第14卷 第1期　　电子科学学刊　　Vol. 14, No. 1
1992年1月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　Jan., 1992

矩阵直积的推广及其在构造正交变换中的应用*

阎春钢　　蒋昌俊
(山东矿业学院，山东泰安 271019)

摘要　王中德(1989)推广了矩阵直积，给出了矩阵第二类直积和第三类直积运算，并将此运算应用于正交变换的构造。本文进一步推广了王中德(1989)的结果，提出了一种矩阵分块直积运算，并以此来构造正交变换。

关键词　数字信号处理；矩阵直积；正交变换

1. 引言

在数字信号处理中，正交变换有着极其广泛的应用。因此，寻求新的正交变换以及由已知正交变换如何构造新的正交变换的方法一直为人们所努力。到目前为止已取得了一些进展，文献[1]中给出了一些正交变换方法；文献[2—5]中给出了一些由已知正交变换构造新的正交变换的方法，它们大都基于直积或做一些推广。本文对直积运算做进一步的推广，给出了一种分块直积运算的一般形式，它概括了现有的一些方法。这种方法可用于数字信号处理中许多非正弦正交变换及其它正交变换。

2. 矩阵分块直积运算及其应用

定义　设 A, B 分别为 m、n 阶方阵，且 A, B 分块表示为

$$A=\begin{bmatrix} A_{11}A_{12}\cdots A_{1r}\\ A_{21}A_{22}\cdots A_{2r}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ A_{r1}A_{r2}\cdots A_{rr}\end{bmatrix}_{m\times m},\quad B=\begin{bmatrix} B_{11}B_{12}\cdots B_{1l}\\ B_{21}B_{22}\cdots B_{2l}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ B_{l1}B_{l2}\cdots B_{ll}\end{bmatrix}_{n\times n}$$

式中 A_{ij} 是 A 的 $m_i\times m_j$ 阶子阵，i、$j=1,2,\cdots,r$。$B_{s,t}$ 是 B 的 $n_s\times n_t$ 阶子阵，s, $t=1,2,\cdots,l$。令

$$C=\begin{bmatrix} A_{11}\otimes B_{11}\cdots A_{11}\otimes B_{1l}\cdots\cdots A_{1r}\otimes B_{11}\cdots A_{1r}\otimes B_{1l}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\ A_{11}\otimes B_{l1}\cdots A_{11}\otimes B_{ll}\cdots\cdots A_{1r}\otimes B_{l1}\cdots A_{1r}\otimes B_{ll}\\ \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots\\ A_{r1}\otimes B_{11}\cdots A_{r1}\otimes B_{1l}\cdots\cdots A_{rr}\otimes B_{11}\cdots A_{rr}\otimes B_{1l}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\ A_{r1}\otimes B_{l1}\cdots A_{r1}\otimes B_{ll}\cdots\cdots A_{rr}\otimes B_{l1}\cdots A_{rr}\otimes B_{ll}\end{bmatrix}$$

1990.06.25 收到，1990.10.04 定稿。
* 国家自然科学基金资助课题

则称 $m\times n$ 阶方阵 C 为矩阵 A，B 的分块直积矩阵，其中$\otimes$表示矩阵直积运算。

引理　设 A 为 m 阶正交方阵，A 可表示为

$$A=[A_{ij}]_{m\times m}$$

式中 A_{ij} 为 A 的 $m_i\times m_j(i,j=1,2,\cdots,r)$ 阶子矩阵，则

$$\sum_{j=1}^{r}A_{ij}A_{kj}^{T}=\begin{cases}mI_{m_i}, & 当\ i=k\\ 0_{m_i\times m_j}, & 当\ i\neq k\end{cases}$$

证明

$$\sum_{j=1}^{r}A_{ij}A_{kj}^{T}=$$

$$\sum_{j=1}^{r}\begin{bmatrix}a_{\sum_{p=1}^{i-1}m_p+1,\sum_{q=1}^{j-1}m_q+1} & \cdots & a_{\sum_{p=1}^{i-1}m_p+1,\sum_{q=1}^{j}m_q}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{\sum_{p=1}^{i}m_p,\sum_{q=1}^{j-1}m_q+1} & \cdots & a_{\sum_{p=1}^{i}m_p,\sum_{j=1}^{j}m_q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{\sum_{p=1}^{k-1}m_p+1,\sum_{q=1}^{j-1}m_q+1} & \cdots & a_{\sum_{p=1}^{k}m_p,\sum_{q=1}^{j-1}m_q+1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{\sum_{p=1}^{k-1}m_p+1,\sum_{q=1}^{j}m_q} & \cdots & a_{\sum_{p=1}^{k}m_p,\sum_{q=1}^{j}m_q}\end{bmatrix}=$$

