \quad (4)$$

下面分析一下逆幂迭代的收敛速度, 令

$$Q = [V_1, V_2, \dots, V_N], \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & & & \\ & \lambda_2^1 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_N^1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

则

$$R = Q^+ A Q, \quad R^{-1} = Q^+ A^{-1} Q, \quad (6)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_N^{-1} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$W(0)$ 可表示为

$$W(0) = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \dots + C_N V_N, \quad C_i = V_i^+ W(0); \quad (8)$$

$W(k)$ 可表示为

$$W(k) = a(k)(C_1 \lambda_1^{-k} V_1 + C_2 \lambda_2^{-k} V_2 + \dots + C_N \lambda_N^{-k} V_N); \quad (9)$$

$a(k)$ 为归一化因子, 其值为 $a(k) = \prod_{i=1}^k \tilde{W}(i) / |\tilde{W}^t(i) \tilde{W}^*(i)|^{1/2}$ 。因为 $|W^+(k)W(k)| = 1$, 由 (9) 式可直接求得 $a(k)$ 为

$$|a(k)|^2 (|C_1|^2 \lambda_1^{-2k} + |C_2|^2 \lambda_2^{-2k} + \dots + |C_N|^2 \lambda_N^{-2k}) = 1, \quad (10)$$

$$a(k) = \exp(j\varphi) / (|C_1|^2 \lambda_1^{-2k} + \dots + |C_N|^2 \lambda_N^{-2k})^{1/2}. \quad (11)$$

$\exp(j\varphi)$ 为某一相位因子, 为了分析方便取 $\varphi = 0$, 则

$$a(k) = 1/(|C_1|^2\lambda_1^{-2k} + \dots + |C_N|^2\lambda_N^{-2k})^{1/2}. \quad (12)$$

把 (9) 式表示为

$$\mathbf{W}(k) = D_1(k)\mathbf{V}_1 + D_2(k)\mathbf{V}_2 + \dots + D_N(k)\mathbf{V}_N, \quad (13)$$

其中 $D_i(k) = a(k)C_i\lambda_i^k$, 为了分析方便设 $\lambda_1 < \lambda_i, (i = 2, 3, \dots, N)$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} D_i(k) &= C_i\lambda_i^{-k}/(|C_1|^2\lambda_1^{-2k} + \dots + |C_N|^2\lambda_N^{-2k})^{1/2} \\ &= C_i/(|C_1|^2(\lambda_1/\lambda_i)^{-2k} + \dots + |C_N|^2(\lambda_N/\lambda_i)^{-2k})^{1/2} \end{aligned} \quad (14)$$

$$= \begin{cases} C_i/|C_1|, & i = 1; \\ 0, & i \neq 1; \end{cases} \quad (15)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{W}(k) = C_1/|C_1| \cdot \mathbf{V}_1. \quad (16)$$

$C_1/|C_1|$ 为一相位因子, 可忽略。则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{W}(k) = \mathbf{V}_1. \quad (17)$$

若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{N-P}$, 可证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{W}(k) = \mathbf{V}_1$, 其中 \mathbf{V}_1 为 $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_{N-P}$ 的线性组合, 且 $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_1/\lambda_1$ 。 $\mathbf{W}(k)$ 的收敛速度主要取决于

$$\begin{aligned} D_2(k) &= C_2/(|C_1|^2(\lambda_1/\lambda_2)^{-2k} + \dots + |C_N|^2(\lambda_N/\lambda_2)^{-2k})^{1/2} \\ &\approx C_2/|C_1|(\lambda_1/\lambda_2)^k. \end{aligned} \quad (18)$$

若 $\lambda_2 \gg \lambda_1$, 则 $(\lambda_1/\lambda_2)^k$ 的收敛速度很快; 若 $\lambda_2 \approx \lambda_1$, 且 $\lambda_2 \neq \lambda_1$, 则逆幂迭代的收敛速度将变得很慢。在 P 个不相关目标的情况下

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^P \mathbf{S}_i^+ \mathbf{S}_i + \sigma^2 \mathbf{I}, \quad (19)$$

其中 σ^2 为内部噪声功率, \mathbf{R} 可表示为

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}'^+ \mathbf{A}' \mathbf{Q}' + \sigma^2 \mathbf{I}, \quad (20)$$

其中 \mathbf{Q}' 为正交矩阵, \mathbf{A}' 为对角矩阵

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & \lambda_P & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}'^+ (\mathbf{A}' + \sigma^2 \mathbf{I}) \mathbf{Q}', \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_P.$$

令 $\mathbf{A} = \mathbf{A} + \sigma^2 \mathbf{I}$, $\lambda'_i = \lambda_i + \sigma^2$, 则收敛速度主要取决于 $(\sigma^2/\lambda_1 + \sigma^2)^k$ 。若特征值分布很宽, 且 λ_1 接近于零, 则收敛速度将变得很慢, 而目标的相关性、空间间隔、信号功率都会影响特征值的分布, 但在一般情况下, $\lambda_1 \gg \sigma^2$, 则逆幂迭代的收敛速度是很快。然而逆幂迭代首先要矩阵 \mathbf{R} 的逆矩阵, 很不方便, 为了克服这一缺点, 本文提出一种特征值平移幂迭代算法。

