

直接数字频率合成器相位截断杂散谱的精确分析¹

谢仁宏 是湘全

(南京理工大学通信工程系 南京 210094)

摘要: 该文在 Nicholas 采用数论方法得到的相位截断杂散谱的幅度和位置分布结果的基础上, 运用映射和数论工具对杂散谱位置分布进行了分析, 提出了一种简化算法, 可精确分析相位截断杂散谱的谱线幅度和杂散位置.

关键词: 直接数字频率合成, 相位截断, 杂散, 映射

中图分类号: TN74 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)03-0495-05

Precise Analysis of the Spurious Spectrum of DDS in the Presence of Phase Truncation

Xie Ren-hong Shi Xiang-quan

(Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract Based on the analysis of the spurious spectrum introduced by phase truncation which was made by Nicholas, the new simplified algorithm of spurious spectrum in the presence of phase truncation is presented by using the mapping mathematics and number theory. It is possible to precisely analyze the spurious spectrum location and the spurious amplitude introduced by phase truncation in practical applications.

Key words Direct digital frequency synthesis, Phase truncation, Spurious, Mapping

1 引言

直接数字频率合成 (DDS) 技术在 70 年代初提出后^[1], 随着 VLSI 的发展, 这种新型频率合成器在通信、雷达及其他电子系统中得到了广泛应用^[2-4]。由于 DDS 全数字实现的特点, 其输出频谱杂散较大是其固有的缺陷。相位截断是引起杂散谱的一个主要因素, 精确分析相位截断所引起的杂散谱特性对设计高性能的直接数字频率合成器具有重要意义。Nicholas 建立了 DDS 杂散信号模型, 采用数论方法得到了相位截断杂散谱幅度和位置分布的计算方法^[5]; 文献 [6] 采用信号分析方法推导了相位截断的输出杂散谱分布; 文献 [7] 采用时域波形分解方法, 分析了相位截断对 DDS 输出谱的影响。上述方法对于相位累加器长度较大时 (目前常用 DDS 相位累加器为 48 位), 存在计算量大的缺陷。本文以 Nicholas 采用数论方法得到的相位截断杂散谱的幅度和位置分布结果为基础, 运用映射和数论工具对杂散谱位置分布进行了分析, 提出了一种简化算法, 可精确分析相位截断杂散谱的谱线幅度和杂散位置。

2 相位截短输出杂散谱分析

假定 DDS 相位累加器的 N 位输出中只有高 A 位用于寻址波形 ROM, 相位截短位数为 $B = N - A$, 输出频率控制字为 K , 由于相位截短引起的相位误差序列为 $e_p(n)$, 则 DDS 输出的正弦序列 $s_p(n)$ 为

$$s_p(n) = \sin \left[\frac{2\pi}{2N} nK - \frac{2\pi}{2N} e_p(n) \right] \quad (1)$$

¹ 2002-11-27 收到, 2003-06-12 改回

对式 (1) 运用三角函数展开, 并考虑到实际情况, 有

$$\frac{e_p(n)}{2^N} \leq \frac{2^B}{2^N} = 2^{-A} \ll 1 \quad (2)$$

故式 (1) 可简化为

$$s_p(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{2^N}nK\right) - \frac{2\pi}{2^N}e_p(n)\cos\left(\frac{2\pi}{2^N}nK\right) \quad (3)$$

相位误差序列可表示为 [5]

$$e_p(n) = \sum_{i=1}^M \xi_i \exp\left(j2\pi i \frac{K}{2^B}n\right) e^{j\psi(i,M)} \quad (4)$$

式中 $\xi_i = [2^B/(2M)]\text{cosec}[i\pi/(2M)]$, $\psi(i,M) = -\cot[i\pi/(2M)]$, $M = 2^B/[2\text{GCD}(K, 2^B)]$, $\text{GCD}(K, 2^B)$ 表示 K 与 2^B 的最大公约数, 后面省略 GCD 。

