

一种峭度依赖的参数自适应盲分离算法

史晓非 刘人杰 苗瑞
(大连海事大学信息工程学院 大连 116028)

摘要 针对超高斯与亚高斯混合信源分离算法上存在的不足,该文提出一种峭度依赖的参数自适应盲分离算法。该算法用加权双高斯模型估计超高斯与亚高斯信源分布,在自然梯度框架下,依据峭度实现模型参数自适应。通过使用混合图像对其进行验证,实验表明该算法不仅可以有效实现超高斯与亚高斯混合信源的分离,而且比已有算法具有更好的分离和收敛性能。

关键词 信号处理,盲分离,加权,双高斯,超高斯,亚高斯

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)11-2033-04

A Parameter Kurtosis-Dependent Flexible BSS Algorithm

Shi Xiao-fei Liu Ren-jie Miao Rui

(Information Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian 116028, China)

Abstract To overcome some shortcomings of existing algorithms which separate the mixture of super- and sub-gaussian sources, a parameter kurtosis-dependent flexible Blind Source Separation (BSS) algorithm is proposed. A weighed double Gaussian model is proposed to estimate super-Gaussian and sub-Gaussian probability density. In the framework of natural gradient, model parameter is calculated online by kurtosis. Applied to images mixing, experiment shows the proposed algorithm can successfully separate the mixture of super- and sub-gaussian images. Meanwhile experiment also shows that the proposed algorithm has better performance and convergence than existing algorithms.

Key words Signal processing, Blind Source Separation, Weighed, Double Gauss, Super-Gauss, Sub-Gauss

1 引言

盲分离是在已知观测源的情况下,估计形成这些线性混叠观测源的未知源信号。目前盲分离在很多领域具有重要的应用意义,例如鸡尾酒会问题、通信信号处理、医用信号处理以及图像处理等。近年来,盲源分离或独立分量分析^[1-7]引起了信号处理领域的广泛关注。Amari用神经网络的方法提出盲分离算法^[1],Cardoso对盲分离领域的发展进行了详细地介绍并指出信源自适应是一个比较困难的问题^[2],Boscolo提出用投影搜索的核密度方法估计代价函数^[3],Vlassis用一种加权高斯和的方法估计信源概率密度^[4],该方法能实现对超高斯和亚高斯信源的估计,但误差较大并且具有较高的时间复杂度。Lee提出用稳定性函数作为区别超高斯、亚高斯的门限,用非线性函数估计超高斯与亚高斯分布^[5],但该算法的估计误差偏大。Choi提出用推广高斯模型估计超高斯与亚高斯分布,实现盲分离^[6]。该方法的局限在于只能估计单峰,判别超高斯与亚高斯用经验选择系数,这样不够准确。针对已有的算法在超高斯与亚高斯信源混合分离问题上存在的一些不足,本文提出一种峭度依赖的参数自

适应盲分离算法,首先提出一种加权双高斯模型,可以有效估计超高斯与亚高斯分布,然后根据当前峭度,自适应计算模型参数,并计算对应的代价函数,应用到自然梯度算法中,可以有效地实现超高斯与亚高斯混合信源的分离。

2 最大似然估计盲分离方法

假设有 N 维零均值信源矢量 $\mathbf{S}(t)=[s_1(t),\dots,s_N(t)]^T$,其中每个分量统计独立, N 为矢量个数。观测数据矢量可以描述为

$$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{A}\mathbf{S}(t) \quad (1)$$

这里 $\mathbf{Y}(t)=[y_1(t),\dots,y_N(t)]^T$ 为已知数据矢量, \mathbf{A} 为 $N \times N$ 满秩未知混合矩阵, \mathbf{T} 为转置。如果定义估计的信源为 $\mathbf{X}(t)$,则

$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{W}\mathbf{Y}(t)=\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{S}(t) \quad (2)$$

这里 \mathbf{W} 为分离矩阵。最大似然目标函数^[7] $L(\mathbf{W})$ 可以表示为

$$L(\mathbf{W})=E\left\{\sum_{i=1}^N \log f_i(\mathbf{W}_i^T \mathbf{Y})\right\}+\log|\det \mathbf{W}| \quad (3)$$

文献[1]提出了具有更好收敛性的自然梯度算法

$$\Delta \mathbf{W} \propto \left(I+E\left\{\varphi(\mathbf{X})\mathbf{X}^T\right\}\right)\mathbf{W} \quad (4)$$

