

## 多子阵互耦条件下的一维波达方向估计及互耦自校正

齐崇英<sup>①</sup> 王永良<sup>②</sup> 张永顺<sup>①</sup> 张明智<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(空军工程大学导弹学院 三原 713800)

<sup>②</sup>(空军雷达学院重点实验室 武汉 430019)

**摘要** 该文研究多子阵(multiple subarrays)阵元互耦条件下的波达方向(DOA)估计,假设阵列由多个位置已知的均匀线阵(ULA)组成,但线阵阵元间存在互耦效应。利用均匀线阵互耦矩阵的带状、对称 Toeplitz 性及多子阵互耦矩阵的块状对角特性,提出了一种解耦合波达方向估计及互耦自校正算法。该算法在未知阵元互耦参数的情况下,可准确估计出信源的波达方向。另外,算法在精确估计波达方向的同时,还可准确估计出阵元间的互耦系数,实现多子阵的互耦自校正。算法的波达方向估计只需一维谱峰搜索,避免了通常多参数联合估计的多维非线性搜索及迭代运算,可明显减小算法运算量。文中讨论了算法参数可辨识性的必要条件,并分析计算了多参数联合估计的克拉美-罗界(CRB)。理论分析及蒙特卡罗仿真结果表明,该算法具有计算量小、DOA 估计分辨率高、互耦校正效果好等优点。

**关键词** 多子阵, 互耦, 波达方向估计, 自校正

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)05-0909-06

## One-Dimensional DOA Estimation and Self-Calibration Algorithm for Multiple Subarrays in the Presence of Mutual Coupling

Qi Chong-ying<sup>①</sup> Wang Yong-liang<sup>②</sup> Zhang Yong-shun<sup>①</sup> Zhang Ming-zhi<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China)

<sup>②</sup>(Key Research Laboratory, Air Force Radar Academy, Wuhan 430019, China)

**Abstract** The issue of Direction-Of-Arrival (DOA) estimation in multiple subarrays is addressed. It is assumed that an array is composed of several uniform linear arrays (ULAs) of arbitrary known geometry, but there are mutual coupling between sensors of each subarray. By using the banded, symmetric Toeplitz character of the ULAs and the block diagonal character of the multiple subarrays, a new decoupling DOA estimation and self-calibration algorithm is proposed. The new algorithm can provides accurate DOA estimation without the knowledge of mutual coupling. In addition, the mutual coupling coefficients for array self-calibration can be achieved simultaneously. Instead of multidimensional nonlinear search or iterative computation, the algorithm just uses a one-dimensional search and can reduce the computation burden. DOA identifiability issue for such arrays is discussed, and the corresponding Cramer-Rao Bound (CRB) is derived also. Monte-Carlo simulations illustrate that the proposed algorithm possesses the better performance of low computational complexity, high resolution and better accuracy of self-calibration.

**Key words** Multiple subarrays, DOA estimation, Mutual coupling, Self-calibration

### 1 引言

波达方向(DOA)估计中,多子阵阵列设置受到广泛重视,如采用多平行子阵或L形阵列对空间多个信源的方位角、俯仰角及频率等参数进行估计<sup>[1, 2]</sup>;在不增加硬件及软件复杂度的情况下,合理地对于子阵进行稀疏设置来扩展阵列孔径<sup>[3]</sup>;对于多个相同的子阵(Multiple invariance arrays),采用一维搜索或多项式求根来简化算法运算量<sup>[4]</sup>。然而这些多子阵算法都是在阵列流形精确已知的前提下得出的,在实际工程应用中,由于各种误差(如阵元幅相误差、阵元位置误差、阵元间互耦等)的存在,实际的阵列流形往往会出现一定程度的偏差

或扰动,此时,这些高分辨谱估计算法的性能会严重恶化<sup>[5]</sup>。与其它阵列误差相比,阵元间的互耦效应与阵列的电磁特性密切相关,由于其复杂性,其校正与补偿一直未找到简单有效的解决方法。

文献[6,7]提出对互耦进行电磁测量或通过矩量法对互耦进行电磁计算,然而阵元互耦常随环境和电磁参数的变化而变化,其测量值或计算精度往往不能满足实际需要。另一类信号处理方法通常将阵列误差校正转化为一个参数估计问题,参数类的校正方法通常可以分为有源校正类<sup>[8, 9]</sup>和自校正类<sup>[10, 11]</sup>。但有源校正类算法对辅助信源的方位有较高的精度要求,且由于系统参数、信号的时变性,以及空间信号的多径效应,这类算法很难满足实际需要。而自校正类方法通常将空间信源方位与阵列扰动参数根据某种优化函数进行

2004-12-30 收到, 2005-05-15 改回  
国家自然科学基金(60272086)和全国高等学校优秀青年教师科研奖励计划(TRAPOYT)资助课题

联合估计,它不需要方位已知的辅助信源,并且可以在实际方位估计的同时在线完成校正,所以其校正精度比较高;但由于某些病态的阵列结构或误差参数与方位参数之间的耦合,其参数估计存在模糊性问题,更为重要的是参数联合估计对应的高维、多模非线性优化问题带来了庞大的运算量,算法的实时性、稳健性差,算法难以收敛或参数估计的全局收敛性往往无法保证<sup>[12]</sup>。

