

## 基于非零散度关系的交替方向隐式减缩 FDTD 算法

周永刚<sup>①</sup> 徐金平<sup>②</sup> 顾长青<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(南京航空航天大学信息科学与技术学院 南京 210016)

<sup>②</sup>(东南大学毫米波国家重点实验室 南京 210096)

**摘要** 该文证明了即使在无源区域, 交替方向隐式时域有限差分法(ADI-FDTD)所给出的电磁场量不满足零散度关系, 同时推导出了该散度关系的具体表达式。基于该非零散度关系, 将不受 Courant 稳定条件限制的 ADI-FDTD 法和能节约最多达 1/3 内存的减缩时域有限差分(R-FDTD)法结合, 提出了一种新的交替方向隐式减缩 FDTD 算法。该算法保留了 ADI-FDTD 能增大时间步长, 缩短计算时间的优点, 同时与 ADI-FDTD 相比节约了最多达 1/3(三维)或 2/5(二维)的内存。与基于零散度关系的 ADI/R-FDTD 相比, 该算法避免了采用长时间步长计算时的发散现象。应用所提出的 ADI/R-FDTD 算法计算了二维自由空间波的传播及一维频率选择表面垂直入射的问题, 计算结果与 ADI-FDTD 计算结果完全一致, 验证了 ADI/R-FDTD 的正确性和有效性。

**关键词** FDTD, 减缩时域有限差分法(R-FDTD), 交替方向隐式(ADI)技术

中图分类号: O441

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)02-0376-04

## An Algorithm of ADI-FDTD and R-FDTD Based on Non-zero Divergence Relationship

Zhou Yong-gang<sup>①</sup> Xu Jin-ping<sup>②</sup> Gu Chang-qing<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(College of Information Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

<sup>②</sup>(State Key Laboratory of Millimeter Waves, Southeast University, Nanjing 210096, China)

**Abstract** In this paper, it is proven that the divergence relationship of electric-field and magnetic-field is non-zero even in charge-free regions, when the electric-field and magnetic-field are calculated with Alternating Direction Implicit Finite-Difference Time-Domain (ADI-FDTD) method, and the concrete expression of the divergence relationship is derived. Based on the non-zero divergence relationship, the ADI-FDTD which is unconditionally stable is combined with the Reduced Finite-Difference Time-Domain(R-FDTD). In the proposed method (ADI/R-FDTD), the merit of ADI-FDTD, e.g. increasing time step size and decreasing calculation time, is kept, at the same time, the memory requirement is reduced by 1/3(3-D) or 2/5(2-D) of the memory requirement of ADI-FDTD. Compare to the ADI/R-FDTD based on regular zero divergence relationship, the proposed algorithm is more stable when larger time step size is used. Wave propagation in 2-D free space and the scattered field of a 1-D Frequency Selective Surface(FSS) is simulated by the proposed hybrid method. Compared with ADI-FDTD, perfect agreement of numerical results indicates that ADI/R-FDTD method is correct and efficient.

**Key words** FDTD, Reduced Finite-Difference Time-Domain (R-FDTD), Alternating Direction Implicit(ADI) technique

### 1 引言

时域有限差分法(FDTD)是一种简单有效的全波分析时域算法, 被广泛地应用于求解各种电磁问题。传统的 FDTD 为了控制数值色散, 要求空间网格的选取应足够小, 通常应小于 1/10 波长; 同时时间步长的选取受到 Courant 稳定条件的限制, 需要相当长时间的仿真计算才能得到精确的结果,

因此传统的 FDTD 存在计算量和存储量大的问题。近年提出的交替方向隐式时域有限差分法<sup>[1-2]</sup>(ADI-FDTD)是非条件稳定的, 时间步长的选取不受 Courant 稳定条件的限制, 可以选得很大, 减少仿真时间。然而, 在 ADI-FDTD 计算过程中, 每一时间步需存储两个分时间步的电场值, 因此与传统 FDTD 相比, 内存增加 50%(三维)或 2/3(二维)。而减缩时域有限差分<sup>[3-4]</sup>(R-FDTD)法利用无源区电、磁场分量的空间散度关系能够减少最多达 1/3 的内存需求。在文献[5]中, 将 ADI-FDTD 与 R-FDTD 结合, 在保留 ADI-FDTD 非条件稳定