将式 (4) 代入式 (3), 得到 DDS 输出正弦序列

$$s_p(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{2^N}nK\right) - \frac{\pi}{2^N} \sum_{i=1}^M \xi_i \left\{ \exp\left[j2\pi\left(\frac{iK}{2^B} + \frac{K}{2^B}\right)n\right] + \exp\left[j2\pi\left(\frac{iK}{2^B} - \frac{K}{2^B}\right)n\right] \right\} \times \exp(j\psi(i,M)) \quad (5)$$

由式 (5) 可知 DDS 输出谱线中除了有用频率外, 还存在大量杂散谱线, 其杂散谱线是由 $e_p(n)$ 的谱左右平移 $K/2^N$ 而得到。所以, 若能精确得到 $e_p(n)$ 的谱结构即可得到 DDS 输出信号的杂散频率位置及幅度。

文献 [5] 采用数论工具分析了相位误差序列 $e_p(n)$ 的谱结构, 得出在 $(0, f_c/2)$ 内由 $2^B/[2 \times (2^B, K)]$ 根离散谱线组成, 其谱线位置及幅度由下式计算:

$$i = \langle F_n \Gamma^{M-1} \rangle_{2M}, \quad F_n = 1, 2, \dots, M \quad (6)$$

$$\xi_i = (2^B/(2M)) \text{cosec}(i\pi/(2M)) \quad (7)$$

式中 $\Gamma = [K/(K, 2^B)]$, $M = 2^B/[2 \times (K, 2^B)]$, F_n 为杂散位置, $F_n = (f_{sp}/f_{clk})2M$, f_{sp} 为杂散频率值, f_{clk} 为时钟频率, ξ_i 为 F_n 对应的杂散幅度, $\langle \rangle$ 表示取模运算。

对于目前常用的 DDS 如 AD9854, 其 $N = 48$, $B = 31$, $A = 17$, 利用式 (6) 计算杂散谱位置运算量太大, 几乎没有实用价值。下面推出一种实用的简化算法来计算杂散的位置分布。

3 杂散位置分布的简化算法

3.1 数学准备

对于频率控制字 K_1, K_2 , 若有 $(K_1, 2^B) = (K_2, 2^B)$, 则对应的相位误差序列具有相同的周期 $M = 2^B/(K_1, 2^B) = 2^B/(K_2, 2^B)$ 。不失一般性, 设相位累加器初相为 0, 记相位误差序列的前 M 个值为 E_1, E_2 , 即

$$E_1 = \{\langle K_1 \rangle_{2^B}, \langle 2K_1 \rangle_{2^B}, \dots, \langle MK_1 \rangle_{2^B}\} \quad (8)$$

$$E_2 = \{\langle K_2 \rangle_{2^B}, \langle 2K_2 \rangle_{2^B}, \dots, \langle MK_2 \rangle_{2^B}\} \quad (9)$$

可以证明序列 E_1, E_2 中的数值尽管出现的先后不同, 但是一一对应的。设 $e_{p_1}(n) \in E_1$, $e_{p_2}(n) \in E_2$, 存在 $1 \leq l \leq M$, 满足

$$\langle nK_1 \rangle_{2^B} = \langle lK_2 \rangle_{2^B} \quad (10)$$

式(10)可进一步表示为

$$\langle n[K_1/(K_1, 2^B)] \rangle_M = \langle l[K_2/(K_2, 2^B)] \rangle_M \quad (11)$$

记 $k_1 = K_1/(K_1, 2^B)$, $k_2 = K_2/(K_2, 2^B)$, 则式(11)表示为

$$\langle nk_1 \rangle_M = \langle lk_2 \rangle_M \quad (12)$$

由 k_2 与 M 互质, 根据 Euler 定理可得

$$\langle k_2^{\Phi(M)} \rangle_M = 1 \quad (13)$$

其中 $\Phi(M)$ 为 Euler 函数。因为 M 为 2 的幂, 故

$$\Phi(M) = M[1 - (1/2)] = M/2 \quad (14)$$

将式(14)代入式(13)可得

$$\langle k_2^{M/2} \rangle_M = 1 \quad (15)$$

将式(12)与式(15)相乘, 利用同余性质得

$$l = \langle nk_1 k_2^{M/2-1} \rangle_M \quad (16)$$

定义映射 S

$$S(n) = \langle nk_1 k_2^{M/2-1} \rangle_M = l \quad (17)$$

同理可定义映射 T

$$T(l) = \langle lk_2 k_1^{M/2-1} \rangle_M = n \quad (18)$$

式(17), (18)说明对于序列 E_1 中的任一数值 $\langle nK_1 \rangle_{2^B}$, 在序列 E_2 中都有数值 $\langle lK_2 \rangle_{2^B}$ 与之对应。 n, l 之间的关系由所定义的映射确定。