3 特征值平移幂迭代算法

由于协方差矩阵 \mathbf{R} 为非负定的 Hamilton 矩阵, 所以有 $\lambda_i \geq 0$ 。为方便起见设 $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_N$, 做变换

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{R}, \quad (21)$$

B 为一常数, \mathbf{I} 为 $N \times N$ 单位矩阵。一般地使 $B \geq \lambda_i (i = 1, 2, 3, \dots, N)$ 或者 $|B - \lambda_1| \geq |B - \lambda_i| (i = 2, \dots, N)$; $\mathbf{M} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{R} = \mathbf{Q}^+ \mathbf{B} \mathbf{I} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^+ \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ (\mathbf{B} \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{Q}$, 则矩阵 \mathbf{M} 的特征值和本征向量分别为 $\lambda'_i = B - \lambda_i$, $\mathbf{V}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 。若 $B \geq \lambda_i$ 则 $\lambda'_1 > \lambda'_2 \geq \lambda'_3 \geq \dots \geq \lambda'_N$ 。若 $|B - \lambda_1| \geq |B - \lambda_i|$, 则 $|\lambda'_1| > |\lambda'_i| (i = 2, 3, \dots, N)$ 。为方便起见, 我们只分析 $\lambda'_1 > \lambda'_2 \geq \lambda'_3 \geq \dots \geq \lambda'_N$ 的情况, 同样可得其它情况。迭代算法如下:

$$\mathbf{W}(0) = (1, 0, \dots, 0)^t, \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}(k+1) = \mathbf{M} \mathbf{W}(k), \quad (23)$$

$$\mathbf{W}(k+1) = \tilde{\mathbf{W}}(k+1) / |\tilde{\mathbf{W}}^t(k+1) \tilde{\mathbf{W}}^*(k+1)|^{1/2} \quad (24)$$

与逆幂迭代算法一样, $\mathbf{W}(0)$, $\mathbf{W}(k)$ 可表示为

$$\mathbf{W}(0) = C_1 \mathbf{V}_1 + C_2 \mathbf{V}_2 + \dots + C_N \mathbf{V}_N,$$

$$\mathbf{W}(k) = a(k) (C_1 \lambda_1'^k \mathbf{V}_1 + C_2 \lambda_2'^k \mathbf{V}_2 + \dots + C_N \lambda_N'^k \mathbf{V}_N), \quad (25)$$

$$a(k) = 1 / (|C_1|^2 \lambda_1'^{2k} + \dots + |C_N|^2 \lambda_N'^{2k})^{1/2}, \quad (26)$$

$$\mathbf{W}(k) = D_1(k) \mathbf{V}_1 + D_2(k) \mathbf{V}_2 + \dots + D_N(k) \mathbf{V}_N, \quad (27)$$

$$D_i(k) = C_i \lambda_i'^k / (|C_1|^2 \lambda_1'^{2k} + \dots + |C_N|^2 \lambda_N'^{2k})^{1/2}, \quad (28)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D_i(k) = \begin{cases} C_1 / |C_1|, & i = 1; \\ 0, & i \neq 1. \end{cases} \quad (29)$$

收敛速度主要取决于

$$D_2(k) = C_2 \lambda_2'^k / (|C_1|^2 \lambda_1'^{2k} + \dots + |C_N|^2 \lambda_N'^{2k})^{1/2} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} &\approx C_2 / |C_1| (\lambda_2' / \lambda_1')^k \\ &= C_2 / |C_1| [(B - \lambda_2) / (B - \lambda_1)]^k. \end{aligned} \quad (31)$$

若 $\lambda_2 \gg \lambda_1$, 且 λ_2 接近 B 则收敛速度很快, 反之比较慢。

下面给出一种选取 B 的方法, 因为对矩阵 \mathbf{R} 的本征值是事先不知道的, 这就给 B 的选取造成一定的困难, 且很难满足 $\lambda_2 \gg \lambda_1$, λ_2 接近 B , $|B - \lambda_1| > |B - \lambda_i|$ 的条件, $(i = 2, 3, \dots, N)$ 。

我们希望 $B = \lambda_N = \max\{\lambda_i\}$, 使 B 距 λ_i 尽可能远, 这一点也是很难做到的。下面给出一种 B 的保守取法, 即 $B = \text{Tr}\{R\}$, $\text{Tr}\{R\}$ 表示矩阵 R 的迹, 则有

$$\text{Tr}\{R\} = \sum_{i=1}^N \lambda_i, \quad (32)$$

则 $B \geq \lambda_i, (i = 1, 2, \dots, N)$ 满足 $B - \lambda_1 > B - \lambda_i, (i = 2, 3, \dots, N)$, 此时

$$C_2/|C_1|[(B - \lambda_2)/(B - \lambda_1)]^k = C_2/|C_1| \left(\frac{\sum_{i \neq 2} \lambda_i}{\sum_{i=2}^N \lambda_i} \right)^k \quad (33)$$

