第 15 卷 第 2 期
1993 年 3 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 15, No. 2
Mar., 1993

# DCTT 统计最优化模型及其性质

郝 跃
(西安电子科技大学微电子所,西安 710071)

**摘要** 本文提出了集成电路最优化中综合考虑成品率极大、最佳容差设计、调整设计和生产效益极大化设计的统计最优化模型(Design Centering, Tolerance and Tuning, 简称 DCTT 模型). 讨论了该模型与广义统计最优化模型的等价性以及其他主要性质. 在确定性最优化框架下,该模型为统计最优化和集成电路可制造性设计的进一步发展开辟了新途径.

**关键词** 集成电路;统计最优化;不可微规划

## 一、引 言

在集成电路生产和制造过程中,考虑设计参数(如工艺、版图尺寸等参数)出现统计起伏的情况下,对集成电路性能指标进行的优化设计是一种统计最优化设计. 主要包括最优电路参数成品率设计、参数容差设计和调整设计(如激光或电学方法对电路参数进行修正). 目的是使电路制造的成品率最高,加工成本最低. 这类统计最优化设计思想目前已在不同领域得到应用和发展[1,2]. 统计最优化研究主要基于 Monte Carlo 类统计最优化方法和几何逼近的确定性方法. 前一方法虽对优化变量维数和电路特性函数的形态无严格要求,但其计算量很大,尤其是在综合考虑集成电路工艺、器件和电路模拟后,该方法难于推广应用. 为了解决计算量大的问题,可采用后一方法,即函数逼近方法. 已经证明后一方法对集成电路优化设计是有效的[3,4]. 但是,这一方法的精度在一定程度上受逼近函数的影响. 由于需不断修正特性函数而使计算量仍然较大. 另外,统计类方法理论尚不完善,到目前为止仍无严格的理论和收敛性证明.因此,近年来确定性方法的发展较快,尤其是由于其理论严格,分析快速使人们增加了对其进行研究的兴趣.

本文在确定性统计最优化设计的框架下,提出了在容差域为凸域的任意随机分布条件下,综合考虑电路制造成品率最大,最佳容差设计、调整设计和效益极大化的统计最优化模型,并讨论了该模型的主要性质. 国内外大量集成电路制造和统计研究证明,容差域为凸域的条件对集成电路的芯片制造是适合的[5,6],因此,该模型具有广泛的实用性. 另外,该模型在具有抑制约束膨胀的半无穷不可微规划框架下完全可解,且变量维数问题能得到很好解决. 这对统计规划的进一步发展起到了重要作用.

---

1991.09.02 收到 1992.08.10 定稿

郝 跃 男,1958年出生,副教授·从事专业为半导体器件与微电子学; 现研究方向为集成电路 CAD/CAM.IC 可制造性和统计最优化理论方法,工艺和器件统计模型,以及 IC 制造动力学理论研究.

## 二、统计规划模型构造及其等价性结果

在集成电路制造过程中存在统计起伏的情况下，设计变量 $p\in R^n$ 是以 $p^0\in R^n$ 为中心，$\varphi(p-p^0)$ 为联合概率密度函数的随机变量。若定义与 $p$ 的随机分布有关的水平集 $L_\alpha(p^0)$ 为

$$L_\alpha(p^0)=\{p|\varphi(p-p^0)\geqslant\alpha\}\tag{1}$$

并定义电路设计的可接受域 $R_A$ 为

$$R_A=\{p|L^i\leqslant f^i(p)\leqslant U^i, i=1,2,\cdots,m_1\}\tag{2}$$

式中 $f^i(p), i\in M=\{1,2,\cdots,m_1\}$ 为电路特性函数，$L^i$ 和 $U^i$ 分别表示第 $i$ 个电路特性满足要求的下限和上限指标。显然

$$\bar{Y}(p^0,\alpha)=\int\cdots\int_{L_\alpha(p^0)\subseteq R_A}\varphi(p-p^0)dp\tag{3}$$

