第 21 卷 第 6 期
1999 年 11 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol.21 No.6
Nov. 1999

带限信号外推问题新的解析解 [1]

王 桥　　吴乐南

(东南大学无线电工程系 南京 210096)

摘 要 本文给出能量有限带限信号外推问题新的解析解，它比长球波函数展开法更为简单．基于新的解析解公式，给出了相应的算法和稳定性判据．

关键词 带限信号，外推，解析解

中图号 TN911.7

1 引 言

带限信号的外推，是谱估计的基本课题之一．一直沿用的方法是 Papoulis-Gerchberg 外推迭代算法，其理论依据是长球波函数展开及其相关的谱论．关于它的详细背景和内容，请参考文献 [1]．我们在研究有限维标架时，发现外推问题有更为简单的解析解公式，由此可以推出新的外推迭代算法．尽管以前曾经有人考虑过在外推问题上采用多项式插值技术 (例如文献 [2])，但他们只是用多项式插值作为函数逼近的手段，因此，其主要兴趣在于研究多项式逼近的各种估计．这样做的结果，首先要花费气力讨论采样率问题和逼近性质；此外，经常要用变分技术 (正则化极小泛函，如文献 [3]) 解决不适定性问题，这样就得要用相当复杂的分析理论如位势理论中的 Green 函数估计技术讨论外推的性质 (参考文献 [4])．本质上不同的是，我们发现带限函数的截断级数经过适当变换后就是多项式．因此，我们可以拿出精确的外推公式，由于避免了积分变换，相应的截断误差极为简单．基于这个外推公式，我们设计了相应的算法和稳定性判据．这就是本文与其他工作的实质性差别．

注意，我们所讨论的空间与惯例一致，是能量有限的标准带限信号空间 (Paley-Wiener 空间)：

$$P_\pi = \{f(t) \in L^2(R); F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-it\xi)\mathrm{d}t = 0, \quad \text{if} \quad |\xi| > \pi\}. \tag{1}$$

2 外推问题

我们假定观测数据是散布在区间 I 内的离散数据．假定在观测点 $\{t_1, t_2, \cdots, t_k\} \subset I$ 上的观测值是 $\{s_1 = f(t_1), s_2 = f(t_2), \cdots, s_k = f(t_k)\}$，目的是由此数据推断信号 $f(t)$ 在区间外的值．当然这一外推问题是不适定的，有解且有多解．但是，只要区间内的数据足够多，解趋于唯一．我们可以直接构造一串信号 $f_k(t)$, 使得 $k \to \infty$ 时 $f_k(t)$ 与 $f(t)$ 任意接近．

引理 1[5] $\{\frac{\sin\pi(x-n)}{\pi(x-n)};\ n \in Z\}$ 是 Paley-Wiener 空间 P_π 的一组规范正交基．

它的进一步研究，可参考文献 [6]．现在假定给定了带限信号 $f(t)$，则根据 Shannon 采样公式，

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}, \tag{2}$$

[1] 1998-03-23 收到， 1999-04-08 定稿
国家自然科学基金 (编号： 69772025) 和中国博士后科学基金资助课题

截断此无穷级数，得到信号序列

$$f_k(t)=\sum_{n=-[k/2]}^{k-[k/2]} f(n)\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}, \tag{3}$$

根据引理 1，得到

引理 2 当 $k\to\infty$ 时， $\|f_k(t)-f(t)\|_{L^2}\to 0$.

我们的技巧是：不直接外推 $f(t)$，而是用 k 组观测数据求得 $f(t)$ 的 k 阶逼近 $f_k(t)$。为此先把 (3) 式的右端变成一个多项式，先对 (3) 式变形，有

$$f_k(t)=\sin\pi t\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{(-1)^n f(n)}{\pi(t-n)},\quad n_1=-[k/2],\quad n_2=k-[k/2]-1,$$

这表明 $\frac{f_k(t)}{\sin\pi t}\prod_{n=n_1}^{n_2}(t-n)$ 是 t 的 $n_2-n_1=k-1$ 次多项式。从而插值问题 $s_p=f_k(t_p),p=1,2,\cdots,k$ 的 Lagrange 公式为

$$\frac{f_k(t)}{\sin\pi t}\prod_{n=n_1}^{n_2}(t-n)=\sum_{p=1}^{k}\frac{f_k(t_p)}{\sin\pi t_p}\prod_{n=n_1}^{n_2}(t_p-n)\prod_{\alpha=1,\neq p}^{k}\frac{t-t_\alpha}{t_p-t_\alpha}, \tag{4}$$

这样就证明了下述定理.

