

# 电磁波在对流层中传播的抛物化方程的有限差分解法

方 剑 林为干 赵愉深

(电子科技大学应用物理研究所 成都 610054)

**摘要** 本文用箱式格式的有限差分法求解了电磁波在对流层中传播的抛物化波动方程。文中给出了该隐式格式的相容性、稳定性以及收敛性的证明和算例。典型算例表明,本文的方法可准确计算大气波导沿高度和距离方向变化的影响,较之目前普遍使用的傅里叶分裂步方法具有准确和处理边界条件方便之优点。

**关键词** 电磁波传播,有限差分法,箱式差分格式

## 1 引言

随着数字微波通信的发展,近年来有关电磁波在对流层中的传播的研究越来越受到人们的重视<sup>[1-6]</sup>。目前普遍采用傅里叶分裂步算法<sup>[1,2,4]</sup>来求解电磁波在对流层中传播的抛物化方程。这种方法与过去所采用的其它方法相比,需要的近似较少<sup>[4]</sup>,而且可以获得更为准确的结果。

但是,傅里叶分裂步法在处理大气折射指数沿距离和高度方向均发生变化时的大气条件以及边界条件遇到了一定的困难。另外,由于傅里叶分裂步法在对抛物化方程进行傅氏变换时需要一些近似,即将变系数的抛物化方程处理成常系数方程,因而在结果中会出现一些误差。这种误差在大气折射指数剧烈变化时尤为明显。因此有必要采用一种新的,不需做上述近似的方法来求解这个抛物化方程。为此本文提出了采用箱式格式的有限差分法来求解电磁波在对流层中传播的抛物化方程。

1981年 Ding Lee 等人<sup>[7]</sup>将有限差分法的 Crank-Nicolson 格式用于水下声波传播问题,并获得了部分成功。但若将 Crank-Nicolson 格式用于电磁波的抛物化方程,则遇到困难。本文采用了由 Keller<sup>[8]</sup>在1971年提出的箱式格式。该格式的特点是:(1)无条件稳定;(2)二阶精度;(3)可变步长;(4)处理边界条件容易。Keller使用的抛物化方程是一个实系数方程。本文使用箱式格式求解了变复系数的抛物化方程,并取得了满意的结果。

## 2 箱式差分格式

电磁波传播的抛物化方程及其边界条件有如下形式<sup>[2,4,5]</sup>:

1993-07-06 收到, 1994-09-12 定稿

方 剑 女, 1969年生, 博士生, 电磁场与微波技术专业。

林为干 男, 1919年生, 教授, 博士生导师, 中国科学院院士, 电磁场与微波技术专业。

赵愉深 男, 1937年生, 教授, 电磁场与微波技术专业。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = - \left( F_a \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + F_b \cdot U \right), \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial z} + \alpha \cdot U \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (2)$$

$$U \Big|_{z_{\max}} = 0, \quad (3)$$

式中  $F_a = i \cdot 2k_0$ ,  $F_b = k_0^2 \cdot (n^2 - 1 + 2z/a_0)$ ,  $k_0 = \omega/c$ .

为求解(1),(2)和(3)式, 我们先将它们写成如下形式的两个一阶方程<sup>[8]</sup>和边界条件:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = P, \quad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = - \left( F_a \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + F_b \cdot U \right), \quad (5)$$

$$(P + \alpha \cdot U) \Big|_{z=0} = 0, \quad (6)$$

$$U \Big|_{z_{\max}} = 0. \quad (7)$$

如图 1 所示, 对点  $(x_n, z_{j-1/2})$ , 列(4)式的差分方程; 对点  $(x_{n-1/2}, z_{j-1/2})$ , 列(5)式的差分方程, 即

$$\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h_j} = \frac{P_j^n + P_{j-1}^n}{2} = P_{j-1/2}^n, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{P_j^n - P_{j-1}^n}{h_j} + \frac{P_j^n - P_{j-1}^n}{h_j} \right) \\ & = F_{a_{j-1/2}}^{n-1/2} \cdot \frac{U_{j-1/2}^n - U_{j-1/2}^{n-1}}{k_n} + F_{b_{j-1/2}}^{n-1/2} \cdot U_{j-1/2}^n. \end{aligned} \quad (9)$$