表示 $p^0$ 为设计值的电路设计满足要求的参数成品率(合格率)。当约定 $p^0\geqslant 0$ 时，成品率极大(又称中心设计)问题表示为

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\alpha,p^0}:\ \alpha\\&\text{s.t.}:\ L_\alpha(p^0)\subseteq R_A\\&\qquad p^0\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

式中 s.t. 表示约束条件。这是一个最优化问题。由于在集成电路制造过程中，$\varphi(p-p^0)$ 一般为凸函数[5,6](例如可用正态分布，对数正态分布或均匀分布函数逼近)，故由(1)式确定的水平集 $L_\alpha(p^0)$ 为一凸集。下面的引理给出了凸集与范数域逼近关系。

**引理 1** 对于任意包含零点的有界凸集 $K$，均能与一个范数为 $n(p-p^0)$ 的范数域相联系，且有

$$K=\{p|n(p-p^0)\leqslant r\}$$

对于 $L_\alpha(p^0)$ 凸集，$n(p-p^0)$ 总可以用 Minkowski 范数逼近。引入与 $L_\alpha(p^0)$ 有关的范数域 $S_r(p^0)$ 为

$$\begin{aligned}S_r(p^0)&=\{p|n(p-p^0)\leqslant r\}\\&=\{p|p=p^0+r\omega, n(\omega)\leqslant 1\}\end{aligned}\tag{5}$$

由引理 1 和(5)式，(4)式变为

$$\left.\begin{aligned}&\max_{r,p^0}:\ r\\&\text{s.t.}:\ S_r(p^0)\subseteq R_A\\&\qquad p^0\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

若定义设计参数容差域为 $R_T=\{p|\,|p_i-p_i^0|\leqslant t_i, i=1,2,\cdots,n\}$，且设 $T=\mathrm{diag}\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$。其中 $p_i$ 为随机变量 $p$ 的第 $i$ 个分量. 这样，与容差域相关的范数 $n_T(p-p^0)$ 为

$$n_T(p-p^0)=n[T^{-1}(p-p^0)]$$

$T^{-1}$ 为 $T$ 的逆矩阵，则范数域 $S_r(p^0,t)$ 为

$$
\begin{aligned}
S_r(p^0,t) &= \{p \mid n_T(p-p^0) \leqslant r\} \\
&= \{p \mid n[(1/r)T^{-1}(p-p^0)] \leqslant 1\} \\
&= S_1(p^0, rt)
\end{aligned} \tag{7}
$$

设加工过程前后有 $l(l \leqslant n)$ 个参数可进行调整(如参数可用激光或电调整)，定义映射 $r(q)$ 为

$$
r(q) = \begin{cases} q_i\tau_i, & i \leqslant l \\ 0, & l < i \leqslant n, \quad q \in R^l \end{cases} \tag{8}
$$

式中 $q_i$ 为调整量，$\tau_i$ 为确定 $q_i$ 调整方向的量，设可调整域为 $\Gamma_0$，考虑参数双向或单向调整要求

$$\Gamma_0 = \{\tau \mid -1 \leqslant \tau_i \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,l_1, 0 \leqslant \tau_j \leqslant 1, j = 1,2,\cdots,l_2, l_1 + l_2 = l\}$$

$\Gamma_0$ 和 $S_r(p^0,t)$ 均为紧集．根据调整过程性质，与该过程相关的范数域 $S_1(p^0, t, r(q))$ 为

$$
S_1(p^0,t,r(q)) = \begin{cases} S_1(p^0 + r(q), t), & \text{加工前调整的参数} \\ S_1(p^0,t) + r(q), & \text{加工后调整的参数} \end{cases}
$$