优点的同时,与ADI-FDTD相比节约了最多达1/3(三维)的内存,然而文献[5]中利用了电场或磁场在无源区的零散度关系,这将导致采用大时间步长计算时计算的发散。本文证明了利用交替方向隐式时域有限差分法(ADI-FDTD)计算时,无源区域的电、磁场分量的散度关系与利用传统FDTD计算时无源区域的电、磁场分量的散度关系的不同——散度非零,并推导出该散度关系的具体表达形式。基于该散度关系,给出了采用交替方向隐式技术的减缩时域有限差分格式,改善了采用大时间步长计算时计算的稳定性。利用本文提出的基于非零散度关系的ADI/R-FDTD混合方法,计算了二维自由空间波的传播及一个由无限长金属条带构成的频率选择表面的散射场,计算结果与ADI-FDTD计算结果完全一致,验证了ADI/R-FDTD的正确性。

## 2 ADI-FDTD 计算时的电、磁场分量的空间散度关系

基于经典电磁场理论,在无空间电荷的区域电、磁场散度为零,即

$$\nabla \cdot E = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (2)$$

当电、磁场的各分量用传统的FDTD格式计算时,式(1),式(2)的空间离散形式自然成立,这可以将电、磁场各分量的Yee's计算式带入式(1),式(2)证明。然而,当采用ADI-FDTD计算时,式(1),式(2)的空间离散形式不再成立。为了简化分析,下面以2维TE波为例推导电、磁场分量的空间散度关系,此时ADI-FDTD的基本公式见文献[1]中式(1)~式(6)。

在 $n+1$ 时间步:

$$\nabla \cdot E^{n+1} = \partial_x E_x^{n+1} + \partial_y E_y^{n+1} \quad (3)$$

式中 $\partial_x$ 表示 $\frac{\partial}{\partial x}$ , $\partial_y$ 表示 $\frac{\partial}{\partial y}$ 。

将文献[1]中式(4),式(5)代入式(3)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E^{n+1} = & \partial_x \left( E_x^{n+1/2} + \frac{dt}{2\epsilon} \cdot \partial_y H_z^{n+1} \right) \\ & + \partial_y \left( E_y^{n+1/2} - \frac{dt}{2\epsilon} \cdot \partial_x H_z^{n+1/2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

将文献[1]中式(6)代入式(4)

$$\nabla \cdot E^{n+1} = \nabla \cdot E^{n+1/2} + \frac{dt^2}{4\epsilon\mu} \cdot \partial_x \partial_y (\partial_y E_x^{n+1} - \partial_x E_y^{n+1/2}) \quad (5)$$

再将文献[1]中式(1),式(2),式(3)分别代入式(5)(具体过程不再详述):

$$\nabla \cdot E^{n+1} = \nabla \cdot E^n - \frac{dt^2}{4\epsilon\mu} \cdot \partial_x \partial_y^2 E_x^n + \frac{dt^2}{4\epsilon\mu} \cdot \partial_x \partial_y^2 E_x^{n+1} \quad (6)$$

这是一个关于时间步的递推式,假设在 $n < 0$ 的时间步,各场分量为零,得

$$\nabla \cdot E^{n+1} = \frac{dt^2}{4\epsilon\mu} \cdot \partial_x \partial_y^2 E_x^{n+1} \quad (7)$$

在空间网格 $(i, j)$ 处, $n+1$ 时间步的 $E_y$ 分量可以由式(8)计算

$$\begin{aligned} E_y^{n+1}(i, j) = & E_y^{n+1}(i, j-1) - \frac{dy}{dx} \cdot [E_x^{n+1}(i, j) - E_x^{n+1}(i-1, j)] \\ & + \frac{dt^2}{4\epsilon\mu dx dy} \cdot [E_x^{n+1}(i, j+1) - 2E_x^{n+1}(i, j) + E_x^{n+1}(i, j-1) \\ & - E_x^{n+1}(i-1, j+1) + 2E_x^{n+1}(i-1, j) - E_x^{n+1}(i-1, j-1)] \end{aligned} \quad (8)$$

