

二维多体散射系统分析

樊德森

(中国科学技术大学无线电系, 合肥 230026)

摘要 本文提出一种多体散射系统的普遍化的分析方法, 原则上能处理任意形式的多体散射系统。利用系统散射方程把多体问题归结为一组单体问题, 然后用有限元法对各个单体问题逐个进行分析。本文着重讨论二维多体系统, 并给出由介质涂敷导体柱构成的三体散射系统的计算实例。

关键词 电磁散射; 多体散射系统; 有限元法

一、引言

由多个散射体构成的多体散射系统特性分析是电磁场理论的基础课题之一, 对近代电磁波工程有重要的实际意义。本文研究一般形式的多体散射系统, 散射体的数目及其空间分布, 各个散射体的形状, 尺寸以及媒质填充情况都是任意的, 并且媒质参数可能是不均匀的, 有损耗甚至是各向异性的。本文采用一种新型的解析——数值混合解法。我们用多个适当设置的数学边界, 分别包围各个散射体, 从无限空间中划分出一个个离散的子空间作为电磁场偏微分方程(PDE)的解域, 同时把各解域子空间以外的多连通无限空间称为外域。我们用本征函数解表示外域中的电磁场, 用有限元法依次求解各解域子空间中的 PDE。因为外域电磁场的解析解(即本征函数展开式)和解域 PDE 的数值解(即开放边界条件的有限元解)中均包含待定系数, 最后我们用系统散射方程把外域和解域的解析解和数值解组合或匹配起来, 以唯一地确定自洽的待定系数。

多体散射问题的精确解, 应当是在整个空间同时满足全部边界条件的 PDE 解, 然而不幸的是, 迄今还没有任何一种理论途径可直接提供这种精确解。在本文的分析方法中, 我们把整个散射系统的全域精确解, 归结为能同时满足下列 3 个条件的局域解析——数值解: (1) 在各解域符合 PDE; (2) 在外域满足 PDE 和辐射条件; (3) 在解域和外域的边界上满足电磁场连续性条件。其中条件(1)由有限元法实现, 因此允许各散射体有任意复杂的边界形式和媒质填充; 条件(2)由于采用解析解而自动满足; 而系统散射方程则保证全域电磁场连续性条件的实现。

由于本文旨在处理一般形式多体散射系统的基本原理, 为避免过多地纠缠于数学演绎和计算技术细节, 本文中我们将限于讨论二维多体系统。至于一般的三维多体散射问题, 虽然我们未见有原则性的理论困难和限制, 但在三维开域问题有限元分析等方面还有一些理论和计算技术有待深入研究。

及其外侧空间,其子散射波 Ψ'_g 可写成本征函数解

$$\Psi'_g(\rho_g, \phi_g) = A_{0g} H_0^{(2)}(k\rho_g) + \sum_{m=1}^{M_g} H_m^{(2)}(k\rho_g) [A_{mg} \cos(m\phi_g) + B_{mg} \sin(m\phi_g)] \quad (1)$$

式中 Ψ'_g 代表散射场 E'_z (TM 波型) 或 H'_z (TE 波型)。上式已经在阶数 M_g 处截断, 其中包括 N_g 个待定的系数 A_{mg} 和 B_{mg} , $N_g = 2M_g + 1$ 。 M_g 的选取由该散射体的物理和几何条件决定。我们用 N_g 阶矢量 $[AB_g]$ 来表示这些系数

$$[AB_g]^t = [A_{0g}, A_{1g}, \dots, A_{M_{gg}}; B_{1g}, \dots, B_{M_{gg}}], \quad g = 1, 2, \dots, G$$