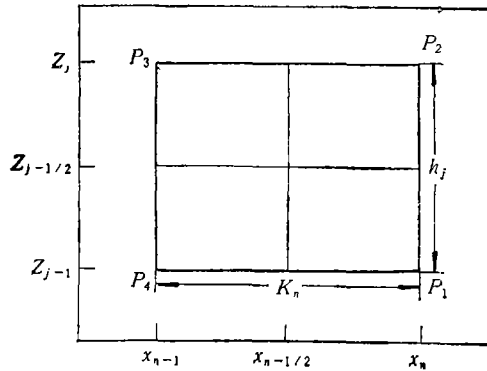


图 1 箱式格式的有限差分网络

将(8)和(9)式重新写成如下形式:

$$U_j^n - U_{j-1}^n - (1/2) \cdot h_j \cdot (P_j^n + P_{j-1}^n) = 0, \quad (10)$$

$$(S_1)_j \cdot P_j^n + (S_2)_j \cdot P_{j-1}^n + (S_3)_j \cdot (U_j^n + U_{j-1}^n) = R_{j-1/2}^{n-1/2}, \quad (11)$$

式中

$$(S_1)_j = 1, \quad (S_2)_j = -1, \quad (S_3)_j = (1/2) \cdot (\lambda_j + \mu_j), \quad (12)$$

$$R_{j-1/2}^{n-1/2} = -(P_j^{n-1} - P_{j-1}^{n-1}) + (1/2) \cdot (\lambda_j - \mu_j) \cdot (U_j^{n-1} + U_{j-1}^{n-1}), \quad (13)$$

$$\lambda_j = 2 \cdot (h_j/k_n) \cdot F_{a_{j-1/2}}^{n-1/2}, \quad (14a)$$

$$\mu_j = h_j \cdot F_{b_{j-1/2}}^{n-1/2}. \quad (14b)$$

(10)和(11)式适用于  $j = 1, 2, \dots, J - 1$ . 在  $j = 0$  和  $j = J$  点, 分别有

$$\alpha_0 \cdot U_0^n + \alpha_1 \cdot P_0^n = \gamma_0, \quad (15)$$

$$U_J = 0, \quad (16)$$

式中  $\alpha_0 = \alpha$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\gamma_0 = -(P_0^n + \alpha \cdot U_0^{n-1})$ .

由线性方程(10)和(11)式以及相应边界条件(15)和(16)式, 可以得到矩阵表达式

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\gamma}. \quad (17)$$

式中  $\mathbf{A}$  为三对角阵,  $\mathbf{A}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\gamma}$  矩阵的元素为块矩阵, 详细表达式见文献[9].

求解(17)式时, 采用块追赶法<sup>[9]</sup>.

### 3 相容性、稳定性和收敛性

根据 L. Lapidus 等人<sup>[10]</sup>在探讨复杂的非线性抛物型偏微分方程的稳定性、相容性和收敛性时的思想, 假定电磁波的抛物化方程的系数在某一局部范围内是常数且等步长. 这在实际应用中往往可以得到满足, 因为步长增量通常取得比较小. 当然, 在应用中尚需做进一步的数字实验.

