

## 多输入多输出系统信道容量研究

王君 朱世华 王磊

(西安交通大学信息与通信工程系 西安 710049)

**摘要:** 该文研究接收端采用均圆阵天线阵放置空间有限的条件下, 存在相关衰落时 MIMO 系统的信道容量。建立了衰落相关模型, 分析了散射角大小及天线数对信道容量的影响, 采用随机理论推导了  $M \times N$  的 MIMO 系统信道容量的闭式解。分析结果表明, MIMO 系统信道容量主要由衰落相关矩阵的特征值决定。仿真结果表明, 在接收端空间有限的情况下, 天线数增大到一定程度时, 信道容量达到饱和, 再增加天线数, 对信道容量的影响很小。

**关键词:** 移动通信, MIMO, 信道容量

**中图分类号:** TN929.5      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1009-5896(2005)04-0588-04

## On Channel Capacity of MIMO Systems

Wang Jun    Zhu Shi-hua    Wang Lei

(Dept of Information and Communications Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract** The paper studies the capacity of a Multiple Input Multiple Output (MIMO) system with correlated fading under the constrain of fixed space for the receiver UCA antennas. The fading correlation model is established and the impacts of the number of antennas and scattering angle on the channel system capacity are investigated. Based on the random theory, a closed-form expression for the channel capacity of an M by N MIMO system is derived. Analysis shows that the channel capacity of a MIMO system is mainly determined by eigenvalues of the fading correlated matrix. Simulation shows that the channel capacity is saturated when the number of antennas increases to a certain point.

**Key words** Mobile communications, MIMO, Channel capacity

### 1 引言

未来移动通信系统要求能支持除语音以外的视频传输、文件传送和高速上网等业务, 对传输速率和服务质量有很高的要求。多输入多输出 (Multiple-Input-Multiple-Output: MIMO) 技术在发射端和接收端都采用多天线, 可以充分利用空间资源提高频谱效率和改善系统性能, 因而在未来移动通信新系统中有重要的应用价值。文献[1]已证明在单用户点对点环境中采用 MIMO 技术可以大幅度提高系统的信道容量。文献[2]则分析了窄带 Rayleigh 衰落环境中 MIMO 系统的信道容量, 证明了若不同天线对间的衰落独立同分布, 即便发射端未知信道参数, 信道容量也可随天线数线性增长。

在实际应用中, 由于天线间距及天线周围散射物个数有限使得各天线对间的衰落存在一定的相关性。文献[3]分析了接收机已知信道参数, 发射机已知和未知信道参数两种情况下, 衰落相关性对信道容量的影响, 并采用随机矩阵理论分析了当天线数  $n$  趋于无穷大时的信道容量。在文献[3]中, 天

线是等间距放置的, 随着天线数的增加, 放置天线的空间也在增加。但在实际中, 无论在移动台还是基站, 可以用来放置天线的空间都是有限的。因此要求虽然天线数增加了, 但所占用的空间应该是一定的。本文针对这种情况, 重新建立了衰落相关的数学模型。讨论了接收端采用均匀圆阵 (Uniform Circular Array: UCA) 时接收衰落相关矩阵的特点, 利用循环矩阵理论分析了相关矩阵的特征值; 采用随机矩阵理论详细推导了 MIMO 系统信道容量的闭式解, 并分析了散射角大小和接收天线数对系统信道容量影响, 最后给出了仿真试验结果及结论。

### 2 信道模型

考虑一  $M \times N$  的窄带 MIMO 系统, 即发射天线数和接收天线数分别是  $M$  和  $N$ 。接收信号的离散时间等效系统模型为

$$y = Hx + n \quad (1)$$

式中,  $x$  为  $M \times 1$  维发射信号向量, 假设其元素是均值为 0, 方差为  $\sigma^2$  的独立高斯随机变量;  $y$  为  $N \times 1$  维接收信号向量;

$$\mathbf{H} \text{ 为 } N \times M \text{ 维信道矩阵, } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1M} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NM} \end{bmatrix}, \mathbf{H} \text{ 中元}$$

素  $h_{ij}$   $\{i=1,2,\dots,N; j=1,2,\dots,M\}$  表示发射天线  $j$  与接收天线  $i$  间的复路径增益。 $\mathbf{n}$  为  $N \times 1$  维 AWGN 矢量, 其均值为 0, 方差是  $E[\mathbf{nn}^T] = \sigma_n^2 \mathbf{I}_N$ ,  $\mathbf{T}$  为向量的共轭转置,  $\mathbf{I}_N$  为  $N \times N$  维单位阵。

