第8卷 第6期 电子科学学刊 Vol. 8, No. 6
1986年11月 JOURNAL OF ELECTRONICS Nov., 1986

广义门限蔡斯算法*

王 新 梅
(西北电讯工程学院)

提 要

本文提出了三种广义的门限蔡斯算法：GTC I、GTC II 和 STC. 这些算法是广义最小距离译码（GMD）算法与蔡斯算法的结合，它们的译码错误概率与蔡斯算法的非常接近，但译码速度要快，特别当信噪比高时更是如此，因而有较大的实用价值. 文中最后给出了计算机模拟结果，证实了这些算法的优越性.

一、引 言

软判决译码，由于比较充分地利用了解调器输出波形的信息，因而在加性白高斯噪声（AWGN）信道中，大约可得 2dB 的软判决增益[1]；而在衰落信道，如高频、散射等信道中，其软判决增益更大，可达 5—7dB[2].

软判决译码的提出可追朔到 1957 年的删除信道译码. 但对软判决译码进行详细分析研究，并把它系统化、实用化，则是 1963 年由梅西（Massey）提出的最大后验概率(APP)译码算法[3]和 1966 年由福尼（Forney）提出的最小广义距离（GMD）译码算法[4]. 而真正使软判决译码开始走向实用的一种算法是 1972 年由蔡斯（Chase）提出的蔡斯算法[5]. 蔡斯算法基本上是一种 GMD 算法，不同的是它的试探图样数目是固定的. 根据试探图样数目的多少，蔡斯算法分为三种：蔡斯 1 算法，其图样数目最多；蔡斯 2 算法，其图样数目次之；蔡斯 3 算法，其图样数目最少. 而译码错误概率则以蔡斯 1 最小，蔡斯 2 次之，蔡斯 3 最高. 但是计算机模拟表明，蔡斯 2 的译码性能与蔡斯 1 的差不多，但其译码复杂性却比蔡斯 1 小得多，因此目前用得最多的是蔡斯 2 算法. 自蔡斯算法提出以来，已有不少文章讨论对该算法的改进，主要是如何减少试探图样数目，减少复杂性，以加快译码速度. 在这方面主要的改进有哈克特（Hackett）于 1981 年提出的算法[6]，这种算法可把蔡斯 2 算法的试探图样数目减少一半，但可惜仅局限于偶重量码.

本文将提出一种加快蔡斯译码速度的算法，它是 GMD 算法与蔡斯算法的结合. 它建立了一个译码判决准则，以减少试探次数，加快译码速度.

二、算 法 描 述

一般情况下数据传输中利用二进制信号传输信息，调制器把编码器送出的二进制信

* 1984年12月11日收到，1986年5月24日修改定稿.

号变换成适合于信道传输的波形信号．设利用二相调制，则用

$$S_0(t)=\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\sin\left(2\pi f_0t+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$S_1(t)=\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\sin\left(2\pi f_0t-\frac{\pi}{2}\right),$$

分别传送0和1两个码元；式中 E_s 为信号能量，$T=\frac{1}{f_0}$．信号通过均值为零、方差为 $\sigma^2=\frac{N_0}{2}$ 的 AWGN 信道．设利用相干解调，则解调器输出的电压是一均值为 $\pm\sqrt{E_s}$、方差为 $\sigma^2=\frac{N_0}{2}$ 的高斯随机变量，因而与发送码元 C_i 相应的输出电压 $\tilde{r}_i$ 的概率密度函数为

$$P(\tilde{r}_i|1)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{-(\tilde{r}_i+\sqrt{E_s})^2/N_0},$$

$$P(\tilde{r}_i|0)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{-(\tilde{r}_i-\sqrt{E_s})^2/N_0}.$$

