

具有无边界失真的多小波¹

王 玲 宋国乡

(西安电子科技大学应用数学系 西安 710071)

摘 要 多小波是近几年小波理论研究的一个重要方向, 该文综述了多小波的重要性质, 利用正交性和对称性构造了一个支集在 $[0,1]$ 上具有精确重构特性和二阶逼近性的多小波, 其最大特点是无边界失真效应; 经平衡后, 有更好的低通和高通特性, 不用预滤波。实验结果表明重构效果比单小波好。

关键词 多小波, 精确重构, 边界失真, 平衡小波

中图分类号 O177.6

1 引 言

目前, 有关小波理论发展的一个非常重要的方向——多小波理论研究引起了人们广泛的关注, 并在最近两年内取得了较大的进展^[1]。1994 年, Goodman 等人基于 r 阶的多分辨率分析, 建立了多小波的基本理论框架^[2]; 同年, Geronimo, Hardin 和 Massopust 利用分形插值, 成功地构造了正交、短支集、实对称和二阶逼近的多尺度函数 $\Phi(t) = [\varphi_0(t), \varphi_1(t)]^T$, 称为 GHM 多小波^[3]。能同时拥有这么好的性质对单小波来说却是不可能的^[4]; 从 1996 年以后, 更多的对称、正交多小波被构造出来^[1,5], 为多小波的实际应用奠定了基础。

尽管多小波理论研究取得了不少实质性的结果, 但将它们成功地应用于信号和图像处理中仍然受到很大制约, 其根本原因是: (1) 大多数构造的多尺度函数不满足低通特性 (即 $H(0) \neq I_r$); (2) 如何将一维信号转换为多小波需要的向量输入流。通常的解决办法是对初始采样序列进行适当的预滤波处理^[6], 实验表明经预滤波后的多小波用于去噪取得了满意的结果^[7]。遗憾的是, 现有的预滤波器破坏了对称性和正交性。为了直接得到低通特性, Lebrun 和 Vetterli 提出了多小波的平衡改进方法^[8], 避免了预滤波。

本文在综述了多小波的性质后, 利用正交性和逼近性构造了一个支集在 $[0, 1]$ 上的多小波, 尽管该多小波的正则性较差, 但却具有精确重构的特性和二阶逼近性 (即消失矩为 2), 没有边界失真效应; 受平衡多小波的启发, 对其进行低通和高通特性的改进, 改进后的多小波有更好的低通和高通特性, 不用预滤波; 将其用于地震信号实验, 重构精度非常高; 图像实验表明在一定的压缩比下可获得非常高的 PNSR, 比单小波 Daubechies-4 效果好。

2 多小波及其性质

一组向量 $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r)^T$, ($r > 1$) 称为 r 阶正交多小波, 如果其伸缩和平移 $\Psi_{j,k} = (\psi_1(2^{-j}x - k), \dots, \psi_r(2^{-j}x - k))^T$, ($j, k \in \mathbf{Z}$) 形成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一组规范正交基。为了概念清楚, 我们称 $r = 1$ 时 Ψ 为单小波, $r > 1$ 时 Ψ 为多小波。

与单小波一样, 生成正交多小波 Ψ 相应的多尺度函数 $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)^T$ 仍然满足 r 阶的

¹ 1999-06-11 收到, 2000-01-03 定稿

多分辨分析^[2], 于是存在 $r \times r$ 的矩阵 H_k 和 G_k , 使 Φ 和 Ψ 满足矩阵尺度方程:

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k \Phi(2x - k) \quad (1)$$

$$\Psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_k \Phi(2x - k) \quad (2)$$

或在频域上表示为

$$\hat{\Phi}(\omega) = H(\omega/2)\hat{\Phi}(\omega/2), \quad \hat{\Psi}(\omega) = G(\omega/2)\hat{\Phi}(\omega/2) \quad (3)$$

其中 H 和 G 分别是 $\{H_k\}$ 和 $\{G_k\}$ 的矩阵频率响应:

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \sum_k H_k e^{-ik\omega}, \quad G(\omega) = \frac{1}{2} \sum_k G_k e^{-ik\omega}$$

若 $H_k = \mathbf{0}_r, G_k = \mathbf{0}_r, k < 0$ 或 $k > N, N \in \mathbb{Z}_+$ (这里 $\mathbf{0}_r$ 代表 $r \times r$ 的零阵), 则称 $\{\Phi, \Psi\}$ 是紧支的, 此时 $\{H, G\}$ 是 FIR 多滤波器组.