定理 1 假定信号 $f(t)$ 在 $\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}\subset I$ 上的观测值是 $\{s_1=f(t_1),s_2=f(t_2),\cdots,s_k=f(t_k)\}$，则可以利用公式:

$$f_k(t)=\sum_{p=1}^{k}s_p\frac{\sin\pi t}{\sin\pi t_p}\prod_{n=-[k/2]}^{k-[k/2]-1}\frac{t_p-n}{t-n}\prod_{\alpha=1,\neq p}^{k}\frac{t-t_\alpha}{t_p-t_\alpha}. \tag{5}$$

进行外推，当 $k\to+\infty$ 时， $f_k(t)$ 强收敛于 $f(t)$。

(5) 式是外推问题的解析解。它比长球函数展开法更为简单明了。把它和采样公式 (3) 式结合起来，得到更便于计算的形式:

$$f_k(t)=\sum_{m=n_1}^{n_2}\left(\sum_{p=1}^{k}s_p\frac{\sin\pi m}{\sin\pi t_p}\prod_{n=-[k/2]}^{k-[k/2]-1}\frac{t_p-n}{m-n}\prod_{\alpha=1,\neq p}^{k}\frac{m-t_\alpha}{t_p-t_\alpha}\right)\frac{\sin\pi(t-m)}{\pi(t-m)}. \tag{6}$$

3 算法与实验验证

利用 (6) 式外推，焦点集中在求和号内的系数计算上。在规模不大时，可以直接用 (6) 式进行外推，而一般情形，由于大量的连乘积会形成误差扩散，可以间接计算这些系数。

引理 3 $K\times N$(这里 $K\geq N$) 矩阵 $M=\left(\frac{\sin\pi(t_j-n)}{\pi(t_j-n)}\right)$ 秩为 N。(其中 $j=1,2,\cdots,K$ 而 $n=n_1,n_1+1,\cdots,n_2$)。

证明 把矩阵元写成 $\frac{\sin\pi(t_j-n)}{\pi(t_j-n)}=(-1)^n\sin\pi t_j\cdot\frac{1}{\pi(t_j-n)}$ 即可验证上述命题.

把 M 的转置矩阵记为 M^T，则由引理 3 知道 M^TM 是 R^N 空间上的正定算子. 用 $\lambda_{\max}$ 记它的最大特征值，定义正算子

$$P_c=\frac{c}{\lambda_{\max}}M^TM,\quad c\in(0,2), \tag{7}$$

则因算子范数满足 $||I-P_c|| \le r < 1$, 用下述迭代算法求解 (6) 式的系数：

预备：用标准的 Jacobi 算法计算正定自伴算子 M^TM 的最大特征值 $\lambda_{\max}$，取 $c=1$，按照 (7) 式计算出矩阵 P_c；计算 N 维初始向量 $\vec{a}^{(0)} = \frac{c}{\lambda_{\max}} M^T(s_1, s_2, \cdots, s_K)^T$；规定 $\vec{s}^{(0)} = \vec{a}^{(0)}$.

迭代： $m=0$ 开始，逐个计算下述 N 维向量

$$\vec{a}^{(m+1)} = \vec{a}^{(m)} - P_c\vec{a}^{(m)}, \quad \vec{s}^{(m+1)} = \vec{s}^{(m)} + \vec{a}^{(m+1)}. \tag{8}$$

停机条件： $||\vec{a}^{(m+1)}|| <$error，这里 error 是预先指定的误差界。

按照这个算法， $\vec{s}^{(m)} \to$(6) 式的系数．证明如下：

把 (6) 式右边括号内系数记为 $\vec{x}$，左边 t 依次取为 $t=t_j$ $(j=1,2,\cdots,K)$，则得到 $(s_1,s_2,\cdots,s_K)^T = M\vec{x}$，因此 $M^T(s_1,s_2,\cdots,s_K)^T = M^TM\vec{x}$，再同乘以 $2/\lambda_{\max}$，得到 $\vec{a}^{(0)} = P_c\vec{x}$．但是 $P_c^{-1} = (I-(I-P_c))^{-1} = I + (I-P_c) + (I-P_c)^2 + \cdots$，故 $\vec{x} = P_c^{-1}\vec{a}^{(0)} = \vec{a}^{(0)} + (\vec{a}^{(0)} - P_c\vec{a}^{(0)}) + \cdots = \lim_{m\to+\infty} \vec{s}^{(m)}$.