在软判决译码中，把解调器输出的模拟量 $\tilde{r}_i$ 按 $Q=2^m$ 进行分层或量化，则与 $\tilde{r}_i$ 相应的量化值 $j(0,1,\cdots,2^m-1)$ 大致反映了 $\tilde{r}_i$ 的对数自然函数之比[8]．另一种情况是把 $\tilde{r}_i$ 进行硬判决处理后，同时输出该硬判决码元的可信信息 α_i．对于 GMD 译码，α_i 如下取值：

$$\alpha_i=\begin{cases}+1, & L_i\geqslant T;\\ \frac{L_i}{T}, & -T<L_i<T;\\ -1, & L_i\leqslant -T;\end{cases}\tag{1}$$

式中

$$L_i=\log(P(\tilde{r}_i|0)/P(\tilde{r}_i|1)),$$

是码元的对数自然函数比．T 是门限，若取 $T=1$，则 $-1\leqslant\alpha_i\leqslant1$．显然 $|\alpha|$ 越大，则说明接收码元是0或1的可能性越大．

在硬判决解调中，解调器的输出 $\tilde{r}_i$ 只取 ±1．因此在二进制硬判决译码中，如果二进制 (n,k) 线性分组码的距离为 d，则至多只有一个码字 $\tilde{C}_l$ 满足[4]

$$Y\cdot\tilde{C}_l>n-d,\tag{2}$$

式中 $\tilde{C}_l=(\tilde{C}_{l1},\tilde{C}_{l2},\cdots,\tilde{C}_{ln})$，$\tilde{C}_{li}=(-1)^{C_{li}}$，$C_{li}$ 是传输码字 C_l 的第 i 个二进制码元，称 $\tilde{C}_l$ 为 C_l 的传输映射，Y 是解调器输出序列 $\tilde{R}=(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\cdots,\tilde{r}_n)$ 的硬判决序列．

如果为纠删译码，则同样可以证明只有一个码字 C_l 满足(2)式．若利用 GMD 译码，应用纠删译码器，也可以证明[4]只存在一个码字 C_l 满足

$$\alpha\cdot\tilde{C}_l>n-d,\tag{3}$$

式中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，是接收序列的可信序列．

最近于(Y_u)和科斯特洛(Costello)证明了[7]

$$\alpha\cdot\tilde{C}_l>|\alpha_M|(n-d),\tag{4}$$

式中 α_M 是 α 中小于、等于一且具有最大值的一个分量，且不为零. 显然该条件比(3)式要松；若取 $|\alpha_M| = 1$，则 (4) 式就归结为 (3) 式，上两式中的相乘是两个矢量之间的点积.

下面我们证明应用解调器输出的实数序列 $\tilde{R} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \cdots, \tilde{r}_n)$，也可得到类似的结果.

定理 1　任一个 (n, k, d) 二进制线性分组码，至多只存在一个码字 C_l 满足

$$\tilde{R}_1 \cdot \tilde{C}_l > n - d, \tag{5}$$

式中 $\tilde{R}_1 = (\tilde{r}_{11}, \tilde{r}_{12}, \cdots, \tilde{r}_{1n})$，是解调器输出的实数序列，且 $-1 \leqslant \tilde{r}_{1i} \leqslant 1$；$\tilde{C}_l = (\tilde{C}_{l1}, \tilde{C}_{l2}, \cdots, \tilde{C}_{ln})$，是 C_l 码字的传输映射序列.

证明　设 $\tilde{C}_l$ 是满足不等式 (5) 的码字，若还有另一个码字 $\tilde{C}_j = (\tilde{C}_{j1}, \tilde{C}_{j2}, \cdots, \tilde{C}_{jn})$ 也满足 (5) 式，则 $\tilde{C}_l$ 和 $\tilde{C}_j$ 之间至少有 d 个不同分量. 令

$$S = \{i : \tilde{C}_{li} \neq \tilde{C}_{ji}\}, \quad \bar{S} = \{i : \tilde{C}_{li} = C_{ji}\};$$