这里 $\varphi(\mathbf{X})=[\varphi_1(x_1),\dots,\varphi_N(x_N)]^T$ 为代价函数^[7],定义为

$$\varphi_i = -(\log f_i)' = -f_i'/f_i \quad (5)$$

在代价函数 $\varphi(\mathbf{X})$ 中, 信源 \mathbf{X} 的概率密度 f_i 的估计是关键, 因此本文提出一种加权双高斯概率密度模型来估计其分布。

3 加权双高斯模型的提出

本文提出一种加权双高斯概率密度模型, 来估计信源 \mathbf{X} 的概率密度, 其表达式为

$$f(x) = \omega g(x, -\mu, \sigma_1) + (1 - \omega)g(x, \mu, \sigma_2) \quad (6)$$

其中 ω 为加权系数, $0 < \omega < 1$, g 为高斯函数, μ 为高斯函数均值, σ_1 和 σ_2 分别为两个高斯函数的均方差。该模型的均值为

$$E(x) = (1 - 2\omega)\mu \quad (7)$$

对应的二阶矩、三阶矩和四阶矩分别为

$$E(x^2) = \omega\sigma_1^2 + (1 - \omega)\sigma_2^2 + \mu^2 \quad (8)$$

$$E(x^3) = -3\omega\mu\sigma_1^2 + 3(1 - \omega)\mu\sigma_2^2 + (1 - 2\omega)\mu^3 \quad (9)$$

$$E(x^4) = \omega(3\sigma_1^4 + 6\sigma_1^2\mu^2) + (1 - \omega)(3\sigma_2^4 + 6\sigma_2^2\mu^2) + \mu^4 \quad (10)$$

由于超高斯与亚高斯是对称分布的, 其模型的均值和三阶矩均为零, 因此模型中的参数必须具备以下条件:

(1) $\mu = 0$; 或者(2) $\omega = 1/2$ 且 $\sigma_1 = \sigma_2$ 。对上述两个条件, 我们分别进行讨论。

(1) 当 $\mu = 0$ 信源 \mathbf{X} 的四阶累积量^[7]可以通过二阶矩和四阶矩求出, 即

$$\text{cum}4(x) = E(x^4) - 3[E(x^2)]^2 = 3\omega(1 - \omega)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 \quad (11)$$

从式(11)可以看出, 当 $\omega = 0$ 或 $\omega = 1$ 或者 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, 式(11)为 0, 信源 \mathbf{X} 为高斯分布。当 $0 < \omega < 1$ 且 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ 时, 式(11)大于 0, 因此式(6)可以用来估计超高斯分布。

其峭度^[7]定义为

$$\text{kurt}(x) = \frac{E(x^4) - 3[E(x^2)]^2}{[E(x^2)]^2} = \frac{3\omega(1 - \omega)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2}{[\omega\sigma_1^2 + (1 - \omega)\sigma_2^2]^2} \quad (12)$$

$$\text{若定义} \quad \sigma_1^2 = l\sigma_2^2 \quad (13)$$

其中 l 为正实数满足 $l > 0$, 且 $l \neq 1$, 则式(12)为

$$\text{kurt}(x) = \frac{3\omega(1 - \omega)(l - 1)^2}{[l\omega + (1 - \omega)]^2} \quad (14)$$

峭度和参数 ω , l 的关系如图 1 所示, 这里 $l = 100$ 。进行白化^[7]处理, 二阶矩等于 1, 可以推导出 σ_1 和 σ_2 的表达式, 从而得到估计超高斯信源的概率模型, 其数学表达式为

$$f(x) = \omega g\left(x, 0, \sqrt{\frac{l}{\omega l + (1 - \omega)}}\right) + (1 - \omega)g\left(x, 0, \sqrt{\frac{1}{\omega l + (1 - \omega)}}\right) \quad (15)$$

通常 $l = 100$ 可以满足估计条件, 则加权系数 ω 可以通过式(14)在线求出。

(2) 当 $\omega = 1/2$ 且 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ 此时模型的四阶矩和二阶矩分别为

$$E(x^4) = 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4 \quad (16)$$

$$E(x^2) = \sigma^2 + \mu^2 \quad (17)$$

可得到峭度的表达式为

$$\text{kurt}(x) = \frac{-2\mu^4}{(\sigma^2 + \mu^2)^2} \quad (18)$$

当 $\mu = 0$ 时, 模型式(6)为高斯分布, 当 $\mu \neq 0$ 时, 峭度小于 0, 因此模型式(6)可以用来估计亚高斯分布。若定义

$$\mu^2 = k\sigma^2 \quad (19)$$

其中 k 为大于 0 的实数, 则峭度可这样表示:

$$\text{kurt}(x) = \frac{-2k^2}{(1 + k)^2} \quad (20)$$

图 2 给出峭度与参数 k 的关系曲线, 峭度随着 k 的增加而下降。

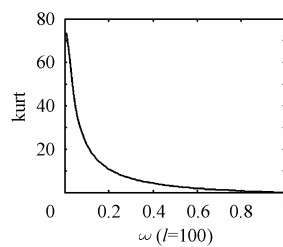


图 1 超高斯峭度 kurt 与 ω 关系曲线

Fig.1 Super-Gauss kurtosis kurt of the proposed model with ω

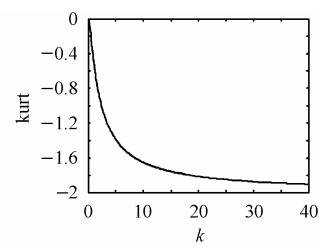


图 2 亚高斯峭度 kurt 与 k 关系曲线

Fig.2 Sub-Gauss kurtosis kurt of the proposed model with k

进行白化处理, 二阶矩等于 1, 可以推导出 μ 和 σ 的表达式, 此时估计亚高斯概率密度模型的数学表达式为

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[g\left(x, -\sqrt{\frac{k}{k+1}}, \sqrt{\frac{1}{k+1}}\right) + g\left(x, \sqrt{\frac{k}{k+1}}, \sqrt{\frac{1}{k+1}}\right) \right] \quad (21)$$

模型式(6)可归纳为, 当信源 \mathbf{X} 为超高斯, 用式(15)估计其概率分布, 当信源 \mathbf{X} 为亚高斯, 用式(20)估计其概率分布。

4 代价函数

基于加权双高斯概率密度模型式(6)的代价函数表达式由式(5)可以推导出, 若信源为超高斯分布, 则代价函数表达式为

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{f'(x)}{f(x)} \\ &= \left\{ \omega \frac{\omega l + (1 - \omega)}{l} x g\left(x, 0, \sqrt{\frac{l}{\omega l + (1 - \omega)}}\right) + (1 - \omega)[\omega l + (1 - \omega)] x g\left(x, 0, \sqrt{\frac{1}{\omega l + (1 - \omega)}}\right) \right\} \\ &\quad / \left\{ \omega g\left(x, 0, \sqrt{\frac{l}{\omega l + (1 - \omega)}}\right) + (1 - \omega)g\left(x, 0, \sqrt{\frac{1}{\omega l + (1 - \omega)}}\right) \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (22)$$

若信源为亚高斯分布, 则代价函数为

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{f'(x)}{f(x)} \\ &= \left\{ (k+1) \left(x + \sqrt{\frac{k}{k+1}} \right) g \left(x, -\sqrt{\frac{k}{k+1}}, \sqrt{\frac{1}{k+1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + (k+1) \left(x - \sqrt{\frac{k}{k+1}} \right) g \left(x, \sqrt{\frac{k}{k+1}}, \sqrt{\frac{1}{k+1}} \right) \right\} \\ &\quad \left/ \left[g \left(x, -\sqrt{\frac{k}{k+1}}, \sqrt{\frac{1}{k+1}} \right) + g \left(x, \sqrt{\frac{k}{k+1}}, \sqrt{\frac{1}{k+1}} \right) \right]^{-1} \right. \end{aligned} \quad (23)$$

图 3 给出超高斯和亚高斯概率分布及相应的代价函数。

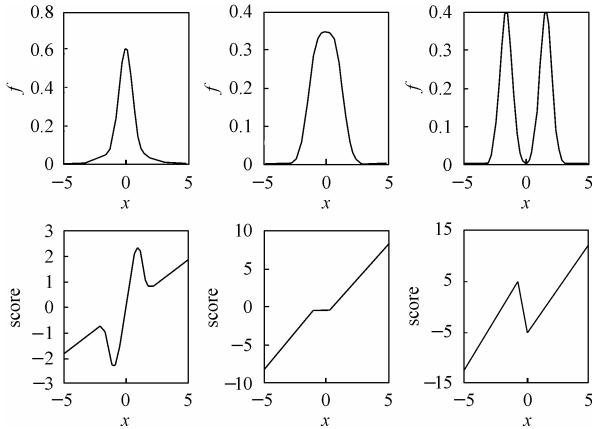


图 3 超高斯与亚高斯概率密度 f 和代价函数 $score$ 曲线

Fig.3 The curves of super-Gauss and sub-Gauss probability density and score function with x