**3.1 相容性** 在(4)式和(5)式中假定  $F_a$  和  $F_b$  为常数. 在  $(x_n, z_{j-1/2})$  和  $(x_{n-1/2}, z_{j-1/2})$  点, (4)式和(5)式为

$$\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{j-1/2}^n = P_{j-1/2}^n, \quad (18a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{j-1/2}^{n-1/2} = - \left( F_a \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{j-1/2}^{n-1/2} + F_b \cdot U_{j-1/2}^{n-1/2} \right). \quad (18b)$$

相应的差分方程为

$$\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} = \frac{P_j^n + P_{j-1}^n}{2}, \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \frac{P_j^n - P_{j-1}^n}{h} + \frac{P_{j-1}^{n-1} - P_{j-2}^{n-1}}{h} \right) \\ & = - \left( F_a \cdot \frac{U_{j-1/2}^n - U_{j-1/2}^{n-1/2}}{k} + F_b \cdot U_{j-1/2}^{n-1/2} \right). \end{aligned} \quad (19b)$$

采用泰勒展开, 得到

$$\left( \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} - \frac{P_j^n + P_{j-1}^n}{2} \right) - \left( \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{j-1/2}^n - P_{j-1/2}^n \right) = O(h^2) \quad (20)$$

以及

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{P_j^n - P_{j-1}^n}{h} + \frac{P_{j-1}^{n-1} - P_{j-2}^{n-1}}{h} \right) + F_a \cdot \frac{U_{j-1/2}^n - U_{j-1/2}^{n-1/2}}{k} + F_b \cdot U_{j-1/2}^{n-1/2} \right] \\ & - \left( \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{j-1/2}^{n-1/2} + F_a \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{j-1/2}^{n-1/2} + F_b \cdot U_{j-1/2}^{n-1/2} \right) = O(k^2 + h^2). \end{aligned} \quad (21)$$

由(20), (21)式, 相容性得证.

**3.2 稳定性** 采用 Von Neumann 方法来证明稳定性. 将(11)和(1)式重新写成如下形式:

$$\begin{aligned} & (1 + 2\beta) \cdot U_{j+1}^n - 2 \cdot (1 - 2\beta) \cdot U_j^n + (1 + 2\beta) \cdot U_{j-1}^n \\ & = (\alpha - 2\beta) \cdot U_{j+1}^{n-1} + 2 \cdot (\alpha + 2\beta) \cdot U_j^{n-1} + (\alpha - \beta) \cdot U_{j-1}^{n-1}, \end{aligned} \quad (22)$$

式中  $\alpha = (\lambda - \mu)/(\lambda + \mu)$ ,  $\beta = 2/[h(\lambda + \mu)]$ .

令  $U_i^* = T^* \cdot e^{iPz_i}$ , 并代入(22)式, 则

$$T = (A - Bi)/(A + Bi), \quad (23)$$

式中  $A = h^2 \cdot k_0^2 \cdot f/4 - \text{tg}^2(Ph/2)$ ,  $B = h^2 \cdot k_0^2/k$ ,  $f = n^2 - 1 + 2z/a_e$  为常数.

从(23)得到

$$|T| \leq 1. \quad (24)$$

从而箱式格式稳定性得证.

**3.3 收敛性** 收敛性的证明同文献[7].

#### 4. 算例

这里给出了几个典型算例, 以此说明箱式格式的适用性及其优点.

本文利用的一个描述大气条件的参量是修正折射指数  $M$ , 它与折射指数之间的关系为

$$M = (n - 1 + z/a_e) \times 10^6. \quad (25)$$

本文计算中均假定电磁波在光滑导电海平面上传播, 有关介电常数取自文献[11], 计算的衰落值  $F$  由下式给出:

$$F = 10 \cdot \lg(|U|^2/|U_0|^2). \quad (26)$$

对于标准的均匀大气, 修正折射指数为  $0.118\text{m}^{-1}$ , 图 2 给出了在频率为  $3\text{GHz}$  时, 水平极化电磁波在距源  $20\text{km}$  的电平衰落, 同时也给出了与傅里叶分裂步法计算结果的比较. 可以看到, 在这种条件下, (1)式化为常数系数偏微分方程, 傅里叶分裂步法不需做近似, 是准确的, 故两种方法的计算结果应是一致的, 图 2 也正说明了这一点.

