

# 分析与综合小波交换使用时编码性能的研究<sup>1</sup>

王光学 孙光宇\* 曹长修 高勇\*

(重庆大学自动化系 重庆 400044)

\*(贵州教育学院物理系 贵阳 550003)

**摘要** 本文提出一种新的选择适于图像编码应用的双正交小波基的方法。通过用几个已被证实是与图像编码密切相关的小波基评价标准,对双正交小波中分析与综合函数交换使用时的编码性能进行全面的比较研究,选出了适合图像编码的分析或综合小波基,并作了编码实验检验。

**关键词** 小波, 双正交小波, 编码, 压缩

**中图分类号** TN919.8

## 1 引言

双正交小波由于具有对称性,便于边界处理,在图像编码中被广泛使用,是图像编码中重要的一类小波。它由两个尺度函数和两个小波函数组成,分别称为分析、综合尺度函数和分析、综合小波函数。其中,分析小波(或分析尺度函数)和综合小波(或综合尺度函数)的位置是对偶的,可以交换使用<sup>[1]</sup>。于是我们不禁要问:在双正交小波基的两个小波函数中,选择哪一个作分析小波,哪一个作综合小波才有利于编码呢?本文试图对这一问题作出回答,同时选出适合图像编码的最佳双正交小波基。

在双正交小波基的评价和选择方面,目前人们虽已作了一些研究<sup>[2,3]</sup>,但一方面研究的重点往往在小波基的评价标准上;另一方面对小波基所作的评价尚欠全面。本文的重点在小波基的选择上,用几个已被证实是与图像编码密切相关的评价标准同时对小波基的编码性能进行全面的评价,我们所用的评价标准是:熵、增益、峰-峰比(Peak-peak-ratio、PPR)、峰-峰比与增益的乘积以及最低频子带重构图像的峰值信噪比 PSNR。其中熵用于小波基无失真编码能力的评价、增益与 PSNR 用于小波基编码图像的客观评价,PPR 和 PPR 与增益的乘积用于小波基编码图像的主观评价。用上述几个标准,我们对目前发表的大量双正交小波分析和综合函数交换使用时的编码性能进行了全面的比较研究,选列出了一些优秀的小波基,并作了编码实验检验。

## 2 双正交小波变换

双正交小波基由两个尺度函数  $\phi(t)$  和  $\bar{\phi}(t)$  和两个小波函数  $\psi(t)$  和  $\bar{\psi}(t)$  构成,它们满足双正交条件及二尺度方程<sup>[1]</sup>。此外,在实际使用中往往还要求  $\phi(t)$ 、 $\bar{\phi}(t)$ 、 $\psi(t)$  和  $\bar{\psi}(t)$  是紧支的(Compactly supported),且有足够高的正则性(Regularity)。这样,即可得到一紧支集双正交小波基。任何平方可积函数  $x(t) \in L^2(R)$  可表示如下:

$$x(t) = \sum_m \sum_n \tilde{x}_{m,n} 2^{-m/2} \bar{\psi}(2^{-m}t - n), \quad (1)$$

$$\tilde{x}_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n)x(t)dt. \quad (2)$$

## 3 评价小波基的几个“好”标准

3.1 熵 图像经小波变换后的熵值可作为小波基无失真编码能力的一种度量,熵越低,小波基的无失真编码能力越强,反之越弱。熵的定义为

$$H = - \sum_{i=1}^N p(i) \log_2 p(i), \quad (3)$$

<sup>1</sup> 1997-09-23 收到, 1998-08-15 定稿  
贵州省科委科学基金资助

式中  $N$  为灰度等级,  $p(i)$  为第  $i$  个灰度等级出现的概率。本文将图像看作无记忆信源, 以便可用 (3) 式来计算其熵值。

3.2 编码增益  $G$  编码增益被广泛用作评价滤波器编码性能的一个标准。双正交情况下增益的表达式为

$$G = \sigma_{in}^2 / \left[ \sum_{n=0}^{L-1} g^2[n] \left( \prod_{i=0}^{M-1} \sigma_i^2 \right)^{1/M} \right], \quad (4)$$

这里  $\sigma_{in}^2$  为输入信号的方差,  $\sigma_i^2$  是第  $i$  子带的方差,  $M$  为子带数,  $L$  为小波的长度。

编码增益与峰值信噪比 PSNR 有很强的关系 [2], 可以作为小波基编码图像的客观评价。

3.3 峰-峰比 PPR 通常在低比特率编码中, 编码失真可见的, 但在某种程度上可以忍受。在小波编码中, 失真是由于对小波系数的量化引起的, 一般说来, 粗的量化引起大的失真, 细的量化引起小的失真, 但小波的长度, 形状等对失真的影响也是不可忽视的。也就是说, 在同样的量化误差下, 不同的小波基引起的失真的大小是不同的。由 (1) 式可见, 小波变换系数的量化误差被综合小波  $\bar{\psi}$  放大并带入重构图像中, 放大的程度和范围由综合小波  $\bar{\psi}$  的长度和振荡幅度决定。为了综合地刻划小波的长度和振荡幅度对量化误差的放大作用, 文献 [2] 定义了一个称为峰-峰比 PPR(peak-peak-ratio) 的量:

$$PPR = \frac{\text{最大峰-峰值}}{\text{第二与第三最大峰-峰值的算术均值}}, \quad (5)$$

由 (5) 式知, PPR 越大, 小波变得越集中, 对量化误差的放大越不显著, 失真的可见度越低, 视觉效果越好。文献 [2] 的大量实验表明, PPR 与编码重构图像的主观评价等级的相关系数是 0.75。