由点积(内积)定义可知

$$\tilde{R}_1 \cdot \tilde{C}_l = \sum_{i \in \bar{S}} \tilde{R}_{1i} \cdot \tilde{C}_{li} + \sum_{i \in S} \tilde{r}_{1i} \cdot \tilde{C}_{li} = A_1 + A_2,$$

$$\tilde{R}_1 \cdot \tilde{C}_j = \sum_{i \in \bar{S}} \tilde{r}_{1i} \cdot \tilde{C}_{ji} + \sum_{i \in S} \tilde{r}_{1i} \cdot \tilde{C}_{ji} = A_1 - A_2.$$

由于 $|r_{1i}| \leqslant 1$，因此 $A_1 = \sum_{i \in \bar{S}} \tilde{r}_{1i} \cdot \tilde{C}_{li} \leqslant n - d$，且由假设知 $\tilde{R}_1 \cdot \tilde{C}_l > n - d$，所以 $A_2 > 0$，故

$$\tilde{R}_1 \cdot \tilde{C}_j \leqslant n - d.$$

所以 $\tilde{C}_j$ 不能满足 (5) 式.　　证毕

由此可知，我们不必计算 α 序列，而直接利用接收机解调器的实数序列 $\tilde{R}_1$，就可以进行最大相关译码，从而可节省计算 α 的时间.

但是无论 (3)、(4) 式还是 (5) 式，都假定 α 或 $\tilde{R}_1$ 序列中的最大分量的值限制在 ± 1. 这种限制不但增加了译码器的复杂性，降低了译码速度，而且必然使解调器输出的有用信息受到损失，而影响译码器的性能. 如果我们不对 $\tilde{r}_{1i}$ 的最大值加以限制，而是相反放宽限制时，则不仅能提高译码性能，而且能增大译码速度.

定理 2　任一个 (n, k, d) 二进制线性分组码，至多只存在一个码字 $\tilde{C}_l$ 满足

$$\tilde{R}_2 \cdot \tilde{C}_l > a(r_b)(n - d), \tag{6}$$

式中 $a(r_b)$ 是任一实数，它是信噪比 (r_b) 的函数；$\tilde{R}_2$ 是解调器输出的实数序列.

该定理的证明完全类似于定理 1，但当求

$$A_1 = \sum_{i \in \bar{S}} \tilde{r}_{2i} \cdot \tilde{C}_{li} \tag{7}$$

时，它应为 $\leqslant a(r_b)(n - d)$. 这是由于 $|\tilde{r}_{2i}\tilde{C}_{li}|$ 的取值可大于或小于一，而等于 $a(r_b)$. 显然 $|\tilde{r}_{2i}\tilde{C}_{li}|$ 也是信噪比 (r_b) 的函数，r_b 大，则其值大. 如果我们近似认为在一个码字内信噪比基本不变，则对同一码字的每个码元而言，$|\tilde{r}_{2i}|$ 的值大致相同.

由定理 1 和 2 可得如下的两个软判决译码算法，分别称为 GTCI，GTCII. 译码步骤大致如下：

(1) 由解调器输出的接收序列 $\tilde{R}$，得到硬判决序列 Y 和 $|S|$ 个最不可信的码元位置

集 $\{S\}$;

(2) 把 Y 送入硬判决译码器译码,得到译码器的估值序列 $\hat{C}_l^0$,计算 $\tilde{R}\cdot\hat{C}_l^0$, 若 $\tilde{R}\cdot\tilde{C}_l^0>n-d$, 则译码器输出 $\hat{C}_l^0$, 译码结束. 否则进入下一步;

(3) 由 $\{S\}$ 产生试探错误图样 E_1, 把 $Y+E_1$ 送入硬判决译码器,重复步骤 (2), 得到 $\hat{C}_l^1$;

(4) 重复$|S|$次后,若仍没有找到满足 (5) 式的码字,则进行

$$\max\{\tilde{R}\cdot\hat{C}_l^i;\ i=0,1,\cdots,|S|-1\},$$

挑出大 $\tilde{R}\cdot\hat{C}_l^i$ 的 $\hat{C}_l^i$ 作为译码器输出的估值码字.