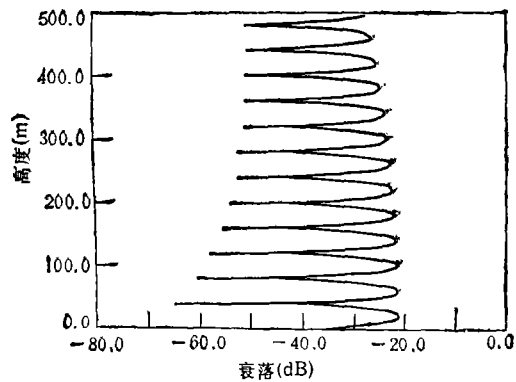


图 2 标准大气下的衰落  
实线为箱式法结果, 虚线为傅里叶分裂步法结果

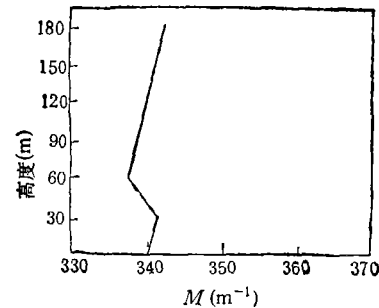


图 3 大气地面波导下的修正折射指数  $M$

对于有地面波导的情况, 采用如图 3 所示的波导模型<sup>[4]</sup>. 在  $0 \sim 30\text{m}$  以及  $60\text{m}$  以上高度, 修正折射指数梯度为  $0.118\text{m}^{-1}$ ; 在波导中为  $-1.06\text{m}^{-1}$ . 图 4 给出了频率为  $3\text{GHz}$  时, 水平极化电磁波在距源  $40\text{km}$  处的电平衰落, 同时也给出了傅里叶分裂步法的计算结果. 由于在此大气条件下  $M$  是变化的, (1)式是变系数的微分方程, 傅里叶分

裂步法需设 $M$ 为常数,将(1)式处理成了常系数方程,因此产生了较大误差;而本文所采用的箱式方法正是考虑到了这种变化,不必采用上述近似,使得计算结果准确,能够计算出较深的衰落。从图4中可以清楚地看到这一点。

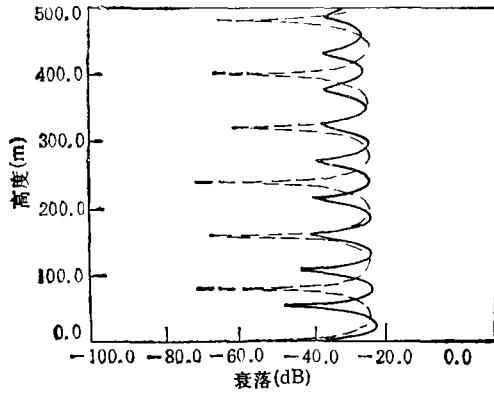


图4 地面波导下的电平衰落  
实线为傅里叶裂步法结果,虚线为箱式法结果

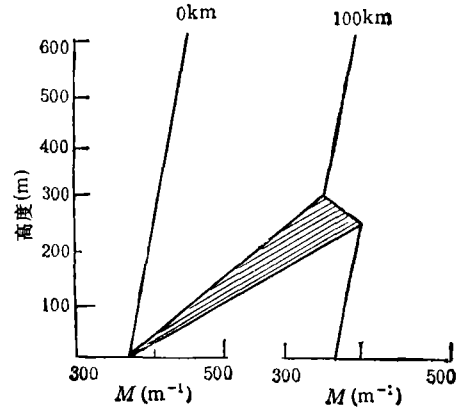


图5 变化波导模型  
阴影处为波导层,在100km时,波导高度为300m,厚度为50m.