3.2 相位误差序列 $e_{p_1}(n)$, $e_{p_2}(n)$ 的谱线关系

下面分析满足 $(K_1, 2^B) = (K_2, 2^B)$ 的频率控制字 K_1, K_2 对应的相位误差序列杂散谱线的关系。对相位误差序列 $e_{p_1}(n)$ 和 $e_{p_2}(n)$ 求离散傅里叶变换得到

$$F_1(i) = \sum_{n=1}^M \langle nK_1 \rangle_{2^B} \exp\left(-j\frac{2\pi}{M}in\right) \quad (19)$$

$$F_2(i) = \sum_{l=1}^M \langle lK_2 \rangle_{2^B} \exp\left(-j\frac{2\pi}{M}il\right) \quad (20)$$

若 $(K_1, 2^B) = (K_2, 2^B)$ 成立, 则

$$F_1(i) = \sum_{n=1}^M \left\{ \langle S(n)K_2 \rangle_{2^B} \exp\left[-j\frac{2\pi}{M}iT(S(n))\right] \right\} = \sum_{l=1}^M \left\{ \langle lK_2 \rangle_{2^B} \exp\left[-j\frac{2\pi}{M}iT(l)\right] \right\} \quad (21)$$

利用 \exp 函数的周期性, 可得到

$$F_1(i) = \sum_{l=1}^M \left[\langle lK_2 \rangle_{2^B} \exp\left(-j\frac{2\pi}{M}iT(i)\right) \right] = F_2(T(i)) \quad (22)$$

同理可得

$$F_2(i) = F_1(S(i)) \quad (23)$$

由此可以看出, 当 $(K_1, 2^B) = (K_2, 2^B)$ 时, 相应杂散分量只是位置不同, 但幅度相同. 故若求某频率控制字 K_2 的杂散谱, 取 $K_1 = (K_2, 2^B)$, 则对 K_1 有

$$i = \langle n\Gamma^{\Lambda-1} \rangle_{2\Lambda} = n \quad (24)$$

由 Nicholas 结论, 对应杂散谱幅度为

$$\zeta(i) = \frac{2^B}{M} \frac{1}{\sin(n\pi/M)}, \quad n \in [1, M] \quad (25)$$

对 K_2 的 M 根杂散谱线的位置为 $S(n)$, 杂散谱的幅度由式 (25) 给出.

3.3 映射简化算法

以上所述中, $M = 2^B / (K_1, 2^B) = 2^B / (K_2, 2^B)$, 在实际应用中 B 值均很大, 使 $k_1^{M/2-1}$, $k_2^{M/2-1}$ 难以计算, 下面给出映射的简化算法如下:

以 $S(n) = \langle nk_1 k_2^{M/2-1} \rangle_M$ 为例, 由同余性质, 若 $M \geq 1$ 且 $(k_2, M) = 1$, 则存在 C_2 , 使得

$$\langle C_2 k_2 \rangle_M = 1 \quad (26)$$

又有

$$\langle k_2^{M/2} \rangle_M = 1 \quad (27)$$

所以

$$\langle k_2^{M/2} \rangle_M = \langle C_2 k_2 \rangle_M \quad (28)$$

$$C_2 = \langle k_2^{M/2-1} \rangle_M \quad (29)$$

故可得如下映射:

$$S(n) = \langle nk_1 C_2 \rangle_M, \quad C_2 = \langle k_2^{M/2-1} \rangle_M \quad (30)$$

$$T(l) = \langle lk_2 C_1 \rangle_M, \quad C_1 = \langle k_1^{M/2-1} \rangle_M \quad (31)$$

此时运算量大大减少, PC 机足以胜任. 此算法关键在于由式 (26) 计算出简化参数 C_2 , 然后利用式 (30) 所定义的映射得到杂散的位置.