本文研究多子阵阵元互耦条件下的波达方向估计,假定各子阵为位置已知的均匀线阵,但不同于文献[4],各子阵阵元数不必相同。另外,由于各子阵间的距离较远,我们认为子阵间不存在互耦,但子阵阵元间存在较强的互耦效应。利用均匀线阵互耦矩阵的带状、对称 Toeplitz 性及多子阵互耦矩阵的块状对角特性,提出了一种有效的波达方向估计及互耦自校正算法。该算法将信源方位与互耦参数进行联合并去耦估计,无需阵元的互耦参数信息,只需一维谱峰搜索,避免了通常多参数联合估计的多维非线性搜索及迭代运算,可明显减小算法运算量;另外,算法在精确估计波达方向的同时,还可准确估计出各子阵阵元间的互耦系数,实现多子阵的互耦自校正。

文章第2节建立了多子阵阵元互耦条件下的信号模型。第3节详细介绍了算法的基本原理,给出了算法的基本步骤;对算法的模糊性问题进行了讨论,并分析计算了多参数联合估计的克拉美-罗界(CRB)。第4节给出了蒙特卡罗(Monte-Carlo)仿真结果,证明了算法的正确性和有效性。第5节是本文结论。

## 2 阵列信号模型

### 2.1 多子阵互耦矩阵模型

设空间各向同性的  $N$  个阵元组成互不重叠的  $K$  个均匀线阵,即  $K$  个子阵,各子阵可任意设置但需知道其位置。假设第  $k$  个子阵含有  $N_k$  个阵元(图1所示的多子阵由3个子阵组成,子阵阵元数分别为3,4,5),则

$$N = \sum_{k=1}^K N_k \quad (1)$$

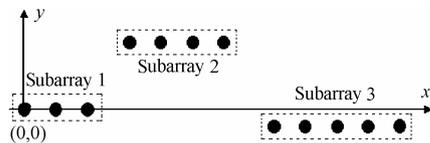


图1 多子阵示意图

Fig.1 Example of multiple subarrays

阵元间通过空间电磁场的相互作用和影响发生电磁耦合效应,其互耦系数与阵元间的距离成反比,足够远的两阵元间的互耦系数几乎为0,且间距相同的两阵元间互耦系数相同(Toeplitz性)。由于各子阵间的距离较远,我们认为子阵间不存在互耦,因此只考虑均匀线阵阵元间存在的互耦效应。设  $C_k$  表示第  $k$  个均匀线阵的互耦系数矩阵,由均匀线

阵的特性可知,我们可以用一个带状对称Toeplitz矩阵进行建模<sup>[10]</sup>。定义互耦自由度  $q_k$  为第  $k$  个均匀线阵阵元间存在互耦效应的最大阵元数,则多子阵的互耦自由度可定义为

$$q = \sum_{k=1}^K q_k \quad (2)$$

以第  $k$  个均匀线阵为例,若仅考虑其左右相邻3个阵元间的互耦效应,即互耦自由度  $q_k = 3$ ,则其互耦矩阵的第1行矢量可定义为

$$\hat{c}_k = [c_k(0), c_k(1), c_k(2), 0, \dots, 0], \text{ 且} \\ 0 < |c_k(2)| < |c_k(1)| < c_k(0) = 1 \quad (3)$$

相应地,其  $N_k \times N_k$  阶带状对称 Toeplitz 互耦矩阵可表示为

$$C_k = \text{toeplitz}(\hat{c}_k, \hat{c}_k) \\ = \text{toeplitz} \left\{ [c_k(0), c_k(1), c_k(2), 0, \dots, 0], \right. \\ \left. [c_k(0), c_k(1), c_k(2), 0, \dots, 0] \right\} \quad (4)$$

其中  $\text{toeplitz}(\hat{c}_k, \hat{c}_k)$  表示由矢量  $\hat{c}_k$  形成对称 Toeplitz 矩阵。

空间带限环境下,假定子阵间的距离足够远,使得子阵间的阵元不存在互耦效应,则多子阵互耦矩阵可用一块状对角矩阵(Block-diagonal matrix)进行建模

$$C = \text{bdiag}(C_1, C_2, \dots, C_K) \quad (5)$$

其中,  $\text{bdiag}(\cdot)$  表示由其元素作为对角元素构成块状对角矩阵,  $C_1, C_2, \dots, C_K$  为各子阵对应的互耦矩阵。

### 2.2 互耦条件下的阵列信号模型

假设阵列远场  $\theta_i (i=1, 2, \dots, M)$  方向上有  $M (M < N)$  个窄带点源以平面波入射(波长为  $\lambda$ ),多子阵阵列的导向矢量为

$$a(\theta_i) = \left[ 1, \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}d_{i2}\right), \dots, \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}d_{iN}\right) \right]^T, \\ i = 1, 2, \dots, M \quad (6)$$

$$d_{ij} = [x_j, y_j] [\sin(\theta_i), \cos(\theta_i)]^T, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