3.4 峰-峰比 PPR 与编码增益  $G$  的乘积 文献 [2] 从所构造的 55 个小波中选出 22 个, 研究其 PPR、 $PPR \times G$  与编码图像主观评价等级的关系, 发现  $PPR \times G$  与主观评价等级的相关系数是 0.87。因此,  $PPR \times G$  是评价小波基编码性能的一个重要参数,  $PPR \times G$  越大, 其编码图像的主观视觉效果 (主观评价) 越好。

3.5 最低频子带重构图像的信噪比 根据对人眼视觉特性的研究知, 人眼对不同频率刺激信号的响应是不同的, 对低频较敏感, 对高频较不敏感。于是在基于小波的图像编码中, 人们往往对最低频子带精细量化, 而对高频子带则进行粗糙的量化, 甚致完全不考虑。所以, 最低频子带重构图像的视觉质量及信噪比可作为评价小波基编码性能的标准。

#### 4 一些典型小波的熵、增益和 PPR 等

一些典型小波基的熵、增益、PPR 等的测量值如表 1 所示。表 1 中所用标准图像尺寸为  $256 \times 256$ , 小波分解的次数为 3, 斜杠 “/” 上的数据对应斜杠上的小波, 斜杠下的数据对应斜杠下的小波 (即斜杠上小波的对偶)。D 表示 Daubechies<sup>[1]</sup> 小波。

从表 1 中知, D5-3、D9-3、D9-7 和 D9-11 小波的熵  $H$ 、增益  $G$ 、峰-峰比 PPR、 $PPR \times G$  以及最低频子带重构图像的峰值信噪比 PSNR 均分别大大优于其对偶 D3-5、D3-9、D7-9 和 D11-9, 而 D5-7、D9-15、D13-23 的上述指标仅略优于其对偶。其中 D9-7 是最佳的, 其上述指标皆处在前三位, 其次是 D5-3。考虑到图像的统计特性等因素, 一般编码以选用 D9-7 为宜, 实时性要求较高场合可选 D5-3。

表 1 一些典型小波的熵  $H$ 、编码增益  $G$ 、峰-峰比 PPR 等

小波基	峰-峰比 PPR	图像	熵 $H$	增益 $G$	$G \times \text{PPR}$	信噪比	平均熵	平均 增益	平均 $G \times \text{PPR}$	平均 信噪比
D9-7/7-9	1.46/1.39	Lena	3.009/ 3.288	21.188/ 19.254	30.93/ 26.76	22.191/ 21.859	3.134/ 3.388	21.817/ 19.931	31.85/ 27.70	22.311/ 22.000
		Cronkite	1.251/ 1.465	28.358/ 25.400	41.40/ 35.31	25.647/ 25.073				
		Baboon	5.142/ 5.231	15.905/ 15.138	23.22/ 21.04	19.096/ 19.069				
D5-3/3-5	1.60/1.28	lena	3.033/ 3.696	20.901/ 17.123	33.44/ 21.92	21.929/ 20.327	3.259/ 3.768	21.475/ 17.60	34.36/ 22.54	22.059/ 20.705
		Cronkite	1.583/ 2.208	28.100/ 21.647	44.96/ 27.71	25.181/ 22.970				
		Baboon	5.160/ 5.399	15.423/ 14.047	24.68/ 17.98	19.068/ 18.819				
D5-7/7-5	1.46/1.48	Lena	3.208/ 3.254	20.171/ 19.913	29.45/ 29.47	21.671/ 21.572	3.331/ 3.375	20.650/ 20.40	30.15/ 30.19	21.842/ 21.761
		Cronkite	1.604/ 1.682	25.998/ 25.597	37.96/ 37.88	24.775/ 24.643				
		Baboon	5.181/ 5.189	15.782/ 15.691	23.04/ 23.22	19.079/ 19.068				
D9-3/3-9	1.47/1.33	Lena	3.045/ 3.404	20.643/ 18.714	30.34/ 24.89	22.041/ 21.736	3.208/ 3.488	21.272/ 19.278	31.26/ 25.46	22.176/ 21.88
		Cronkite	1.422/ 1.752	27.732/ 24.405	40.77/ 32.46	25.394/ 24.844				
		Baboon	5.158/ 5.308	15.441/ 14.714	22.69/ 19.57	19.094/ 19.067				
D9-11/ 11-9	1.41/1.38	Lena	3.114/ 3.202	20.913/ 19.514	29.49/ 26.93	22.250/ 21.947	3.202/ 3.330	21.458/ 20.273	30.25/ 27.98	22.374/ 22.111
		Cronkite	1.294/ 1.589	27.744/ 26.173	39.12/ 36.12	25.773/ 25.283				
		Baboon	5.199/ 5.199	15.717/ 15.132	22.16/ 20.88	19.098/ 19.075				
D9-15/ 15-9	1.43/1.42	Lena	3.098/ 3.109	20.548/ 20.480	29.38/ 29.08	22.146/ 22.091	3.214/ 3.227	21.194/ 21.122	30.31/ 29.99	22.265/ 22.210
		Cronkite	1.388/ 1.417	27.266/ 27.132	38.99/ 38.51	25.551/ 25.456				
		Baboon	5.156/ 5.157	15.767/ 15.763	25.55/ 22.38	19.097/ 19.093				
D13-23/ 23-13	1.40/1.40	Lena	3.079/ 3.086	20.671/ 20.618	28.94/ 28.86	22.270/ 22.233	3.187/ 3.196	21.364/ 21.31	29.91/ 29.83	22.392/ 23.350
		Cronkite	1.330/ 1.341	27.652/ 27.652	38.71/ 38.55	25.809/ 25.727				
		Baboon	5.151/ 5.152	15.769/ 15.767	22.08/ 20.07	19.096/ 19.095				