对于线性多体散射系统,我们可以用叠加原理直接写出系统散射方程

$$\begin{bmatrix} I_{11} & -Q_{12} & -Q_{13} & \cdots & -Q_{1G} \\ -Q_{21} & I_{22} & -Q_{23} & \cdots & -Q_{2G} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -Q_{G1} & -Q_{G2} & -Q_{G3} & \cdots & I_{GG} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB_1 \\ AB_2 \\ \vdots \\ AB_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_1^0 \\ AB_2^0 \\ \vdots \\ AB_G^0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 $[I_{gg}]$ 是 N_g 阶的单位方阵, $[Q_{hg}]$ 是 $N_h \times N_g$ 阶矩阵。

先解释系统散射方程的物理意义。我们知道,系统的总散射波是系统中各个散射体的子散射波——其中包括一次散射和二次散射——的线性组合。就第 h 个散射体而言,由 (2) 式规定的子散射波系数矢量为

$$[AB_h] = \sum_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^G [Q_{hg}] [AB_g] + [AB_h^0] \quad (3)$$

(2) 式和 (3) 式中 $[AB_h^0]$ 是一次散射波分量,它相当于该散射体单独存在于无限空间时对系统照射波——平面波——的散射波。 $[Q_{hg}] [AB_g]$ 是二次散射波,它相当于该散射体单独存在于无限空间时对来自第 g 个散射体的子散射波——相位中心在 o_g 的柱面波——的散射波, $g = 1, 2, \dots, h-1, h+1, \dots, G$ 。

基于以上讨论,我们知道 $[Q_{hg}]$ 是一个 $N_h \times N_g$ 阶子矩阵,称为二次散射子矩阵,它表示第 h 个散射体对一族柱面波照射波的散射特性。现在进一步分析矩阵 $[Q_{hg}]$ 中第 i 行 j 列元素 q_{hg}^{ij} 的意义。为了便于说明,令 $h=1, g=2, i=3$ 和 $j=4$ 。这样 q_{12}^{34} 就是第 1 个散射体对来自第 2 个散射体的 (柱面) 子散波的第 4 个分量 (形式为 $H_3^{(2)}(k\rho_2) \cos(3\phi_2)$) 的二次散射波的第 3 个分量 (形式为 $H_2^{(2)}(k\rho_1) \cos(2\phi_1)$) 的散射系数。

因此,只需要逐个解决每一个散射体当它们单独存在时对平面波和柱面波的散射问题,我们就能确定系统散射方程 (2) 中的系数子矩阵 $[Q_{hg}]$ 和系数子矢量 $[AB_h^0]$, 进而解得系统散射波的各个子矢量 $[AB_g] = [A_{0g}, A_{1g}, \dots, A_{M_{gg}}; B_{1g}, \dots, B_{M_{gg}}], g = 1, 2, \dots, G$ 和相应的散系统总射波表达式

$$\Psi^t(\rho, \phi) = \sum_{g=1}^G \left\{ A_{0g} H_0(k\rho_g) + \sum_{m=1}^{M_g} H_m^{(2)}(k\rho_g) [A_{mg} \cos(m\phi_g) + B_{mg} \sin(m\phi_g)] \right\} \quad (4)$$

在上式中已经包含了多体散射系统近区场分布和远区散射截面的全部散射信息。

三、二维多体散射分析

先分析一个特例：二维多导体散射系统。

在导体散射系统的情况下，系统散射方程(2)的系数子矩阵 $[Q_{n,n}]$ 和子矢量 $[AB_n]$ 可由矩量法解得。实际上，不采用系统散射方程，我们也能够用矩量法直接分析多导体散