性质 1 设多尺度函数 $\Phi(x) = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)^T$ 产生 r 阶多分辨分析 $\{V_r\}$, 且满足 (1) 式, 若 $\text{supp}\varphi_1 = \dots = \text{supp}\varphi_r = [0, N], \varphi_i (1 \leq i \leq r)$ 是对称或反对称的, 则 $H_k = S_r H_{N-k} S_r (k \in [0, N])$; S_r 是 $r \times r$ 的对角阵,

$$S_r(i, j) = \begin{cases} 1, & i = j \text{ 且 } \varphi_i \text{ 是对称的} \\ -1, & i = j \text{ 且 } \varphi_i \text{ 是反对称的} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (4)$$

证明 因为 $\varphi_i (1 \leq i \leq r)$ 是对称 / 反对称的, 故

$$\Phi(x) = S_r \Phi(N - x) \quad (5)$$

这里 S_r 由 (4) 式确定, 显然 $S_r = (S_r)^{-1}$; 又由 (1) 式得到:

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^N H_k \Phi(2x - k) = \sum_{k=0}^N H_{N-k} \Phi(2x - N + k)$$

将 (5) 式代入, 得

$$\Phi(N - x) = \sum_{k=0}^N S_r H_{N-k} S_r \Phi(N - 2x + N - k) = \sum_{k=0}^N S_r H_{N-k} S_r \Phi(2(N - x) - k)$$

作变换 $y = N - x$ 后, 再与 (1) 式作比较得到 $H_k = S_r H_{N-k} S_r (k \in [0, N])$. 证毕

性质 2 设多尺度函数 $\Phi(x)$ 产生 r 阶多分辨分析 $\{V_r\}$, 且满足 (1) 式, Ψ 是对应的多小波, 相应的矩阵频率响应是 H 和 G , 若 $\Phi(x)$ 是紧支正交的, 则

(1) 稳定性: $\hat{\Phi}(\omega) = [\prod_{n=1}^{\infty} H(\exp(-i\omega/2^n))] u$; 这里, $u = \hat{\Phi}(0)$ 是 $H(0)$ 的右 1-特征向量.

(2) 正交性: H 满足正交条件:

$$\sum_j H_j H_{j+2k}^T = 2\delta_{k,0} I_r, \quad k \in Z \quad (6)$$

Ψ 是正交的, 当且仅当 G 满足如下正交条件:

$$\sum_j H_j G_{j+2k}^T = 0, \quad \sum_j G_j G_{j+2k}^T = 2\delta_{k,0} I_r, \quad k \in Z \quad (7)$$

这里 I_r 代表 $r \times r$ 的单位阵.

证明 反复应用 (3) 式, 得到:

$$\hat{\Phi}(\omega) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\prod_{n=1}^m H(\exp(-i\omega/2^n)) \hat{\Phi}(\omega/2^n) \right] = \left[\prod_{n=1}^{\infty} H(\exp(-i\omega/2^n)) \right] \hat{\Phi}(0)$$

令 $u = \hat{\Phi}(0)$, 从 (3) 式可得 $H(0)\hat{\Phi}(0) = \hat{\Phi}(0)$, 故 u 是 $H(0)$ 的右 1- 特征向量. 稳定性得证.

$\hat{\Phi}(x)$ 是正交的, 即 $\{\varphi_m(\cdot - k) : 1 \leq n \leq r, k \in Z\}$ 是规范正交系, 当且仅当:

$$\sum_{k \in Z} \hat{\Phi}(\omega + 2\pi k) \hat{\Phi}^*(\omega + 2\pi k) = I_r, \quad |z| = 1$$

将 (3) 式代入整理可得到 (6) 式; (7) 式的证明相同. 正交性得证. 证毕

性质 3 若 R 是任意的正交矩阵, $\hat{\Phi}$ 和 Ψ 是多尺度函数和多小波; 则 $\tilde{\Phi}(x) = R\hat{\Phi}(x)$ 和 $\tilde{\Psi}(x) = R\Psi(x)$ 仍然是正交的多尺度函数和多小波, 相应的矩阵频率响应是 $\tilde{H}(\omega) = RH(\omega)R^T$ 和 $\tilde{G}(\omega) = RG(\omega)R^T$; 且 $\tilde{\Phi}$ 和 $\tilde{\Psi}$ 有相同的对称 / 反对称性, 当且仅当 $R = S_r R S_r$, S_r 的定义见 (4) 式.