综合考虑成品率极大设计，容差设计和调整设计，并引入生产费用函数 $C(p^0,t,q)$，则广义的统计最优化模型 DCTT′ 为

$$
\text{DCTT}' \quad \left.\begin{aligned}
&\min_{p^0,t,q}: \ C(p^0,t,q) \\
&\text{s.t.}: \ S_1(p^0,t,q) \subseteq R_A \\
&\qquad p^0,t,q \geqslant 0, \tau \in \Gamma_0
\end{aligned}\right\} \tag{9}
$$

DCTT′ 统计最优化模型具有一般和普遍意义．由于模型约束条件存在两个不同域的嵌入形式，利用一般最优化方法求解该问题几乎是不可能的．为此，必须给出 DCTT′ 模型的等价性结果，以便使该模型最终是可解的．令 $H = \operatorname{diag}(q_1, q_2, \cdots, q_l)$，将(2)式变为 $R_A = \{p \mid g_i(p) \leqslant 0, i = 1,2,\cdots,m\}$，式中

$$
g_i(p) = \begin{cases} L^i - f^i(p), & i = 1,2,\cdots,m_1 \\ f^j(p) - U^j, & j = 1,2,\cdots,m_1, \quad i = j + m_1 \end{cases}
$$

则 DCTT′ 的等价性模型 DCTT″ 为

$$
\text{DCTT}'' \quad \left.\begin{aligned}
&\min_{p^0,t,q}: \ C(p^0,t,q) \\
&\text{s.t.}: \ \max_{n(\omega)\leqslant 1} \min_{\tau\in\Gamma_0} \max_{i\in I_A} g_i(p^0 + H\tau + T\omega) \leqslant 0
\end{aligned}\right\} \tag{10}
$$

式中 $I_A = \{1,2,\cdots,m\}$ 为约束函数的指标集．

**命题 1**　**DCTT′ 与 DCTT″ 是等价的．**

**证明**　由于 DCTT′ 与 DCTT″ 中的 $C(\cdot,\cdot,\cdot)$ 相同，故只需证明约束条件等价即可．令 $x = (p^0,t,q)^T$．利用反证法，假设 $\bar{x} = (\bar{p}^0, \bar{t}, \bar{q})^T$ 对于 DCTT′ 可行，而对 DCTT″ 不可行．由 DCTT″，必有一 $\bar{i} \in I_A$，使得

$$
\max_{n(\omega)\leqslant 1} \min_{\tau\in\Gamma_0} \max_{i\in I_A} g_i(\bar{p}^0 + \bar{H}\tau + \bar{T}\omega) = \max_{n(\omega)\leqslant 1} \min_{\tau\in\Gamma_0} g_{\bar{i}}(\bar{p}^0 + \bar{H}\tau + \bar{T}\omega) > 0
$$

设 $\varpi$ 为上式的极大值，则

$$\min_{\tau\in\Gamma_0} g_i(\bar{p}^0 + \bar{H}\tau + \bar{T}\bar{\omega}) > 0$$

因此，$\forall\tau\in\Gamma_0$，均有

$$g_i(\bar{p}^0 + \bar{H}\tau + \bar{T}\bar{\omega}) > 0$$

显然，$g_i(\bar{p}^0 + \bar{H}\bar{\tau} + \bar{T}\bar{\omega}) > 0$，即 $\bar{x} = (\bar{p}^0, \bar{t}, \bar{\omega})^T$ 不是 DCTT′ 的可行解，这与假设矛盾，故 $\bar{x}$ 必为 DCTT″ 的可行解。