为了分析方便, 假设信道为准静态慢变 Rayleigh 衰落信道。接收端已知信道信息, 发射端未知。发射信号总功率为  $P$ , 与发射天线数无关。发射端采用等功率发射, 于是有  $E[\mathbf{xx}^T] = \sigma^2 \mathbf{I}_M = (P/M)\mathbf{I}_M$ 。另假设信号与噪声不相关, 即  $E[\mathbf{xn}^T] = 0$ 。

如果发射端天线间距足够大, 则各天线上发射信号可近似为相互独立。接收端在限定空间采用 UCA 阵列。信号经过空间传播, 由于衰落的影响及接收端天线间距的有限性, 使得信号间存在一定的相关性。

将信道矩阵写成如下形式<sup>[3]</sup>:

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{U} \Phi^{1/2} \quad (2)$$

式中  $\mathbf{R}$  为  $N \times N$  空间接收相关矩阵,  $\Phi$  为  $M \times M$  发射相关矩阵。本文只考虑接收相关, 因此令  $\Phi = \mathbf{I}_{M \times M}$ ;  $\mathbf{U}$  的元素是均值为 0, 方差为 1 的独立复高斯随机变量。多径信号到达 UCA 天线阵的散射角为  $A$ , 且多径信号到达方向在  $[\varphi - A, \varphi + A]$  中均匀分布, 即概率密度为

$$P(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2A}, & \varphi - A \leq \theta \leq \varphi + A \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\varphi$  为信号的平均到达方向。

对于间距为  $d$  的两天线间的衰落相关系数为<sup>[4]</sup>

$$R(d) = \frac{1}{2A} \int_{\varphi-A}^{\varphi+A} \exp\left(j \frac{2\pi d}{\lambda} \sin(\theta)\right) d\theta \quad (4)$$

$A$  较小时, 上式可以化简为

$$R(d) = \exp\left(j \frac{2\pi d}{\lambda} \sin(\varphi)\right) \text{sinc}\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \cos(\varphi) A\right) \quad (5)$$

式中,  $\lambda$  为载波波长  $\lambda = c/f$ ,  $f$  为载波频率;  $j = \sqrt{-1}$ 。对于 UCA 天线阵, 设其半径为  $r$ , 天线数为  $N$ , 则天线阵上任意天线与其他天线的间距为

$$d_i = 2r \sin(\pi i / N), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

因此根据式(5)和式(6)可以得到接收相关矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R(0) & R(1) & R(2) & \cdots & Z & Z & \cdots & R(2) & R(1) \\ R(1) & R(0) & R(1) & R(2) & \cdots & Z & Z & \cdots & R(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R(2) & \cdots & Z & Z & \cdots & R(2) & R(1) & R(0) & R(1) \\ R(1) & R(2) & \cdots & Z & Z & \cdots & R(2) & R(1) & R(0) \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中,  $Z = R \frac{N-1}{2}$ 。  $R(i) = R(d_i)$  为间距是  $d_i$  的两根接收天线间的衰落相关系数, 由式(5)和式(6)计算得到。从式(7)可以看出, 接收相关矩阵  $\mathbf{R}$  是一循环对称矩阵。可采用循环矩阵求特征值方法得到其特征值<sup>[5]</sup>。

$$\text{循环矩阵 } \mathbf{R} \text{ 的特征值为 } \lambda_m = \sum_{k=0}^{N-1} R(k) \exp(-j2\pi mk / N)。$$

由于相关系数矩阵  $\mathbf{R}$  是一实对称阵, 所以上式可以简化为

$$\lambda_m = \sum_{k=0}^{N-1} R(k) \cos(2\pi km / N) \quad (8)$$

相关矩阵  $\mathbf{R}$  是半正定循环矩阵, 因此它的特征值都大于等于零, 而且都为实的。

### 3 MIMO 系统信道容量

设接收端已知信道参数, 而发射端未知信道参数, 这种情况可以采用等功率发射。发射的总功率设为  $P$ , 与发射天线数无关。于是每根天线上的发射功率为  $P/M$ 。由文献[6]可知,

$$I(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = H(\mathbf{y}) - H(\mathbf{y}|\mathbf{x})$$