$$\sum_{j=1}^{r}\begin{bmatrix}\sum_{h=1}^{m_j}\left(a_{\sum_{p=1}^{i-1}m_p+1,\sum_{q=1}^{j-1}m_q+h}\cdot a_{\sum_{p=1}^{k-1}m_p+1,\sum_{q=1}^{j-1}m_q+h}\right) & \cdots & \sum_{h=1}^{m_j}\left(a_{\sum_{p=1}^{i-1}m_p+1,\sum_{q=1}^{j-1}m_q+h}\cdot a_{\sum_{p=1}^{k}m_p,\sum_{q=1}^{j-1}m_q+h}\right)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{h=1}^{m_j}\left(a_{\sum_{p=1}^{i}m_p,\sum_{q=1}^{j-1}m_q+h}\cdot a_{\sum_{p=1}^{k-1}m_p+1,\sum_{q=1}^{j-1}m_q+h}\right) & \cdots & \sum_{h=1}^{m_j}\left(a_{\sum_{p=1}^{i}m_p,\sum_{q=1}^{j-1}m_q+h}\cdot a_{\sum_{p=1}^{k}m_p,\sum_{q=1}^{j-1}m_q+h}\right)\end{bmatrix}$$

记 $\sum_{p=1}^{i-1}m_p=u_{i-1}$，$\sum_{q=1}^{j-1}m_q=v_{j-1}$，则

$$上式=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{r}\sum_{h=1}^{m_j}(a_{u_{i-1}+1,v_{j-1}+h}\cdot a_{u_{k-1}+1,v_{j-1}+h}) & \cdots & \sum_{j=1}^{r}\sum_{h=1}^{m_j}(a_{u_{i-1}+1,v_{j-1}+h}\cdot a_{u_k,v_{j-1}+h})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{j=1}^{r}\sum_{h=1}^{m_j}(a_{u_i,v_{j-1}+h}\cdot a_{u_{k-1}+1,v_{j-1}+h}) & \cdots\cdots & \sum_{j=1}^{r}\sum_{h=1}^{m_j}(a_{u_i,v_{j-1}+1}\cdot a_{u_k,v_{j-1}+h})\end{bmatrix}$$

现规定 $\sum_{q=1}^{0}m_q=0$，且知道 $\sum_{q=1}^{r}m_q=m$，则

$$
\text{上式}=\begin{bmatrix}
\sum_{j=1}^{m}(a_{u_{i-1}+1,j}\cdot a_{u_{k-1}+1,j}) & \cdots & \sum_{j=1}^{m}(a_{u_{i-1}+1,j}\cdot a_{u_{k-1}+m_k,j}) \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\sum_{j=1}^{m}(a_{u_{i-1}+m_i,j}\cdot a_{u_{k-1}+1,j}) & \cdots & \sum_{j=1}^{m}(a_{u_{i-1}+m_i,j}\cdot a_{u_{k-1}+m_k,j})
\end{bmatrix}
$$

由于A是正交方阵，所以当 $i=k$ 时，

$$
\sum_{j=1}^{m}(a_{u_{i-1}+p,j}\cdot a_{u_{k-1}+q,j})=\begin{cases} m, & \text{当 } p=q, \\ 0, & \text{当 } p\neq q, \end{cases} \quad 1\leqslant p,\ q\leqslant m_i
$$

即

$$
\text{上式}=\begin{bmatrix} m & & & \\ & m & & \\ & & \ddots & \\ & & & m \end{bmatrix}_{m_i\times m_i}=mI_{m_i}
$$

而当 $i\neq k$ 时，由于 $1\leqslant p,\ q\leqslant m_i$，所以 $u_{i-1}+p\neq u_{k-1}+q$，对任何 p, q 恒成立，所以恒有

$$
\sum_{j=1}^{m}(a_{u_{i-1}+p,j}\cdot a_{u_{k-1}+q,j})=0
$$

即

$$
\text{上式}=0_{m_i\times m_k}
$$

综上所述引理得证。

定理 1 设 A, B 分别是 m, n 阶正交方阵，且按定义中的分块表示，则 A, B 的分块直积矩阵 C 是一个 $m\times n$ 阶正交方阵。

证明 下面证明过程中用到矩阵直积的如下两个性质：

(1) $(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$

(2) $(A\otimes B)\cdot(C\otimes D)=AC\otimes BD$

这里$\otimes$为矩阵直积运算。

由于

$$
C\cdot C^T=\left[\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} A_{11}\otimes B_{11}\cdots A_{11}\otimes B_{1l} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_{11}\otimes B_{l1}\cdots A_{11}\otimes B_{ll} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} A_{1r}\otimes B_{11}\cdots A_{1r}\otimes B_{1l} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_{1r}\otimes B_{l1}\cdots A_{1r}\otimes B_{ll} \end{matrix} \\
\hline
\vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
\begin{matrix} A_{r1}\otimes B_{11}\cdots A_{r1}\otimes B_{1l} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_{r1}\otimes B_{l1}\cdots A_{r1}\otimes B_{ll} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} A_{rr}\otimes B_{11}\cdots A_{rr}\otimes B_{1l} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_{rr}\otimes B_{l1}\cdots A_{rr}\otimes B_{ll} \end{matrix}
\end{array}\right]
$$