若我们以第1个子阵的第1个阵元作为  $x$ - $y$  平面的坐标原点,即  $(x_1, y_1) = (0, 0)$ ,则  $(x_j, y_j)$  是第  $j$  个阵元的坐标,  $d_{ij}$  是信源方向上第  $j$  个阵元到坐标原点的距离。

理想阵列流形矩阵为  $A(\theta) = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_M)]$ ,考虑到阵元互耦的影响,实际阵列流形矩阵为

$$A(\theta, c) = CA(\theta) = [a(\theta_1, c), a(\theta_2, c), \dots, a(\theta_M, c)] \quad (8)$$

其中  $C$  为多子阵的  $N \times N$  阶互耦矩阵。此时阵列接收的快拍数据可表示为

$$X(t) = CA(\theta)S(t) + N(t) \quad (9)$$

式中  $X(t)$  为  $N \times 1$  快拍数据矢量,  $S(t)$  为入射信号矢量,  $N(t)$  为  $N \times 1$  阵列噪声矢量,  $\theta$  为信源方位矢量。阵列协方差矩阵  $R$  定义为

$$R = E[X(t)X^H(t)] = CAR_S A^H C^H + \sigma^2 I \quad (10)$$

其中  $R_S = E[S(t)S^H(t)]$  为信源协方差矩阵,高斯白噪声背景

下,噪声协方差矩阵为 $\sigma^2\mathbf{I}$ , $\mathbf{I}$ 为单位阵。将阵列协方差矩阵进行特征分解得:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H + \sum_{i=M+1}^N \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H = \mathbf{E}_S \mathbf{A}_S \mathbf{E}_S^H + \mathbf{E}_N \mathbf{A}_N \mathbf{E}_N^H \quad (11)$$

可以发现,阵列协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 的特征值具有如下分布:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M \geq \lambda_{M+1} = \lambda_{M+2} = \dots = \lambda_N = \sigma^2 \quad (12)$$

对角矩阵 $\mathbf{A}_S = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M]$ ,  $\mathbf{A}_N = \text{diag}[\lambda_{M+1}, \lambda_{M+2}, \dots, \lambda_N]$ 。由矩阵 $\mathbf{E}_S = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_M]$ 张成的线性子空间 $\text{span}(\mathbf{E}_S)$ 称为信号子空间,而由矩阵 $\mathbf{E}_N = [\mathbf{e}_{M+1}, \mathbf{e}_{M+2}, \dots, \mathbf{e}_N]$ 张成的线性子空间 $\text{span}(\mathbf{E}_N)$ 称为噪声子空间。

有限次快拍数据情况下,我们只能得到协方差矩阵的估计值:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^H(t) = \hat{\mathbf{E}}_S \hat{\mathbf{A}}_S \hat{\mathbf{E}}_S^H + \hat{\mathbf{E}}_N \hat{\mathbf{A}}_N \hat{\mathbf{E}}_N^H \quad (13)$$

阵列流形矩阵、信号子空间与噪声子空间满足下列关系:

$$\text{span}(\mathbf{C}\mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{E}_S) \quad (14)$$

$$\text{span}(\mathbf{E}_S) \perp \text{span}(\mathbf{E}_N) \quad (15)$$

### 3 一维波达方向估计及互耦自校正算法

#### 3.1 算法基本原理

阵元互耦改变了阵列导向矢量,考虑到其影响,MUSIC算法的空间谱函数应是

$$f(\theta, \mathbf{c}) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta, \mathbf{c}) \mathbf{E}_N \mathbf{E}_N^H \mathbf{a}(\theta, \mathbf{c})} \quad (16)$$

理想情况下,信源波达方向可以通过下式获得

$$\mathbf{a}^H(\theta, \mathbf{c}) \mathbf{E}_N \mathbf{E}_N^H \mathbf{a}(\theta, \mathbf{c}) = 0 \quad (17)$$

由于阵元互耦的影响,且互耦矩阵未知,因此式(17)是一个关于 $\theta, \mathbf{c}$ 的多维搜索过程,若互耦矩阵的自由度 $q$ 大于1,则其计算量非常巨大。然而由式(4),式(5)可知,互耦矩阵 $\mathbf{C}$ 是一个块状对角矩阵,且每一对角子矩阵是带状、对称Toeplitz矩阵,其第1行(或第1列)含有矩阵中的所有元素,阵元互耦条件下的实际导向矢量 $\mathbf{a}(\theta, \mathbf{c})$ 可表示为

$$\mathbf{a}(\theta, \mathbf{c}) = \mathbf{C}\mathbf{a}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_k \end{pmatrix} \mathbf{a}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{a}_1(\theta) \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{a}_2(\theta) \\ \vdots \\ \mathbf{C}_k \mathbf{a}_k(\theta) \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{C}_k \mathbf{a}_k(\theta) = \mathbf{T}_k [\mathbf{a}_k(\theta)] \mathbf{c}_k \quad (19)$$