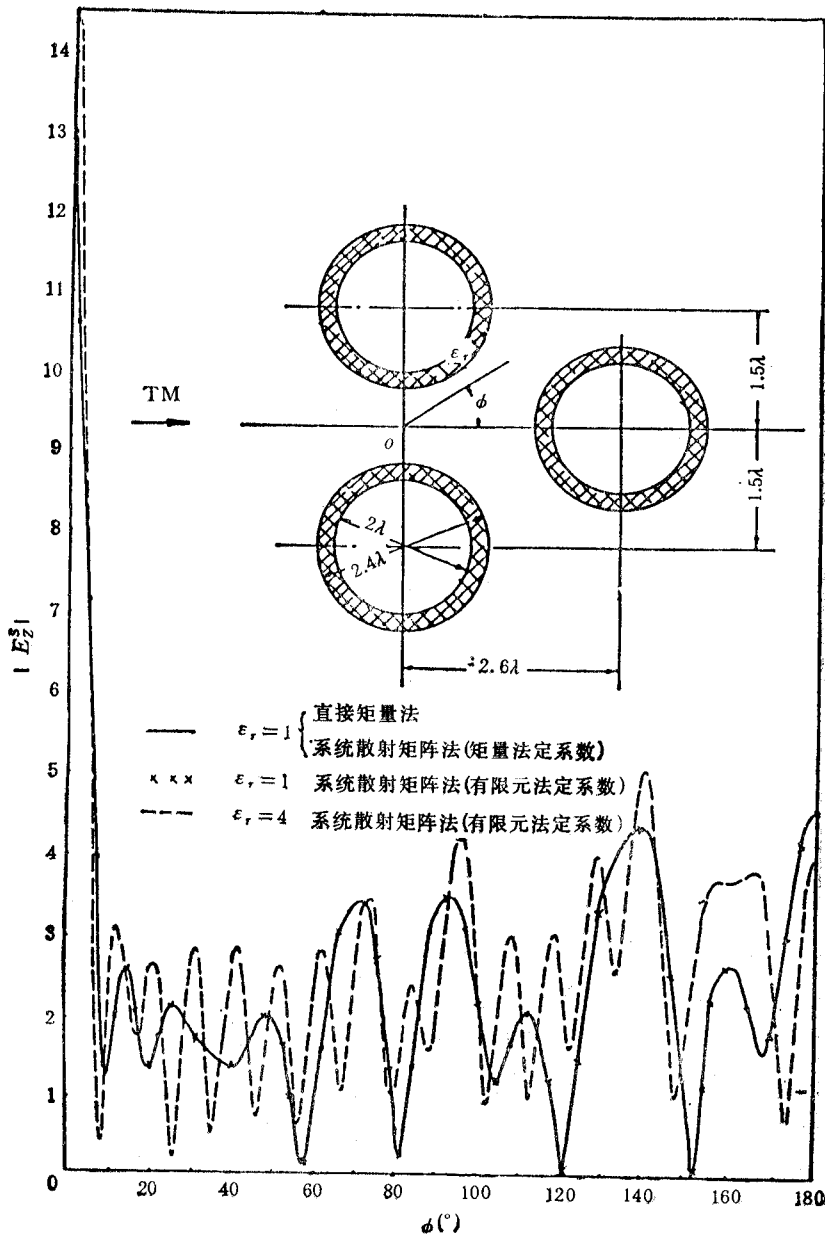


图3 二维三体散射系统分析(TM 波型)

射系统^[2]。然而本文的方法在高计算效率和低内存需求方面具有明显的优点。对于具有 G 个散射体的系统, 当每个散射体的尺寸相近时, 本文方法可使计算效率约提高 G 倍, 内存需求约降低为 $1/G^2$ 。这对于大尺寸多体散射系统的分析无疑是有价值的。

图 3 中的实曲线是三个圆柱导体系统的散射截面的计算曲线, 直接的矩量法解和基于系统散射方程的矩量法解获得完全一致的计算结果。在图中无法区分。

现在分析一般形式多体散射系统, 其中每一个散射体都可能包含多个复杂的导体和任意的媒质填充。如图 2 所示, 我们用数学边界 γ_g 包围散射体以构成电磁场 PDE 解域 ω_g , 而在 γ_g 的外侧则是均匀无界空间。为便于处理, 我们取圆形数学边界 γ_g , 半径为 R_g , 在 γ_g 边界及其外侧空间散射波的本征函数解如 (1) 式所示。在解域 ω_g 中电磁场的弱型方程为