同理,在 $n+1/2$ 时间步的电场空间散度关系为

$$\nabla \cdot E^{n+1/2} = \frac{dt^2}{4\epsilon\mu} \cdot \partial_x^2 \partial_y E_y^{n+1/2} \quad (9)$$

在空间网格 $(i, j)$ 处, $n+1/2$ 时间步的 $E_x$ 分量可以由式(10)计算

$$\begin{aligned} E_x^{n+1/2}(i, j) = & E_x^{n+1/2}(i-1, j) - \frac{dx}{dy} \cdot [E_y^{n+1/2}(i, j) - E_y^{n+1/2}(i, j-1)] \\ & + \frac{dt^2}{4\epsilon\mu dx dy} \cdot [E_y^{n+1/2}(i+1, j) - 2E_y^{n+1/2}(i, j) + E_y^{n+1/2}(i-1, j) \\ & - E_y^{n+1/2}(i+1, j-1) + 2E_y^{n+1/2}(i, j-1) - E_y^{n+1/2}(i-1, j-1)] \end{aligned} \quad (10)$$

由式(7),式(9)可以看到,当各电、磁场分量采用ADI-FDTD计算时,场量散度的空间离散形式不再为零,而且式(7),式(9)右边的部分和时间步长 $dt$ 的平方成正比。

对于TM波,其磁场散度关系与TE波电场的散度关系类似。

## 3 ADI-FDTD 与 R-FDTD 结合

同样以TE波为例:假设计算域为 $N_x \times N_y$ 的无空间电荷的矩形区域。采用传统FDTD计算,需要3个二维数组在整个计算域存储 $E_x$ , $E_y$ , $H_z$ 分量;采用ADI-FDTD计算,需要5个二维数组分别存储 $n+1/2$ 时间步的 $E_x$ , $E_y$ 分量, $n+1$ 时间步的 $E_x$ , $E_y$ 分量,以及 $H_z$ 分量。将ADI-FDTD与R-FDTD结合,在 $n+1/2$ 时间步,在整个计算域存储 $E_y$ 分量,不在整个计算域存储 $E_x$ 分量,而仅用一维数组 $E_{xh1}(j)$ 和 $E_{xc}(j)$ 存储 $i=1$ 和 $i=\text{con}$ (con为常数)的网格上的 $E_x$ 分量;在 $n+1$ 时间步,在整个计算域存储 $E_x$ 分量,不在整个计算域存储 $E_y$ 分量,仅用一维数组 $E_{y1}(i)$ 和 $E_{yc}(i)$ 存储 $j=1$ 和 $j=\text{con}$ (con为常数)的网格上的 $E_y$ 分量。这样,ADI/R-FDTD混合方法所需的内存最少仅为ADI-FDTD所需内存的3/5,与传统FDTD所需内存几乎相同,具体算法的伪代码如下:

(1)  $n+1/2$ 时间步:

Do  $j = 1, N_y$

$$E_{x1}^{n+1/2}(j) = E_x^n(1, j) + \frac{dt}{2\epsilon dy} \cdot [H_z^n(1, j) - H_z^n(1, j-1)]$$

End do

$$E_{yc}^n = E_{y1}^n$$

$$\begin{aligned}
& \text{Do } j = 1, N_y \\
& E_y^{n+1/2}(i-1, j) - \left[ \left( \frac{2\sqrt{\epsilon\mu}dx}{dt} \right)^2 + 2 \right] E_y^{n+1/2}(i, j) + E_y^{n+1/2}(i+1, j) \\
& = - \left( \frac{2\sqrt{\epsilon\mu}dx}{dt} \right)^2 E_{yc}^n(i) + \left( \frac{2\mu dx}{dt} \right) \left[ H_z^n(i, j) - H_z^n(i-1, j) \right] + \frac{dx}{dy} \\
& \cdot \left[ E_x^n(i, j+1) - E_x^n(i, j) + E_x^n(i-1, j) - E_x^n(i-1, j+1) \right]
\end{aligned}$$