其中 $\mathbf{c}_k = [c_k(0), c_k(1), \dots, c_k(q_k - 1)]^T$ 为第 $k$ 个子阵的互耦系数矢量, $N_k \times q_k$ 阶矩阵 $\mathbf{T}_k [\mathbf{a}_k(\theta)]$ 可表示为

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{k1} + \mathbf{T}_{k2} \quad (20)$$

$$[\mathbf{T}_{k1}]_{i,j} = \begin{cases} a_k^{i+j-1}, & i+j \leq N_k + 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (21)$$

$$[\mathbf{T}_{k2}]_{i,j} = \begin{cases} a_k^{i-j+1}, & i \geq j \geq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (22)$$

其中 $a_k^{i+j-1}$ 表示第 $k$ 个子阵导向矢量 $\mathbf{a}_k$ 的第 $i+j-1$ 个元素,因此,式(18)可写为

$$\mathbf{a}(\theta, \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 [\mathbf{a}_1(\theta)] & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_k [\mathbf{a}_k(\theta)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_k \end{pmatrix} = \mathbf{T} [\mathbf{a}(\theta)] \mathbf{c} \quad (23)$$

将式(23)代入式(17),可得

$$\mathbf{c}^H \mathbf{T}^H [\mathbf{a}(\theta)] \mathbf{E}_N \mathbf{E}_N^H \mathbf{T} [\mathbf{a}(\theta)] \mathbf{c} = \mathbf{c}^H \mathbf{Q}(\theta) \mathbf{c} = 0 \quad (24)$$

其中 $q \times q$ 阶矩阵 $\mathbf{Q}(\theta)$ 定义为

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{T}^H [\mathbf{a}(\theta)] \mathbf{E}_N \mathbf{E}_N^H \mathbf{T} [\mathbf{a}(\theta)] \quad (25)$$

由式(24),式(25)可以看出, $\mathbf{Q}(\theta)$ 独立于互耦参数向量 $\mathbf{c}$ ,且 $\mathbf{Q}(\theta)$ 为非负定的共轭对称矩阵,其特征值为非负数。当 $q \leq N - M$ 时,通常 $\mathbf{Q}(\theta)$ 为满秩矩阵,只有当 $\theta$ 取为信源的真实方位 $\{\theta_i\}_{i=1}^M$ 时,矩阵 $\mathbf{Q}(\theta)$ 降秩,其最小特征值取极小值0, $\mathbf{c}$ 为相应的特征向量。

因此,有限次快拍情况下,信源DOA估计的空间谱函数可表示为

$$f_1(\theta) = \frac{1}{\lambda_{\min} \{\tilde{\mathbf{Q}}(\theta)\}} \quad (26)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{e}_{\min} \{\tilde{\mathbf{Q}}(\theta)\} \quad (27)$$

其中 $\lambda_{\min} \{\cdot\}$ 表示求矩阵的最小特征值, $\mathbf{e}_{\min} \{\cdot\}$ 表示求矩阵最小特征值对应的特征向量。

在式(24)中,若对互耦参数矢量进行归一化范数约束 $\mathbf{c}^H \mathbf{c} = 1$ ,并在此约束下求式(24)的最小值,即

$$F(\theta, \mathbf{c}) = \mathbf{c}^H \tilde{\mathbf{Q}}(\theta) \mathbf{c} + \mu (\mathbf{c}^H \mathbf{c} - 1) \quad (28)$$

其中 $\mu$ 为Lagrange算子,对式(28)求解,则所得结果与式(26),式(27)相同。

另外,我们注意到 $c_k(0) = 1$ (即每一子阵互耦系数矢量的第1个元素为1),因此还可对 $\mathbf{c}$ 进行约束, $\mathbf{c}^T \mathbf{w} = 1$ , $\mathbf{w}$ 为单位矩阵的第 $k$ 列向量。若在矢量 $\mathbf{c}$ 的第1个元素为1的约束下,则 $\mathbf{w} = [1, 0, \dots, 0]^T$ ,因此,可得如下的约束最小化等式:

$$F(\theta, \mathbf{c}) = \mathbf{c}^H \tilde{\mathbf{Q}}(\theta) \mathbf{c} + \mu (\mathbf{c}^T \mathbf{w} - 1) \quad (29)$$

对式(29)求解,可得信源DOA估计空间谱函数的另一表达式:

$$f_2(\theta) = \mathbf{w}^T \tilde{\mathbf{Q}}^+(\theta) \mathbf{w} \quad (30)$$

$$\mathbf{c} = \frac{\tilde{\mathbf{Q}}^+(\theta) \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \tilde{\mathbf{Q}}^+(\theta) \mathbf{w}} \quad (31)$$

其中 $\tilde{\mathbf{Q}}^+(\theta)$ 为矩阵 $\tilde{\mathbf{Q}}(\theta)$ 广义逆矩阵。

可见,通过式(26),式(30)均可求得信源DOA(模糊性问题见下文分析),但它们均不涉及高维非线性优化或迭代运算,只需一维谱峰搜索,并且可同时估计出互耦系数。但与常规MUSIC算法不同,此处的一维谱峰搜索是对每个DOA搜索点计算 $q \times q$ 阶矩阵 $\tilde{\mathbf{Q}}(\theta)$ 的最小特征值(式(26))或逆矩