5 参数自适应盲分离算法描述

本文盲分离算法的描述如下：

- (1)对混合信源进行白化；
- (2)计算信源峭度，确定信源种类；
- (3)根据信源峭度确定模型参数。如果信源为超高斯， $l=100$ ，由式(14)计算 ω ；如果信源为亚高斯，由式(20)计算 k 。
- (4)计算代价函数式(22)与式(23)，用式(4)进行盲分离运算；
- (5)重复上述过程(2)-(4)，直至 $|L(W_{\text{new}}) - L(W_{\text{old}})| < \varepsilon$ ，停止迭代。

6 仿真实验

源图像为两个超高斯图像和两个亚高斯图像混合，采用本文方法进行分离，源图像、混合图像和分离图像如图 4-图 6 所示，随机混合矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -1.5420 & -0.5414 & 0.1884 & -2.0321 \\ -0.2354 & -0.0674 & 0.2847 & 1.2202 \\ 1.1994 & 2.2560 & -1.5296 & -0.3648 \\ -0.0332 & 0.2124 & -2.3702 & -0.6328 \end{bmatrix}$$

信源峭度分别为-1.0042, 4.9468, -0.8681, 2.7903。误差 $E^{[5]}$ 定义为

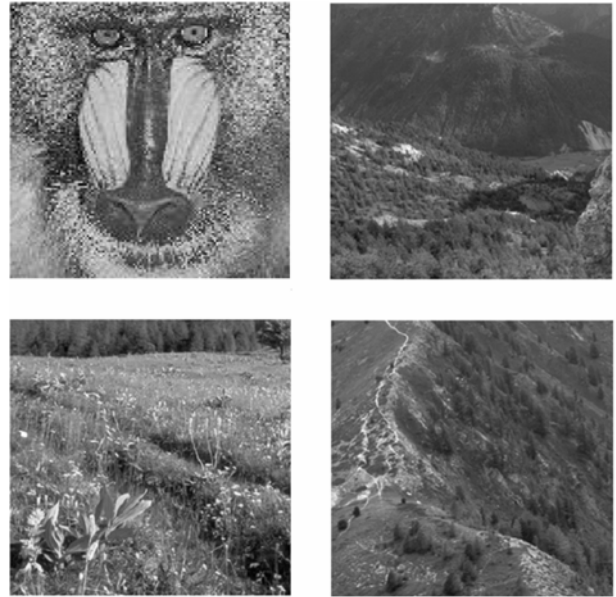


图 4 源图像
Fig.4 Original images

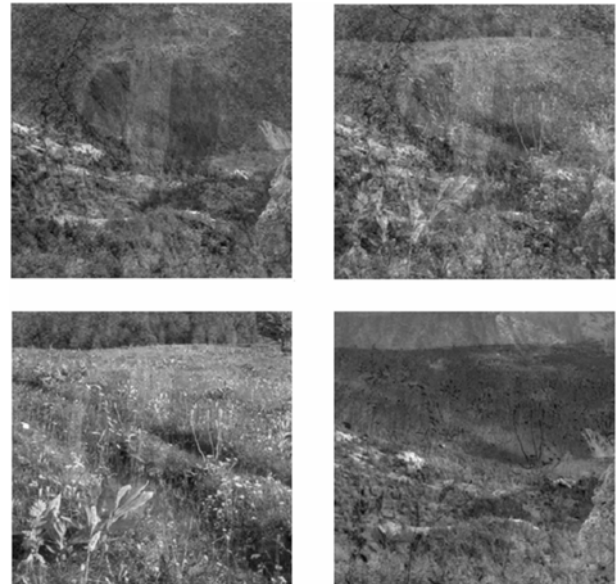


图 5 混合图像
Fig.5 Mixed images

$$E = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \frac{|p_{ij}|}{\max_k |p_{ik}|} - 1 \right) + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \frac{|p_{ij}|}{\max_k |p_{kj}|} - 1 \right) \quad (24)$$