若试探错误图样的数目$|S|$和类型与蔡斯算法的 (1)、(2)、(3) 算法相同,为

$$|S_1|=\binom{n}{\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor},\quad |S_2|=2^{\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor}\quad |S_3|=\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor+1,$$

则分别得到 GTC I 算法的 (1)、(2)、(3) 算法. 式中 $\lfloor x\rfloor$ 表示取 x 的整数部分, $\binom{a}{b}$ 表示二项式系数.

GTC II 算法与 GTC I 算法的译码程序大致相同,只不过用 (6) 式代替 (5) 式作为译码是否结束的判决准则,且不对 $\tilde{r}_i$ 的值进行限幅.

若对 $\tilde{R}$ 进行 $Q=2^m$ 进制量化,则由 $\tilde{r}_i$ 所得到的量化值,大致反映了此时接收码元所具有的对数似然函数比之值[8]. 因此我们也可以用软判决距离的大小作为译码器的判决准则.

定理 3 对任一个 (n,k,d) 二进制线性分组码,若利用最小距离译码,则至多只有一个码字 C_l 满足

$$d_s(\tilde{R}_3,\tilde{C}_l)\leqslant\frac{1}{2}[(2^m-1)d-1], \tag{8}$$

式中 $d_s(\tilde{R}_3,\tilde{C}_l)$ 表示 $\tilde{R}_3$ 与 $\tilde{C}_l$ 序列之间的软判决距离. 它定义为:

$$d_s(\tilde{R}_3,\tilde{C}_l)=\sum_{i=1}^{n}|R_{3i}-C_{li}|,$$

这里 R_{3i} 与 C_{li} 分别是 $\tilde{R}_3$ 和 $\tilde{C}_l$ 序列的第 i 位码元的量化值.

证明 若 (n,k,d) 码的最小汉明 (Hamming) 距离为 d, 显而易见它的最小软判决距离 $d_s\geqslant(2^m-1)d$. 设 $\tilde{C}_l$ 是满足 (8) 式的码字, 若还有另一个码字 $\tilde{C}_s$ 也满足 (8) 式,则

$$d_s(\tilde{R}_3,\tilde{C}_l)+d_s(\tilde{R}_3,\tilde{C}_s)\leqslant(2^m-1)d-1.$$

由距离三角不等式知

$$d_s(\tilde{C}_l,\tilde{C}_s)\leqslant d_s(\tilde{R}_3,\tilde{C}_l)+d_s(\tilde{R}_3,\tilde{C}_s)\leqslant(2^m-1)d-1.$$

这与 (n,k,d) 码有最小距离为 d, 从而有最小软判决距离为 $(2^m-1)d$ 的假设相矛盾. 故不可能有另一码字 $\hat{C}_s$ 满足 (8) 式. 证毕

由定理 3,我们对 GTC 算法作了修正, 就可得到另一种称为 STC 算法, 这只要用 (8) 式代替 (5) 式作为译码判决准则即可. 用计算两个序列之间的软判决距离代替计算

两个序列之间的内积，并在第(4)步中挑一个有最小软判决距离 $d_s(\tilde{R}_3, \tilde{\hat{C}}_l^i)$ 的 $\hat{C}_l^i$，作为译码器输出的估值码字.

若 STC 中，试探错误图样的数目与蔡斯算法的(1)、(2)、(3)算法同，则相应地可得到 STC 算法的(1)、(2)、(3)算法.

从上面讨论中可知，蔡斯算法只是试探错误图样数目固定为 $|S|$ 的 STC 算法的一种特殊情况. 而 GTC 算法是把 GMD 算法与蔡斯算法结合起来的一种算法. GTC 和 STC 算法都利用相关译码准则或最小距离译码准则，因而与蔡斯算法一样是一种近似的最佳译码. 但 STC 算法中由于有量化损失，其性能要稍次于 GTC 算法. 而在 GTC 中，GTC II 算法由于不对 $\tilde{r}_i$ 进行限制，因而其性能要稍好于 GTC I 算法，但二者差别很小.