阵(式(30))。

当各子阵阵元数相同时,则本文阵列结构即为文献[4]的多不变子阵(Multiple invariance subarrays)。而当子阵数  $K=1$  时,本文阵列结构退化为单个均匀线阵;由于阵元互耦随阵元间距的增大迅速下降,互耦自由度  $q$  一般取值较小,当互耦自由度  $q=K$  时,互耦矩阵  $\mathbf{C}$  退化为单位矩阵  $\mathbf{I}$ ;进一步,当互耦自由度  $q=K=1$  时,即单个均匀线阵且阵元间无互耦,此时  $\mathbf{T}[\mathbf{a}(\theta)]=\mathbf{a}(\theta)$ , 矩阵  $\tilde{\mathbf{Q}}(\theta)$  退化为常量  $\mathbf{a}^H(\theta)\tilde{\mathbf{E}}_N\tilde{\mathbf{E}}_N^H\mathbf{a}(\theta)$ , 则式(26), 式(30)退化为常规 MUSIC 算法的谱函数,即

$$f_1(\theta)\Big|_{q=K=1}=f_2(\theta)\Big|_{q=K=1}=f_{\text{music}}(\theta) \quad (32)$$

$$f_{\text{music}}(\theta)=\frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\tilde{\mathbf{E}}_N\tilde{\mathbf{E}}_N^H\mathbf{a}(\theta)} \quad (33)$$

需指出的是,上述算法可直接推广到空间二维(俯仰角  $\phi$ 、方位角  $\theta$ )谱估计,此时只需将公式中的  $\theta$  替换为  $(\phi, \theta)$ , 然后采用二维 MUSIC 算法进行谱峰搜索。

### 3.2 算法基本步骤

由上述分析,可得算法基本步骤如下:

- (1) 利用式(13)计算阵列协方差矩阵的估值  $\tilde{\mathbf{R}}$ ;
- (2) 对  $\tilde{\mathbf{R}}$  特征分解或奇异值分解,求得噪声子空间  $\tilde{\mathbf{E}}_N$ ;
- (3) 根据式(18)–(23)计算  $N \times q$  阶变换矩阵  $\mathbf{T}[\mathbf{a}(\theta)]$ ;
- (4) 利用第(2)、(3)步计算得到的  $\tilde{\mathbf{E}}_N$  和  $\mathbf{T}[\mathbf{a}(\theta)]$ , 根据式(25)计算  $q \times q$  阶矩阵  $\tilde{\mathbf{Q}}(\theta)$ ;
- (5) 由式(26)或式(30)进行一维谱峰搜索,得到信源波达方向的估值  $\{\hat{\theta}_i\}_{i=1}^M$ ;
- (6) 利用信源方位的估值,由式(27)或式(31)计算互耦系数的估值  $\mathbf{c}$ 。

### 3.3 算法参数可辨识性的必要条件

由式(14)可知,信号子空间与阵列流形矩阵张成同一子空间。若信源不相干,则存在  $M \times M$  阶非奇异矩阵  $\mathbf{P}$ , 满足

$$\mathbf{E}_S = \mathbf{C}(\mathbf{c})\mathbf{A}(\theta)\mathbf{P} \quad (34)$$

式(34)可表示为  $2NM$  (分别为  $N$  个阵元及  $M$  个复信号)个独立的实数方程式,而实未知参量个数为  $M+2M^2+2q-2K$  (分别为  $M$  个实数 DOA、 $\mathbf{P}$  矩阵的  $M^2$  个复元素及互耦矩阵的  $q-K$  个复元素)。 $(\mathbf{c}, \theta, \mathbf{P})$  可标识性要求独立方程式的个数不少于未知参量的个数,即

$$2NM \geq M + 2M^2 + 2q - 2K \quad (35)$$

$$N \geq M + \frac{1}{2} + \frac{q}{M} - \frac{K}{M} \quad (36)$$

可见,由于引入了  $q-K$  个未知的互耦参数,其可辨识性要求阵列拥有更多的阵元数。然而,当  $q$  增大时,存在互耦的阵元数变多,对于不同波达方向的  $\theta_1$  和  $\theta_2$ , 其导向矢量  $\mathbf{a}(\theta_1, \mathbf{c})$  和  $\mathbf{a}(\theta_2, \mathbf{c})$  可能线性相关,从而导致 DOA 估计的模糊性,因此,上式仅为参数可辨识性的必要条件。通过大量

仿真实验可以得知:在阵元数  $N$  及入射信源数  $M$  一定的条件下,若互耦矩阵自由度  $q$  满足:

$$\left. \begin{aligned} q_i &\leq \left\lfloor \frac{N_i}{2} \right\rfloor \\ q &\leq N - M \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

则方位估计无模糊,其中符号  $\lceil \cdot \rceil$  表示向上取整。

需指出的是,对于归一化范数约束所得空间谱函数表达式(26),其参数可辨识性要求每一子阵互耦自由度满足上式,即  $i=1, 2, \dots, K$ 。而对于线性约束所得空间谱函数式(30),则只需所约束子阵的互耦自由度满足上式即可,即  $i$  为被约束子阵的序号。