图 7 反映 3 种算法分离上述超高斯与亚高斯混合图像的分误差 E 与迭代次数曲线。曲线①为 Lee 算法误差曲线，曲线②为 Choi 算法误差曲线，曲线③为本文算法误差曲线。从图 7 可以看出，本算法在分离误差上要比已有两个算法的误差要小，且收敛平稳。针对超高斯模型，在实验中设定参数 l 固定不变，模型中 ω 具有决定超高斯峭度的作用，超高斯峭度与参数 ω 成反比，即峭度越大， ω 越小，反之亦然，在盲分离过程中通过峭度选取相应的 ω ，范围在(0, 1)之间。针对亚高斯模型，模型中 k 具有决定亚高斯峭度的作用，峭度越大， k 越小，范围选择在[2, 40]之间即可。

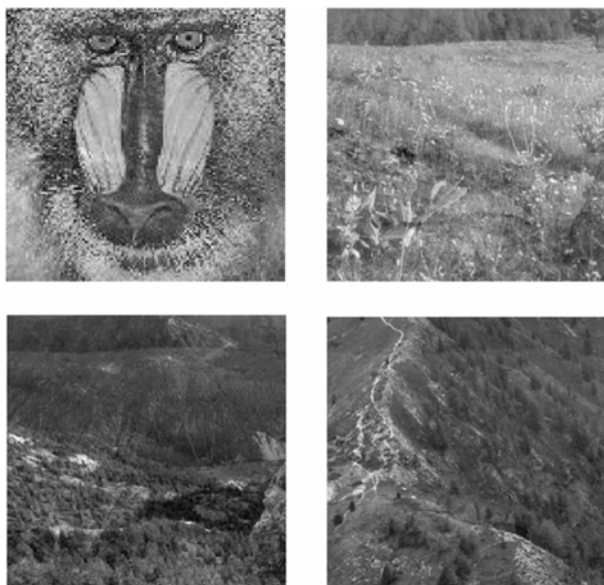
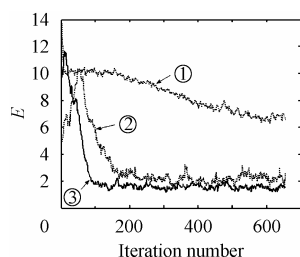


图 6 分离图像

Fig.6 Separated images

图 7 3 种算法误差 E 与迭代数关系曲线Fig.7 Performance error E contrast with iteration number

- ① is the error of Lee's algorithm ② is the error of Choi's algorithm
③ is the error of proposed algorithm

7 结束语

本文提出了一种峭度依赖的参数自适应盲分离算法,通过加权双高斯模型可以有效地估计超高斯、亚高斯概率分布,依据当前分离信源峭度在线学习模型参数,代价函数自适应获取。仿真实验表明本文提出的算法比已有的算法具有

更好的分离和收敛性能。本文提出的模型可以有效估计亚高斯单峰和双峰概率分布,克服了已有参数化方法无法估计双峰的问题,同时具有参数自适应选择,克服了已有算法参数凭经验选择的问题,提高了算法的分离性能。另外本文提出的算法具有模型简单、计算复杂度低的优点,克服了已有参数化方法采用复杂的 Gamma 函数,导致计算复杂度高的问题。当然本文提出的方法明显要优于非参数化的盲分离方法,具有良好的参数自适应性。

参考文献

- [1] Amari S I. Natural gradient works efficiently in Learning. *Neural Computation*, 1998, 10(2): 251–276.
- [2] Cardoso J F. Blind signal separation: Statistical principles. *Proc. IEEE*, 1998, 86(10): 2009–2025.
- [3] Boscolo R, Vwani H P. Independent component analysis based on nonparametric density estimation. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 2004, 15(1): 55–65.
- [4] Vlassis N, Motomura Y. Efficient source adaptivity in independent component analysis. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 2001, 12(3): 559–565.
- [5] Lee T W, Girolami M, Sejnowski T J. Independent component analysis using an extended informax algorithm for mixed sub-gaussian and super-gaussian sources. *Neural Computation*, 1999, 11(2): 409–433.
- [6] Choi S, Cichocki A, Amari S. Flexible independent component analysis. *IEEE Workshop on Neural Networks for Signal Processing*, Cambridge, UK, 1998: 83–92.
- [7] Hyvarinen A, Karhunen J, Oja E. *Independent Component Analysis*. New York: John Wiley, 2001: 203–208.

史晓非: 男, 1974 年生, 博士, 讲师, 研究方向为盲信号处理。

刘人杰: 男, 1941 年生, 博士生导师, 教授, 主要研究方向为信息技术与应用。

苗 瑞: 男, 1982 年生, 硕士生, 研究方向为通信信号处理。