一般情况下, 特征值平移幂迭代算法的收敛速度不如逆幂迭代算法, 但它避免了求矩阵 R 的逆, 这是它的一大优点。

最后讨论一下初值 $W(0)$ 的选取对收敛速度的影响。由 (8) 式可知, 如果 C_1 比较大, C_2 较小, 则很快收敛到最小特征向量; 反之, 则比较慢。如 $C_1 = 0$, 则 (22)~(24) 式不会收敛到最小特征向量 V_1 , 但是, 由于计算机或其它引入的误差, 总会使某一次迭代后, V_1 的系数不为零, 则 (22)~(24) 式总能收敛到最小特征向量 V_1 。

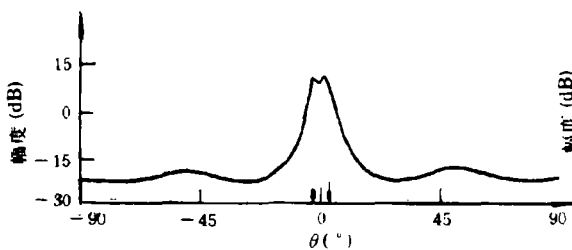


图 2 方向图 $\sigma_{s1}^2/\sigma^2 = 30\text{dB}$,
 $\theta_1 = -3^\circ, \theta_2 = 3^\circ, k = 50$
(迭代 50 次)

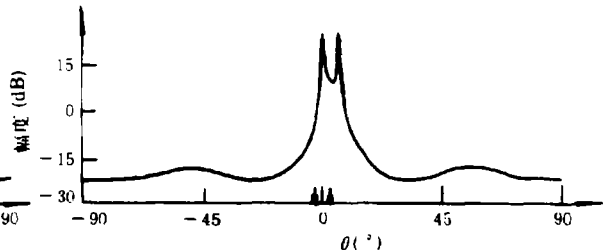


图 3 方向图 $\sigma_{s1}^2/\sigma^2 = 30\text{dB}$,
 $\theta_1 = -3^\circ, \theta_2 = 3^\circ, k = 80$
(迭代 80 次)

4 计算机模拟

文献 [1] 给出了逆幂迭代算法的计算机模拟结果, 指出大约经 10~20 次迭代, 逆幂迭代就能收敛到最小特征向量。本文计算了特征值平移幂迭代算法的结果, 大约经 50~100 次迭代后就能收敛到最小特征向量。天线采用 5 元线阵, 阵元间间隔半波长 ($\lambda/2$), 目标为不相关的两目标。图 2 给出了 50 次迭代后, 特征值平移幂迭代算法的方向图。由图可知此时方向图虽然能够分辨两目标, 但是峰值未能准确地反映目标的位置。图 3 给出了 80 次迭代后的结果, 此时峰值能够准确地反映目标的位置。

5 结 论

本文分析了逆幂迭代的收敛速度,指出在一般情况下,逆幂迭代算法具有较快的收敛速度,大约在 10~20 次迭代后就能收敛到最小特征向量。本文提出了特征值平移迭代算法,并分析了它的收敛速度,指出在一般情况下,特征值平移幂迭代算法的收敛速度较逆幂迭代算法慢,大约在 50~100 次迭代后才能收敛到最小特征向量。但是,特征值平移迭代算法避免了矩阵求逆,大大简化了运算。

参 考 文 献

- [1] Durrani T S, Sharman K C. IEE Proc.-F, 1983, 130(1): 22-28.
- [2] Ziskind I, Wax M. IEEE Trans. on ASSP, 1988, ASSP-36(10): 1553-1560.
- [3] Marcos S, Benidier M. On high resolution array processing non-based on the eigenanalysis approach, Proc. of ICASSP, Albuquerque, New Mexico, U. S. A. 1990: 2956-2959.

EIGENVALUE SHIFT SUPERRESOLUTION ALGORITHM

Zhang Yongjun

(*Institute of Command and Technology, COSTIND Beijing 101407*)

Chen Zongzhi

(*Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing 100080*)

Abstract The convergence of the inverse correlation matrix iteration algorithm is analyzed. In order to avoid computing the inverse correlation matrix in the algorithm, this paper presents an eigenvalue shift iteration algorithm, and analyzes its convergence. Finally, the simulated results are given.

Key words Inverse matrix iteration, Eigenvalue shift, Superresolution

张永军: 男, 1960 年生, 副教授, 现主要从事的专业有信号处理, 雷达, 微波成像和人工神经网络。
陈宗鸷: 男, 1922 年生, 研究员, 博士生导师, 现主要从事微波成像, 雷达, 信号处理, 信息论和人工神经网络的研究。