$$\begin{aligned} \iint_{\omega_g} \left[\frac{1}{\mu_r} \nabla E_z^i \cdot \nabla T - k^2 \epsilon_r T E_z^i \right] dx dy &= \int_{\gamma_g} \frac{\partial E_z^i}{\partial n} dl, \quad (\text{TM 波型}) \\ \iint_{\omega_g} \left[\frac{1}{\epsilon_r} \nabla H_z^i \cdot \nabla T - k^2 \mu_r T H_z^i \right] dx dy &= \int_{\gamma_g} \frac{\partial H_z^i}{\partial n} dl, \quad (\text{TE 波型}) \end{aligned} \quad (5)$$

式中上标 i 表示总场, $T(\rho, \phi)$ 是试验函数, 本文取局域线性函数。

用有限元法求解弱型方程 (5) 是本文分析方法的突出优点, 因为有限元网格划分的灵活性使之对任意复杂的导体边界和媒质填充具有最大的适应性。

在 ω_g 域进行有限元分析的主要困难是边界条件的不确定性, 即在问题完全求解以前边界 γ_g 上的场量法向导数 $\partial E_z^i / \partial n$ 和 $\partial H_z^i / \partial n$ 是未知的。这是一个开域电磁场问题。虽然开域问题的有限元解法在近十多年来一直是备受关注的研究热点之一, 但是现有的各种求解方法, 诸如单矩法^[3,4], 吸收边界条件法^[5,6]等, 在现在讨论的多体散射分析中均无法应用; 而只有作者不久前提出的全域数值边界条件法 (GNBC) 是目前唯一可用的分析方法^[7]。现概述如下:

我们沿 γ_g 边界取 L_g 个采样点 $P_l(\rho, \phi)$, $l = 1, 2, \dots, L_g$ 。采样点的位置原则上是任意的, 但通常与有限元网格的边界节点重合, 点数 L_g 大于或等于散射波本征函数解 (1) 式中的待定系数个数 N_g , 即 $L_g \geq N_g$ 。用 L_g 阶矢量 $[\Psi^i]$ 和 $[\partial \Psi^i / \partial n]$ 分别表示 L_g 个采样点上的散射场 E_z^i 和 H_z^i 及其法向导数 $\partial E_z^i / \partial n$ 和 $\partial H_z^i / \partial n$, 由 (1) 式可以证明在 $[\Psi^i]$ 和 $[\partial \Psi^i / \partial n]$ 之间存在关系式

$$[\partial \Psi^i / \partial n] = [H_g][\Psi^i] \quad (6)$$

式中 $[H_g]$ 是 L_g 阶方阵, 并且

$$\left. \begin{aligned} [H_g] &= [H_{2g}]([H_{1g}]^t [H_{1g}])^{-1} [H_{1g}]^t, & (N_g < L_g) \\ [H_g] &= [H_{2g}] [H_{1g}]^{-1}, & (N_g = L_g) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$[H_{1g}]$ 和 $[H_{2g}]$ 是 $L_g \times N_g$ 阶的矩阵, 由 (1) 式定值

$$[H_{1g}] = \begin{bmatrix} H_0 & H_1 C_{11} & \cdots & H_N C_{N1} & \cdots & H_1 S_{11} & \cdots & H_N S_{N1} \\ H_0 & H_1 C_{12} & \cdots & H_N C_{N2} & \cdots & H_1 S_{12} & \cdots & H_N S_{N2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_0 & H_1 C_{1L} & \cdots & H_N C_{NL} & \cdots & H_1 S_{1L} & \cdots & H_N S_{NL} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[H_{2g}] = k \begin{bmatrix} H'_0 & H'_1 C_{11} & \cdots & H'_N C_{N1} & \cdots & H'_1 S_{11} & \cdots & H'_N S_{N1} \\ H'_0 & H'_1 C_{12} & \cdots & H'_N C_{N2} & \cdots & H'_1 S_{12} & \cdots & H'_N S_{N2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H'_0 & H'_1 C_{1L} & \cdots & H'_N C_{NL} & \cdots & H'_1 S_{1L} & \cdots & H'_N S_{NL} \end{bmatrix}$$

式中 H_m 和 H'_m 分别表示汉克尔函数 $H_m^{(2)}(k\rho_g)$ 及其一阶导数在 $\rho_g = R_g$ 时的函数值, $C_{mg} = \cos(m\phi_g)$, $S_{mg} = \sin(m\phi_g)$, $N = N_g$, $L = L_g$.