由于这三种译码算法的平均试探次数比蔡斯算法要小，因此它们的译码速度比蔡斯算法要快，特别当信噪比 (r_b) 较大时，速度更快，因而有较高的实用价值. 特别用微机实现时，如何加快译码速度更是一个实际问题. 下面分析这三种算法所需的平均试探次数或所需的译码时间.

设 GTC 和 STC 一次译码成功的概率为 P_1，第二次译码成功的概率为 P_2，第 i 次译码成功的概率为 P_i. 设每一次译码试探所需时间为 t，则 GTC 或 STC 译码器译一个码字所需的平均时间

$$T_n = \sum_{i=1}^{|S|} itP_i + T_0, \tag{9}$$

式中 T_0 是从 $\tilde{R}$ 序列中计算硬判决序列和决定 $|S|$ 个最少可信码元所需的时间，这是蔡斯算法、GTC 和 STC 算法所必需的时间，一般情况下均相同. 对于蔡斯算法，译一个码字所需的时间为 $|S|t + T_0$，显然 $T_n \leqslant |S|t + T_0$. 计算 T 的关键是计算 P_i. 由于一般表示式较复杂，故下面计算一个具体例子予以说明.

设二进制(15, 7, 5) BCH 码，应用纠两个错误的硬判决译码器，利用 GTC 或 STC 算法时，其试探图样集合的数目 $|S| = 2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} = 2^2 = 4$ 个，故 $\{S\}$ 中有四个元素. 所以

$$P_1 = \sum_{i=0}^{2} \binom{15}{i} p_e^i (1-p_e)^{15-i},$$

$$P_2 = (1-P_1)\binom{15}{3}\binom{3}{1} p_e^3 (1-p_e)^{12} p_{s1},$$

$$P_3 = (1-P_2)\binom{15}{3}\binom{3}{1} p_e^3 (1-p_e)^{12} p_{s2},$$

$$P_4 = 1 - (P_1 + P_2 + P_3).$$

上述式子中 p_e 是信道误码率，p_{s1} 和 p_{s2} 分别是最不可信和次不可信码元是错误的概率. 由此可得译一个码字的平均时间

$$T_{15} = (4 - 3P_1 - 2P_2 - P_3)t + T_0;$$

而用蔡斯算法(2)所需的时间为 $4t + T_0$. 对任意的 (n, k, d) 码，用 GTC 和 STC 算法，译一个码字的平均时间

$$T_n = \left(|S| - \sum_{i=0}^{|S|-1} (|S| - i)P_i\right)t + T_0; \tag{10}$$

而蔡斯算法所需时间 $T_c = |S|t + T_0 \geqslant T_n$.

三、模拟结果

由于受计算机速度和计算机时间的限制，我们仅用(15,7,5)二进制 BCH 码，对反相信号通过 AWGN 信道的情况进行模拟，并且仅模拟蔡斯算法 (2)、(3) 和相应的 GTC I 算法 (2)、(3) 和 GTC II 算法 (2)、(3). 模拟结果示于图 1、2 中. 图 1 给出了这些算法