## 5 编码实验结果及结论

本节选择三个具有代表性的双正交小波基 D9-7(最佳)、D5-7(一般)与 D7-9(较差)来作编码模拟实验。

作 3 次小波变换,产生 10 个子带,最低频用一 8 bit 标量量化器量化,其余高频子带用矢量量化器量化。将高频子带看作一个个准独立的图像信源,用 LBG<sup>[4]</sup> 算法分别为其设计一子码书。其中,第三级子码书矢量维数均为  $2 \times 2$ , 尺寸分别为 128、128 及 64(对角高频);第二级子码书矢量维数均为  $4 \times 4$ , 尺寸分别为 128、128 及 64(对角高频);第一级子码书矢量维数均为  $16 \times 16$ , 尺寸分别为 8、8 及 0(对角高频)。编码结果如图 1 所示。



图 1 编码重构图像

(a) 为 Lena 原图, (b)、(c) 及 (d) 分别为 D9-7、D5-7 及 D7-9 的编码重构图像, 比特率皆为 0.30bit/pel, 信噪比分别为 30.47dB、28.48dB、26.74dB。

可见, 从编码重构图像的客观质量(信噪比)看, D9-7 优于 D5-7, D5-7 优于 D7-9; 从编码重构图像的主观质量(视觉效果)看, 也有上述关系成立。

这表明本文用熵、编码增益、峰-峰比, 峰-峰比与编码增益的乘积以及最低频子带重构图像质量作为评价标准, 通过对双正交小波中分析与综合函数交换使用时的编码性能进行比较研究, 选择适合图像编码应用的最佳双正交小波基是正确的。

## 参 考 文 献

- [1] Cohn A, Daubechies I, Feauveau F C. Biorthogonal base of compactly supported wavelet. Commun. Pure Applied Math, 1992, 45: 485-560.
- [2] Da Silva E A, Ghanbari M. On the performance of linear phase wavelet transforms in low bit-rate image coding. IEEE Trans. on IP., 1996, IP-5(5): 689-705.
- [3] Villasenor J D, Belzer B, Liao J. Wavelet filter evaluation for image compression. IEEE Trans. on IP., 1995, IP-4(8): 1053-1060.
- [4] Linde Y, Buzo A, Gray R M. An algorithm for vector quantization design. IEEE Trans. on Commun, 1980, COM-28(1): 84-95

## A STUDY OF CODING PERFORMANCE WHILE ANALYSIS EXCHANGING WITH SYNTHESIS IN BIORTHOGONAL WAVELETS

Wang Guangxue Sun Guangyu\* Cao Changxiu Gao Yong\*

(Department of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044)

\*(Dept. of Physics Guizhou Education Institute, Guiyang 550003)

**Abstract** A new method for choosing biorthogonal wavelet bases which is suitable for image coding is presented. A thoroughly comparative study is made and biorthogonal wavelet bases suitable for image coding are selected by using several criteria of evaluation proven to be closely related to image coding. It is verified by coding experiment.

**Key words** Wavelet, Biorthogonal wavelet, Coding, Compression

王光学: 男, 1960 年生, 副教授, 博士生, 研究兴趣为图像编码、图像识别、小波理论等。

孙光宇: 男, 1957 年生, 副教授, 硕士, 研究兴趣为图像处理。

曹长修: 男, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 研究兴趣为 CIMS, 图像识别等。

高 勇: 男, 1957 年生, 副教授, 研究兴趣为图像处理。