### 3.4 参数估计的克拉美-罗界(CRB)

阵元互耦的存在对估计性能有多大的影响,必须计算其估计方差,克拉美-罗界(CRB)给出了无偏参数估计协方差矩阵的下界。为了计算方位参数与阵元互耦联合估计对应的 CRB 表达式,我们把阵元互耦的实部和虚部看作一组随机变量,此时共有  $M+2q-2K$  个未知实参数(分别为  $M$  个信源方位角、 $q-K$  个互耦系数的实部、 $q-K$  个互耦系数的虚部),可写成矢量形式:

$$\boldsymbol{\eta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M, \text{Re}(c_1^T(2:q_1)), \text{Im}(c_1^T(2:q_1)), \dots, \text{Re}(c_K^T(2:q_K)), \text{Im}(c_K^T(2:q_K))]^T \quad (38)$$

假设噪声方差归一化为 1,且信源协方差矩阵  $\mathbf{R}_S$  已知,快拍数为  $T$ ,方位参数与阵元互耦联合估计对应的 CRB 可由下式表示:

$$\mathbf{E}[(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}_0)(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}_0)^T] \geq \mathbf{CRB} = \mathbf{J}^{-1} \quad (39)$$

其中  $\mathbf{J}$  为  $(2M+2q-2K) \times (2M+2q-2K)$  阶 Fisher 信息矩阵,其可分块表示为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\theta\theta} & \mathbf{J}_{\theta R} & \mathbf{J}_{\theta I} \\ \mathbf{J}_{R\theta} & \mathbf{J}_{RR} & \mathbf{J}_{RI} \\ \mathbf{J}_{I\theta} & \mathbf{J}_{IR} & \mathbf{J}_{II} \end{bmatrix} \quad (40)$$

其中  $\mathbf{J}_{\theta\theta}$  为方位角估计块,  $\mathbf{J}_{RR}$  和  $\mathbf{J}_{II}$  分别为阵元互耦系数的实部和虚部估计块,其余为相应参数估计的互相关块。由当快拍数趋于无穷大时,第  $i$  个参数估计的 CRB 是 Fisher 矩阵逆的第  $i$  个对角元素,即

$$\mathbf{CRB}(\eta_i) = \mathbf{J}^{-1}[\eta]_{ii} \quad (41)$$

$\mathbf{J}$  矩阵的元素可表示为

$$\mathbf{J}_{ij} = -\mathbf{E} \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right\} = \text{Tr} \left\{ \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta_j} \right\} \quad (42)$$

$$\mathbf{J}_{ij} = 2T \text{Re} \left\{ \text{tr} \left\{ \mathbf{D}_i \mathbf{R}_S \mathbf{A}^H \mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{R}_S \mathbf{D}_j^H \mathbf{R}^{-1} \right\} + \text{tr} \left\{ \mathbf{D}_i \mathbf{R}_S \mathbf{A}^H \mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D}_j \mathbf{R}_S \mathbf{A}^H \mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \right\} \right\} \quad (43)$$

$$\mathbf{D}_i = \frac{\partial \mathbf{C} \mathbf{A}}{\partial \eta_i} \quad (44)$$

另外,若我们只考虑方位角估计的 CRB,将  $\mathbf{J}$  矩阵分块

表示为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\theta\theta} & \mathbf{J}_{\theta\alpha} \\ \mathbf{J}_{\theta\alpha}^T & \mathbf{J}_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \quad (45)$$

则

$$\mathbf{CRB}(\theta) = \left[ \mathbf{J}^{-1} \right]_{M \times M} = \left( \mathbf{J}_{\theta\theta} - \mathbf{J}_{\theta\alpha} \mathbf{J}_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{J}_{\theta\alpha}^T \right)^{-1} \quad (46)$$

由于  $\mathbf{J}_{\theta\alpha} \mathbf{J}_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{J}_{\theta\alpha}^T$  为正定矩阵, 故

$$\mathbf{CRB}(\theta) = \left( \mathbf{J}_{\theta\theta} - \mathbf{J}_{\theta\alpha} \mathbf{J}_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{J}_{\theta\alpha}^T \right)^{-1} \geq \left( \mathbf{J}_{\theta\theta} \right)^{-1} = \mathbf{CRB}_{\text{cal}}(\theta) \quad (47)$$

其中  $\mathbf{CRB}_{\text{cal}}(\theta)$  表示互耦系数已知时方位角估计的 CRB。由式(47)可以看出, 当同时估计信源方位和互耦参数时, CRB 变大, 即方位角估计性能变差, 而  $\mathbf{J}_{\theta\alpha} \mathbf{J}_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{J}_{\theta\alpha}^T$  表示由于缺少互耦系数信息而产生的性能损失, 下面的仿真结果将证实这一点。