利用式(8)更新  $E_{yc}^n$

End Do

Do  $j = 1, N_y$

Do  $i = 1, N_x$

利用文献[1]中(3)式, 计算  $H_z^{n+1/2}$

End Do

End Do

(2)  $n+1$  时间步:

Do  $i = 1, N_x$

$$\begin{aligned}
& E_{y1}^{n+1}(i) = E_y^{n+1/2}(i, 1) - dt/2\epsilon dx \\
& \cdot [H_z^n(i, 1) - H_z^n(i-1, 1)]
\end{aligned}$$

End do

$$E_{xc}^{n+1/2} = E_{x1}^{n+1/2}$$

Do  $i = 1, N_x$

$$\begin{aligned}
& E_y^{n+1}(i, j-1) - \left[ \left( \frac{2\sqrt{\epsilon\mu}dy}{dt} \right)^2 + 2 \right] E_y^{n+1}(i, j) + E_y^{n+1}(i, j+1) \\
& = - \left( \frac{2\sqrt{\epsilon\mu}dy}{dt} \right)^2 E_{xc}^{n+1/2}(j) + \left( \frac{2\mu dy}{dt} \right) \left[ H_z^{n+1/2}(i, j-1) \right. \\
& \left. - H_z^{n+1/2}(i, j) \right] + \frac{dy}{dx} \left[ E_y^{n+1/2}(i+1, j) - E_y^{n+1/2}(i, j) \right. \\
& \left. + E_y^{n+1/2}(i+1, j-1) - E_y^{n+1/2}(i, j-1) \right]
\end{aligned}$$

利用式(10)更新  $E_{xc}^{n+1/2}$

End Do

Do  $j = 1, N_y$

Do  $i = 1, N_x$

利用文献[1]中式(6), 计算  $H_z^{n+1}$

End Do

End Do

#### 4 计算结果

本文采用 ADI/R-FDTD 混合方法计算 TE 波在二维自由空间的传播情况, 并将计算结果与传统 FDTD 的计算结果比较。为了说明 ADI/R-FDTD 算法中采用非零散度关系的必要性, 本文还分别应用文献[5]中的电场零散度关系和本文所提出的电场非零散度关系, 即式(7), 式(9)模拟上述二维自由空间中 TE 波的传播, 并考察了不同的散度关系对计算结果的影响。

计算域为  $150 \times 75 \text{cm}$  的二维自由空间, 采用均匀空间网格 ( $dx = dy = 0.5 \text{cm}$ ), 在计算域外设置 4 层 PML 边界<sup>[5]</sup>。在 (30, 30) 网格上加源激励:

$$H_z(30, 30) = H_z(30, 30) + U(t) \cdot \sin(2\pi ft) \quad (11)$$

取频率  $f = 1.5 \text{GHz}$ ,  $U(t)$  是为了减小冲激效应引入的开关函数, 为

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0.5[1 - \cos(\pi t/t_0)], & 0 \leq t \leq t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \quad (12)$$

$t_0$  取正弦激励周期的 1/2。

对于 FDTD, 时间步的选取受 Courant 稳定条件的限制,

$$dt \leq dt_{\max} = \frac{1}{c\sqrt{(1/dx)^2 + (1/dy)^2}}, \text{ 这里取 } dt = 8.3333\text{e-}12\text{s}。 \text{图 1}$$