当地面波导在高度和距离方向均变化时,我们采用了如图5所示的模型<sup>[1]</sup>。波导中修正折射指数梯度为 $-1.06\text{m}^{-1}$ ,其它各处为 $0.118\text{m}^{-1}$ 。图6给出了频率为3GHz时,水平极化电磁波在距源40km处的电平衰落。图7给出了在305m高度处,电磁波在距离方向的衰落情况。

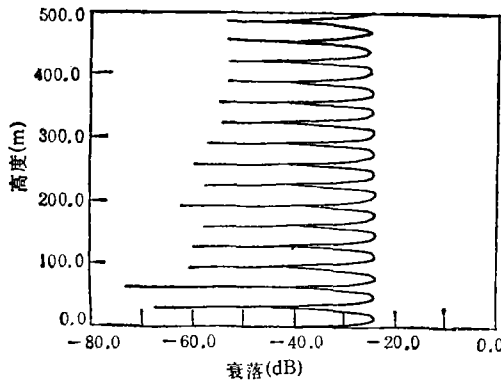


图6 变化波导下距源40km处的衰落

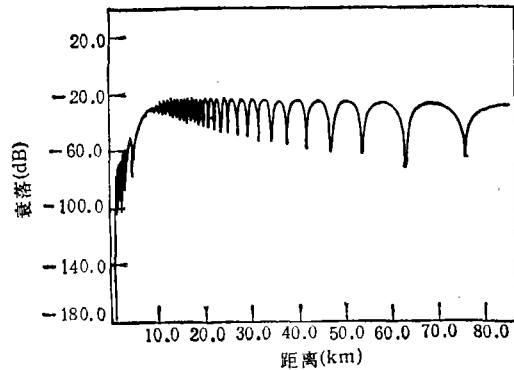


图7 变化波导下305m高度处沿水平方向的电平衰落

### 参 考 文 献

- [1] Barrios A E. IEEE Trans. on AP, 1992, AP-40(7): 791-797.
- [2] Dockery G D. IEEE Trans. on AP, 1988, AP-36(10):1464-1470.
- [3] Hitney H V, Richter J H, Papert R A, et al. Proc IEEE, 1985, 73(2): 265-285.
- [4] Kuttle J R, Dockery G D. Radio Science, 1991, 26(2): 381-393.

- [5] Craig K H, Levy M F. Field Strength of Forecasting with the Parabolic Equation: Wideband Applications, Presented at Sixth Int. Conf. Antennas and Propagat. (ICAP,89), Warwick, U.K: 1989.
- [6] Craig K H. Electron. Lett., 1989, 24(12):1136—1139.
- [7] Ding Lee, Bostea G J. Acoust. Soc. Am., 1981, 70(3):795—800.
- [8] Keler H B. A New Difference Scheme for Parabolic Problems, in Numerical Solution of Partial Differential Equation (J.Brambe, ed.), Vol. II, Academic Press, 1971, 345—360.
- [9] Fang Jian, Finite-Difference Solution of the Parabolic Equation Representing Electromagnetic Wave Propagation in the Troposphere: [Master Thesis]. University of Electronic Science and Technology of China, 1993, (in Chinese).
- [10] Lapidus L, Pinder F. Numerical Solution of Partial Differential Equation in Science and Engineering, Chichester: Wiley, 1982, 179—203.
- [11] Stratton J A. Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941, 265—266

## NUMERICAL SOLUTION OF THE PARABOLIC EQUATION REPRESENTING ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION IN THE TROPOSPHERE USING BOX METHOD

Fang Jian Lin Weigan Zhao Yushen

(University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054)

**Abstract** An implicit finite-difference (IFD) scheme of box method is introduced for solving the parabolic equation representing electromagnetic wave propagation in the troposphere. The consistency, stability and convergence of the box method is demonstrated. More accurate results are obtained while the modified refractivity varies both with the height and the distance. Compared with the popular used Fourier split-step method, the box method has the advantage of having more accurate results and solving boundary conditions easier.

**Key words** Electromagnetic wave propagation, Finite-difference scheme, Box method