#### 4 计算机仿真结果

为了验证算法的有效性, 我们做以下的计算机仿真。仿真中, 多子阵取图 1 中的 3 个子阵, 子阵阵元数分别为 3, 4, 5, 阵元间距为半波长  $0.5\lambda$ , 3 个子阵方向相同, 且各子阵以其第一个阵元作为参考坐标, 则  $(x_1, y_1) = (0, 0)$ ,  $(x_4, y_4) = (1.5\lambda, \lambda)$ ,  $(x_8, y_8) = (4\lambda, -0.5\lambda)$ 。假定 3 个子阵的互耦自由度分别为  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = 2$ ,  $q_3 = 3$ , 互耦系数矢量选取为  $\mathbf{c}_2 = [1, 0.2566 + 0.1653j]^T$ ,  $\mathbf{c}_3 = [1, 0.3628 + 0.2815j, 0.2332 + 0.1521j]^T$ , 空间噪声为零均值复高斯白噪声。

##### 仿真 1 算法空间谱分辨力的比较

空间 3 个等功率的非相关信源, 入射方向为  $-30^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ , 在信噪比为 25dB, 快拍数为 200 的条件下, 图 2 给出了互耦已知 MUSIC 算法、不考虑互耦的 MUSIC 算法及本文算法仿真结果的归一化空间谱曲线。

由图 2 可以看出, 此时不考虑互耦效应的 MUSIC 算法完全失效, 而本文算法及互耦已知的 MUSIC 算法可正确分辨出入射信源的波达方向。

##### 仿真 2 算法统计性能分析

两个等功率的非相关信源, 入射方向为  $10^\circ$  和  $15^\circ$  快拍

数为 200, 比较本文算法及互耦已知 MUSIC 算法在不同信噪比情况下的统计性能(此时不考虑互耦的 MUSIC 算法完全失效)。图 3—图 5 为 100 次 Monte-Carlo 实验(每个 SNR 点做 100 次 Monte-Carlo 仿真)的仿真结果, 分别给出了算法 DOA 估计的成功概率、估计偏差及均方根误差(RMSE)的比较曲线。另外, 在图 4 中, 我们同时给出了互耦系数已知及未知时的 CRB 曲线。

由图可知, 在低信噪比时, 本文算法性能稍差于互耦已知的 MUSIC 算法, 但随着 SNR 的增大, 两者性能趋于一致。需指出的是, 与互耦已知 MUSIC 算法不同, 本文算法是在互耦信息未知情况下获得的高分辨力。

##### 仿真 3 算法的互耦自校正性能

参数设置同仿真 2, 表 1 给出了本文算法在不同信噪比条件下对第 3 个子阵互耦系数( $c_3$ )估计的均值及均方根误差(RMSE), 其为 100 次 Monte-Carlo 实验的统计结果。

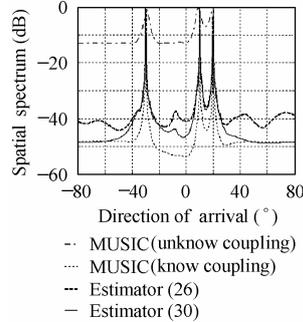


图 2 空间谱比较曲线  
Fig. 2 Comparison of spatial spectrums

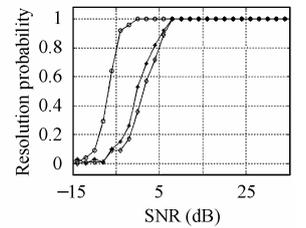


图 3 成功概率比较曲线  
Fig. 3 Comparison of resolution probability

为了便于分析, 我们定义互耦校正误差为

$$100 \times \frac{\|\tilde{\mathbf{C}} - \mathbf{C}\|_F}{\|\mathbf{C}\|_F}$$

式中  $\tilde{\mathbf{C}}$ ,  $\mathbf{C}$  分别代表互耦矩阵的估值及真值,  $\|\cdot\|_F$  表示矩阵的 Frobenius 范数。图 5 中给出了互耦校正误差随信噪比变化的曲线, 由图 5 可以看出, 当 SNR 大于 15dB 时, 互耦校正误差接近于 0, 即互耦矩阵估值接近于真值。

表 1 不同信噪比情况下互耦系数的估值结果(第 3 个子阵)

Table1 Estimated mutual coupling coefficients versus SNR(the third subarray)

| 信 噪 比 (dB)                |         | 10        | 12        | 14        | 20        | 30        | 40        |
|---------------------------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 真实值<br>0.3628+<br>0.2815j | 实部均值    | 0.3562    | 0.3604    | 0.3619    | 0.3636    | 0.3627    | 0.3628    |
|                           | 实部 RMSE | 2.8391E-2 | 2.2405E-2 | 1.8226E-2 | 8.5155E-3 | 2.6413E-3 | 8.4239E-4 |
|                           | 虚部均值    | 0.2901    | 0.2835    | 0.2826    | 0.2819    | 0.2818    | 0.2815    |
|                           | 虚部 RMSE | 4.0372E-2 | 3.0577E-2 | 2.4541E-2 | 1.0796E-2 | 3.1063E-3 | 1.1462E-3 |
| 真实值<br>0.2332+<br>0.1521j | 实部均值    | 0.2383    | 0.2321    | 0.2320    | 0.2325    | 0.2326    | 0.2331    |
|                           | 实部 RMSE | 3.4961E-2 | 2.4567E-2 | 2.2099E-2 | 8.5028E-3 | 3.0057E-3 | 1.0258E-3 |
|                           | 虚部均值    | 0.1606    | 0.1539    | 0.1531    | 0.1530    | 0.1526    | 0.1520    |
|                           | 虚部 RMSE | 3.5279E-2 | 2.8025E-2 | 2.2143E-2 | 9.8832E-3 | 3.1048E-3 | 9.2887E-4 |