证明 显然 $\tilde{\hat{\Phi}}(\omega) = R\hat{\Phi}(\omega) = RH(\omega/2)R^T R\hat{\Phi}(\omega/2) = \tilde{H}(\omega/2)\tilde{\hat{\Phi}}(\omega/2)$, 故 $\tilde{\hat{\Phi}}$ 是多尺度函数; 同样 $\tilde{\Psi}$ 是多小波. R 的正交性也保证了 $\tilde{\hat{\Phi}}$ 和 $\tilde{\Psi}$ 的正交性.

$\hat{\Phi}$ 是对称 / 反对称的, 且每个分量有相同的支集, 由性质 1 知: $H_k = S_r H_{N-k} S_r$ ($k \in [0, N]$), 或等价地写成: $H(\omega) = \exp(-i\omega N) S_r H(-\omega) S_r$; 同样我们有:

$$\tilde{H}(\omega) = RH(\omega)R^T = \exp(-i\omega N) R S_r H(-\omega) S_r R^T = \exp(-i\omega N) R S_r R^T \tilde{H}(-\omega) R S_r R^T$$

因此 $R S_r R^T = S_r$, 即 $R = S_r R S_r$. 证毕

利用上面的性质, 我们可以方便地构造正交对称多小波.

3 构造无边界失真的多小波

设 $V_j^r = \{f | f \text{ 是 } (2^{-j}n, 2^{-j}(n+1)) \text{ 上的 } k \text{ 次多项式, } k \leq r, n = 0, \dots, 2^j - 1, f \text{ 在其位置为零}\}$; 显然我们有 $V_0^r \subset V_1^r \subset \dots \subset V_j^r \subset \dots$; 经分析知 $\{V_j^r\}$ 构成了一个 r 阶的多分辨分析. 取 $r = 2$, 我们在 V_0^r 上构造正交多小波 $\Phi(x) = (\varphi_1, \varphi_2)^T$.

考虑 φ_1 是对称的, φ_2 是反对称的, φ_1 和 φ_2 都在 $[0, 1]$ 上有支撑, $N = 1$, 利用性质 1, $S_2 = \text{diag}(1, -1)$, 则 $H_1 = S_2 H_0 S_2$, 不妨设 $H_0 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$, $H_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ -x_3 & x_4 \end{bmatrix}$, 为了构造正交小波, 由性质 2 的 (5) 式得

$$\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 = 2, \\ x_1x_3 + x_2x_4 - x_1x_3 = 0, \\ x_3^2 + x_4^2 = 1, \end{cases} \quad \text{可得} \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = \pm 1 \quad (\text{取正号}) \\ x_3 = \sin \theta, x_4 = \cos \theta, \theta \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

为使 Φ 有二阶逼近性 (即消失矩为 2), 需要 $1/2$ 是 H_0 的特征根 (由文献 [5] 引理 1), 且考虑 H_0 和 H_1 都不是幂零的, 则取 $x_4 = 1/2$, $x_3 = \pm\sqrt{3}/2$ (取负号)。

于是有

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega}), & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}(1 - e^{-i\omega}), & \frac{1}{4}(1 + e^{-i\omega}) \end{bmatrix}$$

现在来求 G . 设 $G_0 = \begin{bmatrix} y_{01} & y_{02} \\ y_{03} & y_{04} \end{bmatrix}$, $G_1 = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{13} & y_{14} \end{bmatrix}$, 由 Ψ 的正交性, 用性质 2 中的 (6) 式, 可得 $\begin{cases} H_0 G_0^T + H_1 G_1^T = 0_2 \\ G_0 G_0^T + G_1 G_1^T = 2I_2 \end{cases}$, 代入 G_0 和 G_1 , 得到

$$\begin{cases} y_{01} + y_{11} = 0, & y_{03} + y_{13} = 0, \\ -\sqrt{3}y_{01} + \sqrt{3}y_{11} + y_{02} + y_{12} = 0, \\ -\sqrt{3}y_{03} + \sqrt{3}y_{13} + y_{04} + y_{14} = 0, \end{cases} \quad \text{和} \begin{cases} y_{01}^2 + y_{11}^2 + y_{02}^2 + y_{12}^2 = 2 \\ y_{03}^2 + y_{13}^2 + y_{04}^2 + y_{14}^2 = 2 \\ y_{01}y_{03} + y_{02}y_{04} + y_{11}y_{13} + y_{12}y_{14} = 0 \end{cases}$$

考虑 Ψ 的对称性, 取 $y_{03} = 0$, 可求得

$$G_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于所构造的多小波对应滤波器的长度是 2, 因而在分解后能精确重构, 无边界失真效应, 在应用时避免了边界延拓; 我们称该小波为精确重构多小波。