反之，若 $\bar{x}$ 为 DCTT″ 的可行解而又不是 DCTT′ 的可行解。由于 DCTT′ 模型，

$$\forall\tau\in\Gamma_0, S_1(\bar{p}^0, \bar{t}, \bar{q}) \notin R_A$$

则对于 $\bar{x}\in S_1(p^0, t, q)$，至少存在一个 $\omega$，记为 $\hat{\omega}$，使得某一个 $\bar{i}\in I_A$，有

$$g_i(\bar{p}^0 + \bar{H}\tau + \bar{T}\hat{\omega}) > 0$$

因

$$\max_{n(\omega)\leqslant 1}\min_{\tau\in\Gamma_0}\max_{i\in I_A} g_i(\bar{p}^0 + \bar{H}\tau + \bar{T}\omega) \geqslant \max_{n(\omega)\leqslant 1}\min_{\tau\in\Gamma_0} g_i(\bar{p}^0 + \bar{H}\tau + \bar{T}\omega)$$

$$\geqslant \min_{\tau\in\Gamma_0} g_i(\bar{p}^0 + \bar{H}\tau + T\omega) > 0$$

即 $\bar{x}$ 对 DCTT″ 是不可行的，这与假设矛盾。这样就证明了 DCTT′ 与 DCTT″ 的等价性。

令 $\Omega = \{\omega\in R^n | n(\omega)\leqslant 1\}$，将 DCTT″ 重新写为

$$\left.\begin{aligned} \text{DCTT}\quad & \min_{x}:\ C(x) \\ & \text{s.t.}:\ \max_{\omega\in\Omega}\min_{\tau\in\Gamma_0}\max_{i\in I_A} g_i(x,\omega,\tau)\leqslant 0 \\ & x\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

由于约束函数不连续，故 DCTT 为不可微统计最优化问题；又因 $\omega$ 和 $\tau$ 分别可在 $\Omega$ 和 $\Gamma_0$ 域中任意选择，故 DCTT 又是半无穷规划问题。在 DCTT 模型的性质下，这一模型是完全可解的。

## 三、DCTT 模型的主要性质

若令 $\phi(x,\omega) = \min_{\tau\in\Gamma_0}\max_{i\in I_A} g_i(x,\omega,\tau)$，$\psi(x) = \max_{\omega\in\Omega}\phi(x,\omega)$

则有下面性质成立。

**命题 2**　若 $g_i(\cdot,\cdot,\cdot), i\in I_A$ 连续，则 $\max_{i\in I_A} g_i(\cdot,\cdot,\cdot)$ 也连续。

**证明**　利用归纳法，当 $I_A = \{1,2\}$ 时

$$\max_{i\in I_A} g_i(\cdot,\cdot,\cdot) = [g_1(\cdot,\cdot,\cdot) + g_2(\cdot,\cdot,\cdot)$$

$$+ |g_1(\cdot,\cdot,\cdot) - g_2(\cdot,\cdot,\cdot)|]/2$$

由 $g_i(\cdot,\cdot,\cdot)$ 的连续性，可得 $\max_{i\in I_A} g_i(\cdot,\cdot,\cdot)$ 连续。若令 $I_{A'} = \{1,2,\cdots,k\}$，$\max_{i\in I_{A'}} g_i(\cdot,\cdot,\cdot)$ 连续，则当 $I_A = \{1,2,\cdots,k,k+1\}$ 时

$$\max_{i\in I_A} g_i(\cdot,\cdot,\cdot)=\max\{\max_{i\in I_A'} g_i(\cdot,\cdot,\cdot),g_{k+1}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$$

显然命题成立。

由于 DCTT 中约束条件是不可微的，需给出函数局部 Lipschitz 连续（L.L.C.）的有关性质。

**定义 1** 如果存在常数 $L\in[0,\infty)$，$\hat{\rho}>0$，使 $\forall x,y\in B(\hat{x},\hat{\rho})=\{x\mid \|x-\hat{x}\|\leqslant\hat{\rho}\}$ 时，$|f(x)-f(y)|\leqslant L\|x-y\|$，则称 $f:R^n\to R$ 在 $\hat{x}\in R^n$ 点是 L.L.C. 的。