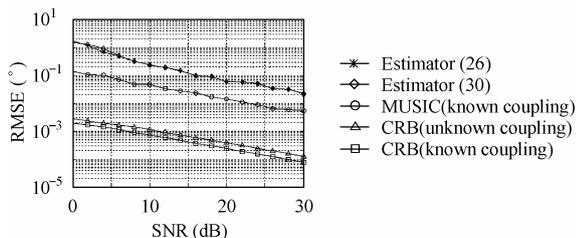


图4 均方根误差比较曲线

Fig.4 Comparison of RMSE

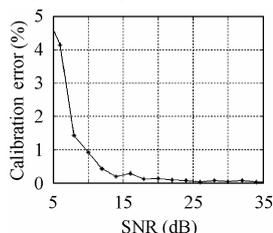


图5 互耦校正误差与信噪比关系

Fig.5 Calibration error versus SNR

## 5 结束语

本文利用均匀线阵互耦矩阵的带状、对称 Toeplitz 性及多子阵互耦矩阵的块状对角特性,提出了一种阵元互耦条件下的波达方向估计及互耦自校正算法。该算法将信源方位与互耦参数进行联合但去耦估计,只需一维谱峰搜索,避免了通常多参数联合估计的多维非线性搜索及迭代运算,并在不降低算法分辨力的同时,可明显减小运算量。另外,基于波达方向的精确估计,算法可准确估计出阵元间的互耦系数,实现多子阵的互耦自校正,算法具有计算量小、方位估计分辨力高、互耦校正效果好等优点。

## 参考文献

- [1] Yin Q Y, Newcomb R, Zou L H. Estimation of 2-D angles of arrival via parallel linear arrays[C]. Proceedings of IEEE ICASSP, Glasgow, Scotland, 1989: 2803-2806.
- [2] Hua Y B, Sarkar T K, Weiner D D. An L-shaped array for estimating 2-D directions of wave arrival[J]. *IEEE Trans. on AP*, 1991, 39(2): 143-146.
- [3] Zoltowski M D, Wong K T. Closed-form eigenstructure-based direction finding using arbitrary but identical subarrays on a

sparse uniform Cartesian array grid[J]. *IEEE Trans. on SP*, 2000, 48(8): 2205-2210.

- [4] Swindlehurst A L, Stoica P, Jansson M. Exploiting arrays with multiple invariances using MUSIC and MODE[J]. *IEEE Trans. on SP*, 2001, 49(11): 2511-2521.
- [5] Weiss A J, Friedlander B. Effects of modeling errors on the resolution threshold of the MUSIC algorithm[J]. *IEEE Trans. on SP*, 1994, 42(6): 1519-1526.
- [6] Yeh C, Leou M, Ucci D R. Bearing estimations with mutual coupling present[J]. *IEEE Trans. on AP*, 1989, 37(10): 1332-1335.
- [7] Dandekar K R, Ling H. Experimental study of mutual coupling compensation in smart antenna applications. *IEEE Trans. Wireless Communication*, 2002, 1(3): 480-487.
- [8] Stavropoulos K, Manikas A. Array calibration in the presence of unknown sensor characteristics and mutual coupling[C]. Proceedings of the European Signal Processing Conference, 2000: 1417-1420.
- [9] Inder J, James G R. An experimental study of antenna array calibration[J]. *IEEE Trans. on AP*, 2003, 51(3): 664-667.
- [10] Friedlander B, Weiss A J. Direction finding in the presence of mutual coupling. *IEEE Trans. on AP*, 1991, 39(3): 273-284.
- [11] Jaffer A G. Sparse mutual coupling matrix and sensor gain/phase estimation for array auto-calibration. Proceedings of IEEE Radar Conference, 2002: 294-297.
- [12] Hung E. A critical study of a self-calibration direction-finding method for arrays[J]. *IEEE Trans. on AP*, 1994, 42(2): 471-474.

齐崇英: 男, 1978年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理及空间谱估计, 发表论文10余篇。

王永良: 男, 1965年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为空时信号处理、阵列信号处理、雷达技术等。发表论文150余篇, 收入三大检索60余篇, 著有《空时自适应信号处理》、《空间谱估计理论与算法》学术专著。

张永顺: 男, 1961年生, 教授, 博士生导师, 比利时鲁汶大学访问学者, 长期从事电子对抗及雷达信号处理等方面的研究。

张明智: 男, 1962年生, 教授, 博士后, 主要研究方向为信息处理、模式识别等。