$$
\times\left[\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} A_{11}^T\otimes B_{11}^T\cdots A_{11}^T\otimes B_{l1}^T \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_{11}^T\otimes B_{1l}^T\cdots A_{11}^T\otimes B_{ll}^T \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} A_{r1}^T\otimes B_{11}^T\cdots A_{r1}^T\otimes B_{l1}^T \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_{r1}^T\otimes B_{1l}^T\cdots A_{r1}^T\otimes B_{ll}^T \end{matrix} \\
\hline
\vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
\begin{matrix} A_{1r}^T\otimes B_{11}^T\cdots A_{1r}^T\otimes B_{l1}^T \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_{1r}^T\otimes B_{1l}^T\cdots A_{1r}^T\otimes B_{ll}^T \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} A_{rr}^T\otimes B_{11}^T\cdots A_{rr}^T\otimes B_{l1}^T \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_{rr}^T\otimes B_{1l}^T\cdots A_{rr}^T\otimes B_{ll}^T \end{matrix}
\end{array}\right]
$$

$$
=\left[\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} \left(\sum_{i=1}^{r} A_{1i}A_{1i}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{1j}B_{1j}^T\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{r} A_{1i}A_{1i}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{1j}B_{lj}^T\right) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \left(\sum_{i=1}^{r} A_{1i}A_{1i}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{lj}B_{1j}^T\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{r} A_{1i}A_{1i}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{lj}B_{lj}^T\right) \end{matrix} & \cdots\cdots & \begin{matrix} \left(\sum_{i=1}^{r} A_{1i}A_{ri}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{1j}B_{1j}^T\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{r} A_{1i}A_{ri}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{1j}B_{lj}^T\right) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \left(\sum_{i=1}^{r} A_{1i}A_{ri}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{l1}B_{1j}^T\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{r} A_{1i}A_{ri}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{lj}B_{lj}^T\right) \end{matrix} \\
\hline
\vdots & \ddots & \\
\hline
\begin{matrix} \left(\sum_{i=1}^{r} A_{ri}A_{1i}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{1j}B_{1j}^T\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{r} A_{ri}A_{1i}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{1j}B_{lj}^T\right) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \left(\sum_{i=1}^{r} A_{ri}A_{1i}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{lj}B_{1j}^T\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{r} A_{ri}A_{1i}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{lj}B_{lj}^T\right) \end{matrix} & \cdots\cdots & \begin{matrix} \left(\sum_{i=1}^{r} A_{ri}A_{ri}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{1j}B_{1j}^T\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{r} A_{ri}A_{ri}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{1j}B_{lj}^T\right) \\ \vdots \\ \left(\sum_{i=1}^{r} A_{ri}A_{ri}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{lj}B_{1j}^T\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{r} A_{ri}A_{ri}^T\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{l} B_{lj}B_{lr}^T\right) \end{matrix}
\end{array}\right]
$$

由于 A, B 分别是 m, n 阶正交方阵,根据引理

$$
\text{上式}=\left[\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} (mI_{m_1})\otimes(nI_{n_1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (mI_{m_1})\otimes(nI_{n_l}) \end{matrix} & \cdots & 0 \\
\hline
\vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
0 & \cdots & \begin{matrix} (mI_{m_r})\otimes(nI_{n_1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (mI_{m_r})\otimes(nI_{n_l}) \end{matrix}
\end{array}\right]
$$

$$=\left[\begin{array}{c:c:c} \begin{matrix} mnI_{m_1n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & mnI_{m_1n_l} \end{matrix} & \cdots & 0 \\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline 0 & \cdots & \begin{matrix} mnI_{m_rn_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & mnI_{m_rn_l} \end{matrix} \end{array}\right] = mnI_{\left(\sum_{i=1}^{r} m_i\right)\left(\sum_{j=1}^{l} n_j\right)} = mnI_{mn}$$