上述算法理论精度较高，可是实际计算结果仍有一定误差。产生误差的关键原因是区间内已知采样点的位置配置．对实际应用而言，需要一种判据来判断计算结果的可接受程度．最方便的判据则是正定矩阵 M^TM 最大和最小特征值的比值 (这类似于离散带限信号外推情形的判据，参考文献 [7])．根据我们的数值实验，该比值 (记为 R) 不超过 2000 时，计算结果可以接受．

图 1 中我们给出一组实验来验证上述算法．原始输入信号图 1(a) 是带限的，截止频率为 π．数据是给在区间 $I=[-1.8,1.8]$ 内的随机采样值，用它外推信号在区间 I 周围的连续分布值．计算结果分别如图 1(b), 1(c), 1(d) 所示，大小特征根比值 R 依次为 5.2665， 806.7083， 13,000,000．最后一例的 R 数值过大，结果不可接受．

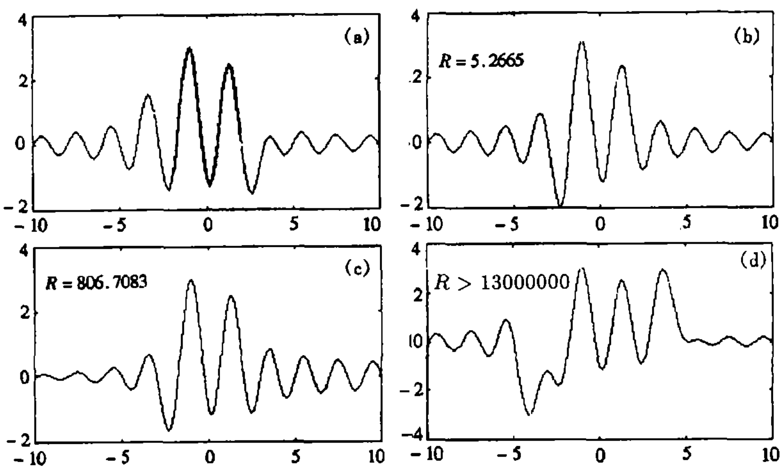

图 1　利用区间 $I=[-1.8,1.8]$ 内部分采样值的外推

此处的算法在许多情况下可以进一步加速并提高精度，请参考文献 [8] 提出的新的插值算法．作为信号处理的一个基本课题，外推算法的用途十分广泛．例如在很多数据处理领域经常发生的采样数据局部丢失或者失真，如能立即增大采样率即可弥补损失．此时，只要把问题变形一下便可使用本文的算法．

4 结 论

本文阐述了连续时间带限信号外推问题一种新的解析解和相应的算法，给出计算结果稳健性的判据。与以往不同的是，我们不直接外推信号本身，而是利用 Paley-Wiener 空间的特征，外推它的截断级数，在理论上这个外推是完全精确的，而且不必用到积分变换。另一方面，截断级数与原带限信号只有趋于零的范数误差。这就得出新的外推公式，并给出了相应的算法。鉴于这个问题长期沿用的是 Papoulis-Gerchberg 外推迭代算法，需要用到长球波函数展开及相应的积分变换等工具，相比较而言，本文的方法直截了当，算法也较有特色。

致谢 作者衷心感谢审稿专家和编辑提出的宝贵建议。

参 考 文 献

[1] 李衍达，常迥．信号重构理论及其应用．北京：清华大学出版社， 1991, 29–44.

[2] Klamer D M, Masry E. Polynomial interpolation of randomly spaced bandlimited functions and process, SIAM J. Appl. Math., 1982, 42(5): 1004–1019.

[3] Chen W. A new extrapolation algorithm for band-limited signals using the regularization method, IEEE Trans. on SP, 1993, 41(3): 1048–1060.

[4] Landau H J. Extrapolating a band-limited function from its samples taken in a finite interval, IEEE Trans. on Inform. Theory, 1986, 32(4): 464–470.

[5] Young M. Nonharmonic Fourier Analysis. New York: Academic Press, 1980, 105–108.

[6] Wang Q.(王桥) Regular and irregular sampling theorems of Shannon's type in wavelet subspaces, Math. Appl., 1998, 11(3): 90–94.

[7] Strohmer Th. On discrete band-limited signal extrapolation, Contemp. Math., 1995, 190: 323–337.

[8] Dutt A, Gu M, Rokhlin V. Fast algorithms for polynomial interpolation integration and differentiation, SIAM J. Numer. Anal., 1996, 33(5): 1689–1711.

NEW ANALYTICAL SOLUTION TO EXTRAPOLATION PROBLEM FOR BAND-LIMITED SIGNALS

Wang Qiao   Wu Lenan

(*Department of Radio Engineering, Southeast University, Nanjing* 210096)

Abstract This paper proposes a novel method to obtain a simple analytical solution to extrapolation problem for band-limited signals, which is much easier than prolate spherical wave function expansion method. The corresponding algorithm for extrapolation is built with a criterion of rubustness.

Key words Band-limited signals, Extrapolation, Analytic solution

王 桥： 男， 1966 年生，博士后，副教授，主要研究偏微分算子微局部分析、相空间调和分析及其在信号分析和量子信息论中的应用．

吴乐南： 男， 1952 年生，教授、博士生导师，从事信号处理理论和多媒体应用技术等研究．