**命题 3** 若 $g_i(\cdot,\cdot,\cdot)$，$i\in I_A$ 连续，则 $\phi(x,\omega)$ 是 L.L.C. 的，$\phi(x)$ 也是 L.L.C. 的。

**证明** 令 $h(x,\omega,\tau)=\max\limits_{i\in I_A} g_i(x,\omega,\tau)$，由命题 2 知，$h(x,\omega,\tau)$ 连续。设 $x^1$，$x^2\in D\subset R^n$，$D$ 为一紧集；设 $\omega^1,\omega^2\in\Omega$，对于 $k=1,2$，令 $\tau^k$ 为 $h(x^k,\omega^k)$ 在 $\Gamma_0$ 上的最小值，即

$$\phi(x^k,\omega^k)=h(x^k,\omega^k,\tau^k)$$

则有 $\phi(x^k,\omega^k)\leqslant h(x^k,\omega^k,\tau^l)$，$l\neq k(l=1,2)$，故

$$\begin{aligned}-|h(x^1,\omega^1,\tau^1)-h(x^2,\omega^2,\tau^1)|&\leqslant h(x^1,\omega^1,\tau^1)-h(x^2,\omega^2,\tau^1)\\&\leqslant h(x^1,\omega^1,\tau^1)-h(x^2,\omega^2,\tau^2)=\phi(x^1,\omega^1)-\phi(x^2,\omega^2)\\&\leqslant h(x^1,\omega^1,\tau^2)-h(x^2,\omega^2,\tau^2)\leqslant|h(x^1,\omega^1,\tau^2)-h(x^2,\omega^2,\tau^2)|\end{aligned}\tag{12}$$

由于 $\Gamma_0$ 为紧集和 $h(x,\omega,\cdot)$ 连续，则存在一个 $L\in[0,\infty)$，使得对 $\forall x^1,x^2\in D,\omega^1$，$\omega^2\in\Omega,\forall\tau\in\Gamma_0$，有

$$|h(x^1,\omega^1,\tau)-h(x^2,\omega^2,\tau)|\leqslant L\|y^1-y^2\|\tag{13}$$

式中 $y=(x,\omega)^T$。由(12)和(13)式，有

$$|\phi(x^1,\omega^1)-\phi(x^2,\omega^2)|\leqslant L\|y^1-y^2\|$$

即 $\phi(x,\omega)$ 是 L.L.C. 的。同理可得 $\phi(x)$ 也是 L.L.C. 的。

由于 $\phi(x,\omega)$ 满足 L.L.C. 性质，故可用建立在 L.L.C. 上的不可微最优化方法[7]求 DCTT 的解。

作为特例，给出 $g_i(\cdot,\cdot,\cdot)$ 为凸函数条件下的 DCTT 性质。

**命题 4** 如果 $g_i(x,\cdot,\cdot)$，$i\in I_A$ 是凸的，则对 $\forall x\in R^n$，$\phi(x,\cdot)$ 也是凸的。

**证明** 由于 $g_i(x,\cdot,\cdot)$ 是凸的，知 $h(x,\cdot,\cdot)$ 也是凸的。对于 $\omega^1,\omega^2\in R^n$，$\tau^1,\tau^2\in R^l$，存在 $\lambda\in[0,1]$，使

$$\begin{aligned}\phi(x,\lambda\omega^1+(1-\lambda)\omega^2)&=\min_{\tau\in\Gamma_0} h(x,\lambda\omega^1+(1-\lambda)\omega^2,\tau)\\&\leqslant h(x,\lambda\omega^1+(1-\lambda)\omega^2,\lambda\hat{\tau}^1+(1-\lambda)\hat{\tau}^2)\end{aligned}$$