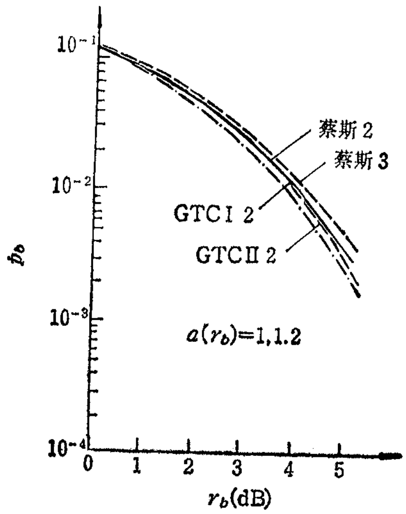

图 1 p_b 与 r_b 之关系

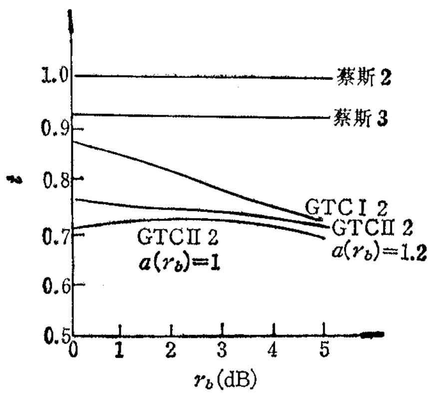

图 2 相对时间关系

的译码输出误码率 p_b 与信噪比 r_b 之间的关系. 由图 1 可见，GTC I、GTC II 的算法与蔡斯算法的译码性能非常接近；当信噪比大时，甚至比相应的蔡斯算法还要好，误码率更低. 而译码所需的时间，从图 2 可见，比蔡斯算法要少；特别当信噪比较高时，要比蔡斯算法约节省三分之一的时间. 若利用硬件或微机实现，则节省的时间可能还要多，故这里提出的 GTC I、GTC II 和 STC 算法，特别是 GTC II 算法有一定实用价值.

朱峰同志编制了部份程序，进行了部份计算机模拟，在此表示谢意.

参 考 文 献

[1] A. J. Viterbi and J. K. Omura, Principle of Digital Communication Coding, McGraw-Hill Book Co., 1979, p. 101.
[2] R. M. F. Goodman and A. F. T. Winfield, *IEE Proc. pt. F*, **128**(1981), 179.
[3] J. L. Massey, Threshold Decoding Codes, MIT Press, Cambridge, MA, 1963.
[4] G. D. Forney, Jr., Concatenated Codes, MIT Press, Cambridge, MA, 1966.
[5] D. Chase, *IEEE Trans. on IT*, **IT-18**(1972), 170.
[6] C. M. Hachett, *IEEE Trans. on COM*, **COM-29**(1981), 909.

[7] C. C. Yu and D. J. Costello, Jr., *IEEE Trans. on IT*, **IT-26**(1980), 238.
[8] G. C. Clark, Jr. and J. B. Cain, Error-Correction Coding for Digital Communications, Harris Corporation, Melbourne, Florida, 1982, p. 28.

THE GENERALIZED THRESHOLD CHASE ALGORITHMS

Wang Xinmei

(Northwest Telecommunication Engineering Institute)

Three generalized threshold Chase algorithms called GTC I, GTC II and STC are proposed in this paper. The computing speeds of these algorithms are faster than that of the ordinary Chase algorithm, and the probabilities of the decoding error of these algorithms are the same as that of the ordinary Chase algolithm. Finally, the performances of these algorithms and the ordinary Chase algorithm for (15, 7, 5) binary BCH codes are compared by using computer simulations.

* * * *

中国第七届电路与系统学术年会征文通知

中国第七届电路与系统学术年会将于 1987 年 10 月在深圳市召开．会议由中国电子学会电路与系统学会（CIE—CAS)、中国科学院电子学研究所（IEAS）主办，电子与无线电工程师学会香港分会（IERE H. K. Division）协办、现开始征文，范围如下：

· 大规模集成电路设计和应用	· 系统模型和仿真
· 分布网络	· 集成电路布线设计
· 非线性电路和系统	· 滤波器理论
· 图论及其应用	· 数字信号处理
· 功率电子学和电路	· 开关电容网络
· 计算机辅助设计	· 数字滤波器
· 电路和系统的数学方法	· 微波网络
· 故障分析	· 有源滤波器
· 大规模网络	· 通讯电路
· 固体电路	· 计算机网络

内地和海外作者请于1987年 3 月 15 日前将应征文章全文寄北京 2702 信箱中国第七届电路与系统学术年会论文委员会收，港澳地区作者请寄 IERE Hong Kong Division, G. P. O. Box 10007, Hong Kong。作者请自留稿件副本，送审稿件恕不退回．

录用与否将于 1987 年 5 月15日前函告作者．

中国第七届电路与系统
学术年会筹备委员会

一九八六年六月