为观察点网格 (70, 70) 处的  $H_z$  的时域波形, 在采用 ADI-FDTD、ADI/R-FDTD 计算时, 时间步长  $dt_{\text{ADI}} = dt$ 。图 1 中, 图标为 FDTD 的曲线为 FDTD 的计算结果; 图标为 ADI 的曲线为 ADI-FDTD 的计算结果; 图标为 ADIRFDTDA 的曲线为 ADI/R-FDTD 的计算结果, 电场的空间离散的散度关系用式 (7), 式 (9) 描述; 图标为 ADIRFDTDN 的曲线为 ADI/R-FDTD 的计算结果, 电场的空间离散的散度关系为零。从图 1 中可以看出, 4 条曲线误差很小, 其中曲线 ADI 和 ADIRFDTDA 完全重合。而 ADIRFDTDN 曲线的误差也不大, 这是因为  $dt_{\text{ADI}}$  取得很小, 式 (7), 式 (9) 右边的值与  $dt_{\text{ADI}}^2$  成正比, 也相对很小, 近似可以看作零。图 2 为 ADI-FDTD, ADI/R-FDTD 计算时, 时间步长  $dt_{\text{ADI}} = 5dt$  时的计算结果, 其中 ADI/R-FDTD 计算是基于本文推导的非零散度关系的。由图 2 可知, 此时 ADI 曲线与 ADIRFDTDA 曲线仍完全重合, 它们与 FDTD 曲线的误差仍然不大。图 3 为计算时间步长  $dt_{\text{ADI}} = 5dt$  时, 基于零散度关系的 ADI/R-FDTD 的计算结果。从图 3 中可以看出, 计算结果曲线很快发散。这说明, 当  $dt_{\text{ADI}}$  较大时, ADI/R-FDTD 计算过程中必须采用式 (7), 式 (9) 的空间离散散度关系, 而不能像普通 R-FDTD 一样, 采用零散度关系。

本算例中, ADI/R-FDTD 计算所用内存比 ADI-FDTD

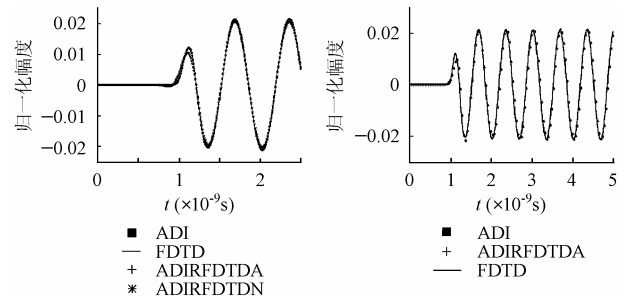


图 1  $dt=dt_{\text{ADI}}$  时, 指定观察点处  $H_z$  分量随时间分布

Fig. 1 The time-domain response of  $H_z$  at the specified observation point when  $dt_{\text{ADI}}=dt$

图 2  $dt_{\text{ADI}}=5dt$  时, 指定观察点处  $H_z$  分量随时间分布

Fig. 2 The time-domain response of  $H_z$  at the specified observation point when  $dt_{\text{ADI}}=5dt$

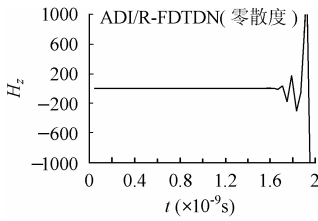


图3  $dt_{ADI}=5dt$ 时, 观察点处 $H_z$ 分量随时间分布(零散度关系)

Fig. 3 The time-domain response of  $H_z$  at specified observed point, when  $dt_{ADI}=5dt$  and zero divergence relationship

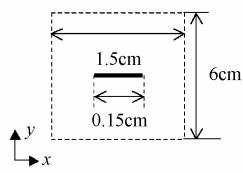


图4 一维频率选择表面结构及计算域

Fig. 4 The geometry and calculation domain of one-dimensional FSS

计算所用内存节约了 34%。

另外的算例为由一维金属栅格组成的频率选择表面(FSS), 结构及计算域如图 4<sup>[6]</sup>。整个计算域划分为  $100 \times 400$  个网格。在上、下边界处采用 8 层PML吸收边界, 在左、右边界处采用周期边界条件。采用中心频率为 20GHz 的调制高斯脉冲激励, 连接边界选取在金属条带表面。

TE 波垂直入射时, 周期边界条件由式(13)、式(14)表示:

$$H_y^{n+1/2}(1/2, j) = H_y^{n+1/2}(100 - 1/2, j) \quad (13)$$

$$H_y^{n+1/2}(100 + 1/2, j) = H_y^{n+1/2}(1 + 1/2, j) \quad (14)$$

即计算中需要的  $x$  方向计算域外半个网格处的磁场, 可以由另一侧计算域内的磁场值得到。

在对  $H_y$  分量进行隐式计算时, 直接由周期边界条件式(13), 式(14)导出的线性方程组的系数矩阵不是三对角矩阵, 不能和通常ADI-FDTD方法一样采用追赶法计算, 考虑到FSS单元结构的对称性, 周期边界条件式(13)、式(14), 在本问题中可以改写为