矩阵关系式(6)称为全域数值边界条件,它把 γ_g 边界上的场量 Ψ' 及其法向导数 $\partial\Psi'/\partial n$ 定量地联系起来,从而为弱型方程(5)的有限元解提供了必要条件.有限元解法的步骤是常规的,进一步细节可参考作者的前两篇论文^[7,8]

在图3中我们给出了三体散射系统的计算曲线.每个散射体均为直径 $D = 2\lambda$ 的导体柱,外敷均匀介质层,介质层外径 $D_d = 2.4\lambda$,介电系数为 ϵ_r .我们编制了基于有限元法和系统散射方程的二维多体散射通用分析程序.为验证理论和程序的正确性,先分析 $\epsilon_r = 1$ 时的特例,如图3实曲线所示,它与相应三导体散射系统的矩量法解良好相符. $\epsilon_r = 4$ 时的计算结果,没有现成的数据可供比较.

诚然,采用本文的基于 GNBC 的有限元解法,我们原则上也可以用一个大数学边界把整个多体系统包围在内,并当作单体问题进行处理.然而,结合系统散射方程,依次对各个散射体逐个进行有限元分析,可以大幅度地提高计算效率和降低内存需求.尤其当各散射体在空间稀疏分布时,本文方法的优势将更为突出.

四、结 论

本文提出一种多体散射系统的普遍化的分析方法.先利用系统散射方程把多体问题转化为单体问题,进而用基于 GNBC 的有限元方法逐个处理各个单体问题.虽然文中着重讨论了二维多体问题,但可望推广应用于一般的三维问题.

参 考 文 献

- [1] Desen Fan (樊德森), *IEE Proc.-H*, 133 (1986) 4, 322-324.
- [2] M. G. Andreson, *IEEE Trans. on AP*, AP-12 (1964) 12, 746-754.
- [3] K. K. Mei, *IEEE Trans. on AP*, AP-22 (1974) 11, 769-766.
- [4] Desen Fan (樊德森), *Scientia Sinica*, B32 (1989) 1, 106-116.
- [5] A. F. Peterson, S. P. Castillo, *IEEE Trans. on AP*, AP-37 (1989) 5, 601-607.
- [6] R. Mittra, O. Ramahi, A. Khebir, R. Gordon, A. Kouki, *IEEE Trans. on MAG*, MAG-25 (1989) 4, 3034-3039.
- [7] Desen Fan (樊德森), Two Dimensional Single-and Multi-Object Scattering Analysis by Global Numerical Boundary Condiiton Based on PDE Techniques, ISRAMT'91, Reno, Nevada, USA, Aug. (1991).

NUMERICAL ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL MULTI-OBJECT SCATTERING SYSTEMS WITH ARBITRARY STRUCTURE

Fan Desen

(University of Science and Technology of China, Hefei 230027)

Abstract A general analysis approach to multi-object scattering systems of arbitrary structure is presented. Through the system scattering equation (SSE), the multi-object problems are first transformed into a series of single-object problems. Then we solve the single-object problems, one-object by one-object, to yield the unknown coefficients of SSE and finally obtain the complete solution of original multi-object problems. As to the solutions of single-object problems, we use the finite element method for complex scatterers, or simply the moment method for conducting scatterers. We will confine ourself in two-dimensional cases, and show some calculation examples of 3-object conducting cylinder scatterers coated with dielectric material for demonstration.

Key words Electromagnetic scattering; Multi-object scattering system; Finite element method