分析所求出的多滤波器组 $\{H, G\}$, $H(0)$ 的右 1 -特征向量 $u \neq I_r$, 这样低频信息就不能被保持 (即不满足低通特性); 而 $G(0) \neq 0_r$, 使得大多数平滑信号不能被 G 滤掉 (即不满足高通特性); 受平衡多小波的启发 [8], 利用性质 3, 我们对该小波作了如下改进。

由于在信号去噪、图像压缩等许多应用中, 我们希望高频的细节部分除边缘点外, 大多数为零, 即 G 要有好的高通特性。设 R 是正交阵, 考虑一阶平衡, 有

$$[1, 1]R^T G(0)R = [0, 0]$$

再与低通特性相结合: $[1, 1]R^T H(0)R = [1, 1]$, 求出 $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 此时具有良好低通高通特性的多小波滤波组是 $\{\tilde{H}, \tilde{G}\} = \{RHR^T, RGR^T\}$, 记为 Opt-rec 多小波。

4 实验结果

由于改进后的多小波滤波组 $\{\tilde{H}, \tilde{G}\}$ 具有良好的低通和高通特性, 所以对原始采样信号可不作任何预滤波处理; 但为了解决向量输入流问题, 仍需要对采样数据 s 作等值向量分流, 再

作向下 $\downarrow 2$ 采样 (也可以不向下 $\downarrow 2$ 采样, 这样信息量加倍, 在重构后再向下 $\downarrow 2$ 采样)。定义如下块矩阵:

$$C^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} RH_0R^T & RH_1R^T & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & RH_0R^T & RH_1R^T & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & RH_0R^T & RH_1R^T \end{bmatrix}_{\frac{1}{2} \times 1j}$$

D^j 的定义同上, 只不过将 H_0 和 H_1 换成 G_0 和 G_1 。 $lj = M/2^{j-1}$, M 是原始数据长度。于是有如下的分解公式:

$$\begin{aligned} v_1 &= C^1 * s, & w_1 &= D^1 * s \\ v_2 &= C^2 * v_1, & w_2 &= D^2 * v_1; \cdots \\ v_j &= C^j C^{j-1} \cdots C^1 * s, & w_j &= D^j C^{j-1} \cdots C^1 * s \end{aligned}$$

重构公式: $\tilde{v}_{j-1} = (C^j)^T \tilde{v}_j + (D^j)^T w_j, j = J, J-1, \dots, 1, \tilde{v}_J = v_J, J$ 是最大分解尺度。 \tilde{v}_0 是 s 的重构。 C^j 和 D^j 仍保持精确重构特性, 即 $(C^j)^T C^j + (D^j)^T D^j = I_2$ 精确成立。

例 1 对一段地震信号, 用 Opt-rec 多小波作了 4 层小波分解, 不作边界延拓, 重构回来的信号误差非常小; 采用对称边界延拓, 可以完全消除误差, 见表 1。

表 1 几个小波对地震信号重构均方差比较

小波	方法	
	对称边界延拓	无边界延拓
Opt-rec 多小波	1.4254e-12	5.1506
Daubechies-4 单小波	15.8651	108.6096
GHM 多小波	12.8673	134.9104

例 2 对 Lenna 图像 (图 1) 进行了 3 层小波分解, 标量量化后, 对高通部分使用阈值 t , 将阈值内的元素赋值为零; 反量化后重构图像。用以下公式来估计压缩比:

$$CN = \frac{8}{(1/4)(e_{w1}) + (1/16)(e_{w2}) + (1/64)(e_{w3}) + (1/64)(e_{v3})}$$

其中 e_{w_j} 表示第 j 层分解的高通部分每点的灰度值占用比特数的熵, e_{v3} 是第 3 层低通部分每点所用比特数的熵。 ZR 表示高通部分零元素所占的比例。



图 1 Lenna 原始图像

图 2 Lenna 图像重构 (无边界延拓)

(a) 用 Opt-rec 多小波
PNSR=36, ZR=85%

(b) 用 Daubechies-4 单小波
PNSR=31.6, ZR=86%

图 2 给出了 Opt-rec 多小波 (a) 和 Daubechies-4 单小波 (b) 在不作边界延拓的情况下, 相同阈值后的重构图像; 选择 Daubechies-4 单小波作比较的原因是它与 Opt-rec 多小波有相同的消失矩和正交性, 但 Opt-rec 的支集更短, 并且是对称的, 从图中看出, (b) 的边界有明显的失真现象, 而采用 Opt-rec 多小波重构的 (a) 图不仅在边界上没有失真, 且图像的整体恢复效果也较好。