$$H_y^{n+1/2}(1/2, j) = -H_y^{n+1/2}(1 + 1/2, j) \quad (15)$$

$$H_y^{n+1/2}(100 + 1/2, j) = -H_y^{n+1/2}(100 - 1/2, j) \quad (16)$$

这样得到的系数矩阵仍为三对角矩阵。

以上FSS采用传统FDTD, ADI-FDTD, 以及本文提出的ADI-FDTD/R-FDTD混合算法分别计算观察点处的散射磁场  $H_z$ , 得到时域结果后进行快速傅里叶变换并对入射波归一化, 计算结果如图 5。

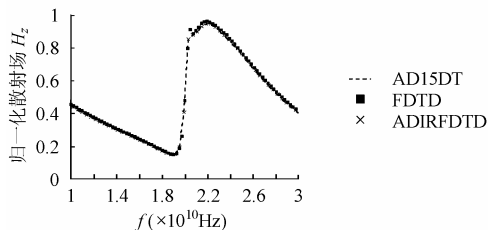


图5 指定观察点处的归一化散射场 $H_z(dt_{ADI}=5dt)$

Fig.5 The normalized scattered field component  $H_z$  at the specified observation point when  $dt_{ADI}=5dt$

从图中可以看出 ADI-FDTD/R-FDTD 混合算法计算的曲线和 ADI-FDTD 计算的曲线完全重合, 而且与采用 FDTD 计算的结果误差不大。

本算例中, ADI/R-FDTD 计算所用内存比 ADI-FDTD 计算所用内存节约了 35%。

## 5 结束语

本文证明了即使在无源区域, 交替方向隐式时域有限差分法(ADI-FDTD)所给出的电磁场量也不满足零散度关系, 同时推导出了该散度关系的具体表达式。基于推导出非零散度关系提出了一种新的交替方向隐式减缩 FDTD 算法, 该 ADI/R-FDTD 算法在保留 ADI-FDTD 非条件稳定, 能增大时间步长, 缩短总的计算时间的优点的同时, 所需内存比 ADI-FDTD 可减少最多达 1/3(三维)或 2/5(二维)。与基于零散度关系的 ADI/R-FDTD 算法相比, 该算法可以改善采用大时间步长计算时的计算稳定性。用该方法计算了 TE 波在二维自由空间的传输及一个由无限长金属条带构成的频率选择表面的散射场, 计算结果与采用 ADI-FDTD 所得结果完全一致, 说明本文导出的电、磁场的离散空间散度关系以及该算法正确、有效。三维问题的 ADI/R-FDTD 的研究正在进行。

## 参考文献

- [1] Namiki T. A new FDTD algorithm based on alternating direction implicit method [J]. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 1999, 47(10): 2003 – 2007
- [2] Zheng F, Chen Z, Zhang J. Toward the development of a three-dimensional unconditionally stable Finite-Difference Time-Domain method [J]. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 2000, 48(9): 1950 – 1958.
- [3] George D K, Franco D F, Gregory J O, et al.. A memory-efficient formulation of the Finite-Difference Time-Domain method for the solution of Maxwell equation [J]. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 2001, 49(7): 1310 – 1320.
- [4] 周永刚, 徐金平. 减缩时域有限差分法在电磁干扰预测中的应用[J]. *东南大学学报*, 2003, 33(4): 392 – 395.
- [5] Liu Bo, Gao Benqing, Tan Wei, Ren Wu. A new FDTD algorithm —ADI/R-FDTD. 2002 3rd International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Beijing, China, 2002: 250 – 253.
- [6] Tsay Wen-Jiunn, Pozar D M. Application of the FDTD technique to periodic problems in scattering and radiation [J]. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 1993, 3(8): 250 – 252.

周永刚: 男, 1972 年生, 讲师, 博士生, 目前研究方向为计算电磁学、电磁兼容等。

徐金平: 男, 1962 年生, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为计算电磁学、天线与电磁散射、毫米波理论与技术、电磁兼容等。

顾长青: 男, 1958 年生, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为计算电磁学、天线与电磁散射、电磁兼容等。