式中 $\hat{\tau}^1=\operatorname{Arg}\min\limits_{\tau\in\Gamma_0} h(x,\omega^1,\tau)$，$\hat{\tau}^2=\operatorname{Arg}\min\limits_{\tau\in\Gamma_0} h(x,\omega^2,\tau)$；故，对于 $\forall x\in R^n,\omega^1,\omega^2\in\Omega$，$\lambda\in[0,1]$

$$\begin{aligned}\phi(x,\lambda\omega^1+(1-\lambda)\omega^2)&\leqslant\lambda h(x,\omega^1,\hat{\tau}^1)+(1-\lambda)h(x,\omega^2,\hat{\tau}^2)\\&=\lambda\min_{\tau\in\Gamma_0} h(x,\omega^1,\tau)+(1-\lambda)\min_{\tau\in\Gamma_0} h(x,\omega^2,\tau)\\&=\lambda\phi(x,\omega^1)+(1-\lambda)\phi(x,\omega^2)\end{aligned}$$

故 $\phi(x,\cdot)$ 是凸函数。

**引理 2**[8] 令$D$为一凸集，$\Sigma$为$D$的一支撑超平面，而$B$为$\Sigma$和$D$的交集，则$B$上的每一个极点都是$D$的极点。

**命题 5** 如果$\Omega$为一有界闭凸集，$\phi(x,\cdot)$ 是凸的，则 $\phi(x,\cdot)$ 必然在某个极点上达到极大。

**推论 1** 若设计变量$p$的概率密度函数 $\varphi(p-p^0)$ 为均匀分布（$\Omega$ 为超立方体），即

$$\Omega=\{\omega\in R^n \mid |\omega_i|\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n\}$$

若 $\phi(x,\cdot)$为凸的，则 $\omega^*=\mathrm{Arg}\max\limits_{\omega\in\Omega}\phi(x,\omega)$ 必然在$\Omega$的 $2^n$ 个顶点上达到。

推论 1 说明了目前确定性统计规划方法（如 Bandler 模型和方法[9]）为 DCTT 模型的一种特例。

由以上结论可知，DCTT 模型具有广泛的适用性。若利用不可微规划方法求 DCTT 问题可使确定性统计最优化方法的研究在原来基础上大大前进一步，以适于解决集成电路这类复杂系统的最优化设计问题。

## 四、结 论

本文提出了集成电路参数成品率极大、容差设计、调整设计和加工成本极小的统计最优设计（DCTT）模型。该模型具有广泛的概括性和适应性。讨论了 DCTT 模型的主要性质，尤其是约束函数的 L.L.C. 性质使得可用半无穷不可微最优化方法求解该模型。该模型在特殊条件下等价为目前已有的诸确定性统计最优化模型，这无疑为确定性统计规划方法的进一步研究和发展开辟了一条新途径。

## 参 考 文 献

[1] J. W. Bandler, S. Chen, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-33** (1988) 3, 424—441.
[2] P. K. Mozumder, A. J. Strojwas, *Proc. IEEE*, **78**(1990) 2, 435—454.
[3] 郝 跃，应用科学学报，**9**(1991)3，233—242.
[4] 郝 跃，西安电子科技大学学报，**17**(1990)4，76—81.
[5] J. P. Spoto et al., *IEEE Trans. on CAD/IC*, **CAD-5** (1986) 1, 90—106.
[6] 郝 跃，电子科学学刊，**13**(1991)1，78—82.
[7] K. W. Kiwiel, Method of Descent for Nondifferentiable Optimization, Springer-Verlag, Berlin, (1985), Chap. 7.
[8] D. G. Luenberger, Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addision-Wesley, Publishing Co. (1973), Chap. 5.
[9] J. W. Bandler et al., *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-33** (1985) 12, 1519—1530.

# DCTT STATISTICAL OPTIMIZATION METHOD AND ITS FEATURES

Hao Yue

(*Xidian University, Xi'an* 710071)

**Abstract** A statistical optimization method of integrated circuit design is proposed. This model summerizes optimal centering design of yield maximization, optimal tolerance, tuning design and maximum production profit design. The equivalence between this method and the general statistical optimization method is discussed, and the main features of the model are given. Based on the frame of deterministic optimization method, the general statistical optimization method can be improved further by the model proposed in this paper.

**Key words** Integrated Circuits; Statistical optimization; Nondifferentiable programming