故 C 也是一个 $m\times n$ 阶正交方阵，定理得证。

对定理 1 做进一步地推广，可得如下定理。

定理 2 设 A 是 m 阶正交方阵，$B^{(k)}(k=1\sim p)$ 是 n 阶正交方阵族，且 A，$B^{(k)}(k=1\sim p)$ 可表示为

$$A=\begin{bmatrix} A_{11}A_{12}\cdots A_{1p} \\ A_{21}A_{22}\cdots A_{2p} \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{p1}A_{p2}\cdots A_{pp} \end{bmatrix}_{m\times m},\quad B^{(k)}=\begin{bmatrix} B_{11}^{(k)}B_{12}^{(k)}\cdots B_{1l}^{(k)} \\ B_{21}^{(k)}B_{22}^{(k)}\cdots B_{2l}^{(k)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ B_{l1}^{(k)}B_{l2}^{(k)}\cdots B_{ll}^{(k)} \end{bmatrix}_{n\times n}\quad (k=1\sim p)$$

令

$$C=\left[\begin{array}{c:c:c} \begin{matrix} A_{11}\otimes B_{11}^{(1)}\cdots A_{11}\otimes B_{1l}^{(1)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_{11}\otimes B_{l1}^{(1)}\cdots A_{11}\otimes B_{ll}^{(k)} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} A_{1p}\otimes B_{11}^{(1)}\cdots A_{1p}\otimes B_{1l}^{(1)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_{1p}\otimes B_{l1}^{(1)}\cdots A_{1p}\otimes B_{ll}^{(1)} \end{matrix} \\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \begin{matrix} A_{p1}\otimes B_{11}^{(p)}\cdots A_{p1}\otimes B_{1l}^{(p)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_{p1}\otimes B_{l1}^{(p)}\cdots A_{p1}\otimes B_{ll}^{(p)} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} A_{pp}\otimes B_{11}^{(p)}\cdots A_{pp}\otimes B_{1l}^{(p)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_{pp}\otimes B_{l1}^{(p)}\cdots A_{pp}\otimes B_{ll}^{(p)} \end{matrix} \end{array}\right]$$

$$C_1=\left[\begin{array}{c:c:c} \begin{matrix} B_{11}^{(1)}\otimes A_{11}\cdots B_{1l}^{(1)}\otimes A_{11} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ B_{l1}^{(1)}\otimes A_{11}\cdots B_{ll}^{(1)}\otimes A_{11} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} B_{11}^{(1)}\otimes A_{1p}\cdots B_{1l}^{(1)}\otimes A_{1p} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ B_{l1}^{(1)}\otimes A_{1p}\cdots B_{ll}^{(1)}\otimes A_{1p} \end{matrix} \\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \begin{matrix} B_{11}^{(p)}\otimes A_{p1}\cdots B_{1l}^{(p)}\otimes A_{p1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ B_{l1}^{(p)}\otimes A_{p1}\cdots B_{ll}^{(p)}\otimes A_{p1} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} B_{11}^{(p)}\otimes A_{pp}\cdots B_{1l}^{(p)}\otimes A_{pp} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ B_{l1}^{(p)}\otimes A_{pp}\cdots B_{ll}^{(p)}\otimes A_{pp} \end{matrix} \end{array}\right]$$

则 C 和 C_1 均是 $m\times n$ 阶正交方阵。

证明 证法同定理 1 的证法。

3. 讨论

(1) 本文定理 1 的特例：矩阵 A 不分块，矩阵 B 只按行分块，这种分块直积矩阵正是文献[2]中的第二类直积矩阵。

(2) 本文定理 2 的特例：矩阵 A 只按行分块，矩阵族 $B^{(k)}$ 不分块，所得到的直积矩阵 C 和 C_1 正是文献[3]中的 C 和 C_1。

(3) 定理 1 和定理 2 实际上给出了由已知正交矩阵或正交矩阵族构造新的正交矩阵

的方法。这些方法在实际问题中的具体应用可以从文献[3—5]中略见一斑，这里不再举例。

参　考　文　献

[1] 吴哲辉，蒋昌俊，计算数学，13(1991)1，84—88.
[2] Wang Zhongde, *J. of Mathematical Research and Exposition*, 9(1989)3, 413—422.
[3] 王中德，电子学报，1988 年，第 3 期，第 102—104 页.
[4] 蒋昌俊，微电子学与计算机，1990 年，第 8 期，第 4—7 页.
[5] 寇卫东，胡征，电子学报，1986 年，第 3 期，第 95—101 页.

GENERALIZATION OF MATRIX DIRECT PRODUCT AND ITS APPLICATION TO THE CONSTRUCTION OF ORTHOGONAL TRANSFORMS

Yan Chungang　Jiang Changjun
(Shandong Mining Institute, Taian, Shandong 271019)

Abstract　The matrix direct product is generalized and two kinds of direct products are given by Wang Zhongde (1989). These two kinds of direct products are applied to the construction of orthogonal transforms. In this paper, Wang Zhongde's work is generalized further, and a kind of direct product of matrix block is given. It is also used to construct the orthogonal transforms.

Key words　Digital signal processing; Matrix direct product; Orthogonal transform