4 计算机仿真

仿真取 $N = 12$, $K = 333$, $B = 5$, $k^{M/2-1} = 333^{15}$, 故 Nicholas 算法仿真在 MATLAB 中已超出精度范围, 无法计算, 故采用简化算法, 以下给出其 DFT 仿真和简化算法仿真的对比图.

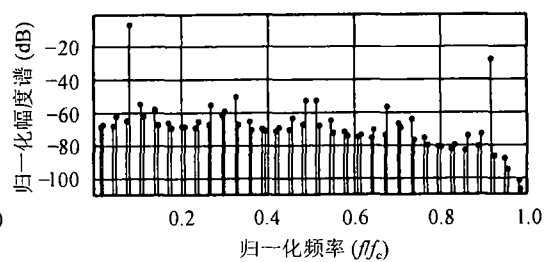
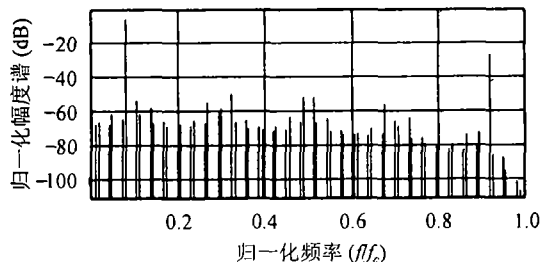


图 1 杂散谱 ($N = 12$, $K = 333$, $B = 5$) 的 DFT 结果 图 2 杂散谱 ($N = 12$, $K = 333$, $B = 5$) 简化算法结果

由图 1, 图 2 可以看出, 简化算法仿真与傅里叶级数分析方法的 DFT 仿真相比较, 其结果中谱线分布完全吻合, 而仿真速度大为提高, 确实能起到简化的作用. 使当 N , K 和 B 很大时 (如 AD9854 中 $N = 48$, $B = 31$) 计算相位截断引起的杂散谱线成为可能.

5 结束语

本文在 Nicholas 采用数论方法得到的相位截断杂散谱的幅度和位置分布结果的基础上, 运用映射和数论工具对杂散谱位置分布进行了分析, 提出了一种简化算法, 计算机仿真结果表明文中所得到的方法正确, 可精确分析相位截断杂散谱的谱线幅度和杂散位置.

参 考 文 献

- [1] Tierney J, Rader C M, Gold B. A digital frequency synthesizer. *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 1971, AU-19(3): 48-57.
- [2] 王利兴等. DDS 在正交调制技术中的应用. *电子技术应用*, 2002, 28(3): 48-49.
- [3] 安建平, 金松. DDS 在相控阵雷达系统中的应用. *现代雷达*, 2000, 22(2): 78-82.
- [4] 朱范德. 直接数字频率合成技术在 ADC 系统中的应用. *现代电子技术*, 2002, 132(1): 81-83.
- [5] Nicholas H T, Samuelli H. An analysis of the output spectrum of direct digital frequency synthesizers in the presence of phase-accumulator truncation. In: 41st Annual Frequency Control Symposium, Monmouth, 1987: 495-502.
- [6] 张玉兴, 彭清泉. 相位舍位对 DDS 谱分布的影响. *电子科技大学学报*, 1997, 28(4): 137-142.
- [7] 赵正敏. 相位截尾对 DDS 输出谱影响的分析与计算. *东南大学学报*, 2000, 30(1): 141-145.

谢仁宏: 男, 1966 年生, 副教授, 在职博士生, 主要从事近程侦察雷达的研究和数字通信教学和科研. 研制定型了两种近程侦察雷达并获部级科技成果二等奖.

是湘全: 男, 1945 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事雷达系统和雷达信号处理的研究和教学工作, 多次获得省部级科技成果奖和多项发明专利.