我们计算了不同压缩比 CN 下图像的峰值信噪比 PNSR, 与单小波 Daubechies-4(简称 D4) 作了比较 (见图 3), 分别对 D4 进行了周期延拓、对称延拓和无边界延拓的实验, 由于 D4 是不对称的, 故周期延拓略好于对称延拓; 但 Opt-rec 多小波作对称延拓后的性能却明显优于 D4 的任何延拓, 这主要得益于 Opt-rec 的精确重构, 再加上紧支正交对称性, 使得其能量集中性非常好, 又没有边界效应, 在一定的压缩比下可获得非常高的 PNSR, 主观效果也非常好; 适用于对图像质量要求比较高的压缩, 也适用于对图像或信号的检测。

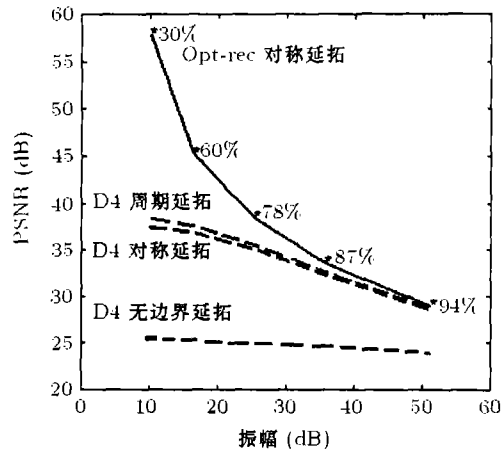


图 3 Opt-rec 和 D4 用于 Lenna 图像
压缩比较 (* 小波系数中零元 %)

5 结 论

我们利用多小波的正交对称性和逼近性构造了一个支集在 $[0, 1]$ 上的多小波, 它具有精确重构的特性和二阶逼近性 (即消失矩为 2), 没有边界失真效应; 受平衡多小波的启发, 对其进行低通和高通特性的改进, 改进后的多小波有更好的低通和高通特性, 不用预滤波; 将其用于地震信号实验, 重构精度非常高; 图像实验表明在不作边界延拓的情况下, 没有任何边界失真; 进行对称边界延拓后, 性能得到进一步提高, 在一定的压缩比下取得了非常高的 PNSR, 比单小波 Daubechies-4 效果好。如果将 Opt-rec 多小波分解和 Huffman 编码、嵌入零树编码和分层预测编码等编码技术相结合, 必将获得更大的压缩比。

参 考 文 献

- [1] Jiang Qingtang, On the design of multifilter banks and orthonormal multiwavelet banks, IEEE Trans. on Signal Processing, 1998, SP-46(12), 3292-3302.
- [2] T. N. T. Goodman, S. L. Lee, Wavelets of multiplicity r , Trans. Amer. Math. Soc., 1994, 342(1), 307-324.

- [3] J. S. Geronimo, D. P. Hardin, P. R. Massopust, Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions, *J. Approx. Theory*, 1994, 78(3), 373–401.
- [4] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF Regional Conf., Ser. in Appl. Math., SIAM, Philadelphia, PA, 1992, 251–253.
- [5] C. K. Chui, J-a. Lian, A study of orthonormal multi-wavelets, *Appl. Numer. Math.*, 1996, 20(3), 273–298.
- [6] X. G. Xia, A new prefilter design for discrete multiwavelet transforms, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, SP-46(6), 1558–1570.
- [7] T. D. Bui, Chen G, Translation-invariant denoising using multiwavelets, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, SP-46(12), 3414–3420.
- [8] J. Lebrun, M. Vetterli, Balanced multiwavelets theory and design, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, SP-46(4), 1119–1125.

A MULTIWAVELET WITH NON-BOUNDARY DISTORTION

Wang Ling Song Guoxiang

(*Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071*)

Abstract The multiwavelet research has been an important aspect of the wavelet theory in recent years. This paper summarizes some important properties of multiwavelets. Using the properties of orthogonality and symmetry, A multiwavelet with compact support in $[0,1]$, accurate reconstruction and approximation order 2 is constructed. The multiwavelet has the most advantage of non- boundary distortion. Needless to prefilter, it has better lowpass and highpass characteristics after being balanced. Examples of signal reconstruction and image compression are given, with satisfactory reconstruction results over the single wavelet.

Key words Multiwavelet, Accurate reconstruction, Boundary distortion, Balanced multi-wavelet

王 玲: 女, 1966 年生, 副教授, 在职博士生; 研究方向: 多小波理论、信号和图象处理, 以及数据结构和计算机模式识别.

宋国乡: 女, 1938 年生, 西安电子科技大学教授, 博士生导师; 主要研究方向: 小波理论及其在电子工程中的应用, 数学建模、算法及应用研究.