根据文献[6]的分析有

$$I(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{|\text{var}(\mathbf{y})|}{|\text{var}(\mathbf{y}|\mathbf{x})|} \quad (9)$$

式中,  $\text{var}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \text{var}(\mathbf{n})$ ;  $I(\mathbf{y}; \mathbf{x})$  为平均互信息;  $H(\mathbf{y})$  为接收信号  $\mathbf{y}$  的熵;  $H(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  为接收信号  $\mathbf{y}$  的条件熵;  $\text{var}(\mathbf{y})$  为接收信号的方差,  $\text{var}(\mathbf{n})$  为高斯白噪声的方差  $\sigma_n^2$ 。假设发射信号向量各元素为独立同分布的复高斯变量并且与接收端噪声不相关, 则

$$\text{var}(\mathbf{y}) = \text{var}(\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}) = E[\mathbf{H}\mathbf{x}\mathbf{x}^T \mathbf{H}^T] + E[\mathbf{nn}^T] \quad (10)$$

将  $\mathbf{H} = \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{U}$  代入式(10)中, 有

$$\text{var}(\mathbf{y}) = \mathbf{R}^{1/2} E[\mathbf{U}\mathbf{x}(\mathbf{U}\mathbf{x})^T] \mathbf{R}^{1/2} + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N \quad (11)$$

再将式(11)代入式(9)中, 可以得到系统信道容量为

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \det \left( \frac{\mathbf{R}^{1/2} E[\mathbf{U}\mathbf{x}(\mathbf{U}\mathbf{x})^T] \mathbf{R}^{1/2} + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N}{\sigma_n^2 \mathbf{I}_N} \right) \quad (12)$$

为了求得信道容量闭式解, 关键问题是得到  $E[\mathbf{U}\mathbf{x}(\mathbf{U}\mathbf{x})^T]$ 。(见本文附录)

$$E[\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^T] = \begin{bmatrix} M\sigma^2 & & & & & & & & \\ & M\sigma^2 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & & M\sigma^2 & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & M\sigma^2 \end{bmatrix}$$

将其代入式(12)中并将  $\mathbf{R}$  进行特征值分解得

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \det \left[ \mathbf{I}_N + V \Lambda_R V^T \frac{E(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^T)}{\sigma_n^2 \mathbf{I}_N} \right] \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \log_2 \left( 1 + \lambda_i M \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2} \right) \quad (14)$$

式中  $A_R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \lambda_{N-1} & \\ & & & & \lambda_N \end{bmatrix}$ ,  $\lambda_i, i=1, \dots, N$  为接收相

关矩阵  $R$  的特征值, 由式(8)可计算得出。 $\sigma^2$  为发射信号方差, 已知为  $\sigma^2 = P/M$ 。所以式(14)可以简化为

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \log_2 (1 + \lambda_i \kappa) \quad (15)$$

式中,  $\kappa = P/\sigma_n^2$ 。

从上式可看出, MIMO 系统可以建模为一组并行的独立子信道, 各子信道的容量为  $\log_2 (1 + \lambda_i \kappa)$ 。它主要是由接收相关矩阵的特征值决定。而接收相关矩阵特征值取决于接收天线间距和散射角的大小。因此下面主要分析接收相关矩阵, 观察系统信道容量与天线间距及散射角大小间的关系。

为了分析方便, 假设接收信号的平均到达方向  $\varphi = 0$ 。式(5)可以简化为

$$R(d) = \text{sinc}((2\pi d/\lambda)A) \quad (16)$$

图 1 给出了相关系数与天线间距及散射角大小间的关系。从图中可以看出散射角越大, 接收相关系数达到最小值所需的天线间距就越小。由式(16)可得使接收相关最小的天线间距  $d_{\min} \approx 1/(2A)$ 。此时, MIMO 系统的信道容量达到最大值。

随着接收天线数的增加, 各接收天线间距减小, 接收相关系数也有变化。但接收相关系数幅度很小。通常当相关系数  $< 0.3$  时<sup>[4]</sup>, 对系统的信道容量及性能影响很小。这意味着接收天线数增加到一定程度时, 信道矩阵的非零特征值数及大小(即独立信道数)基本趋于恒定, 系统的信道容量达到饱和, 再增加天线数对信道容量影响很小。

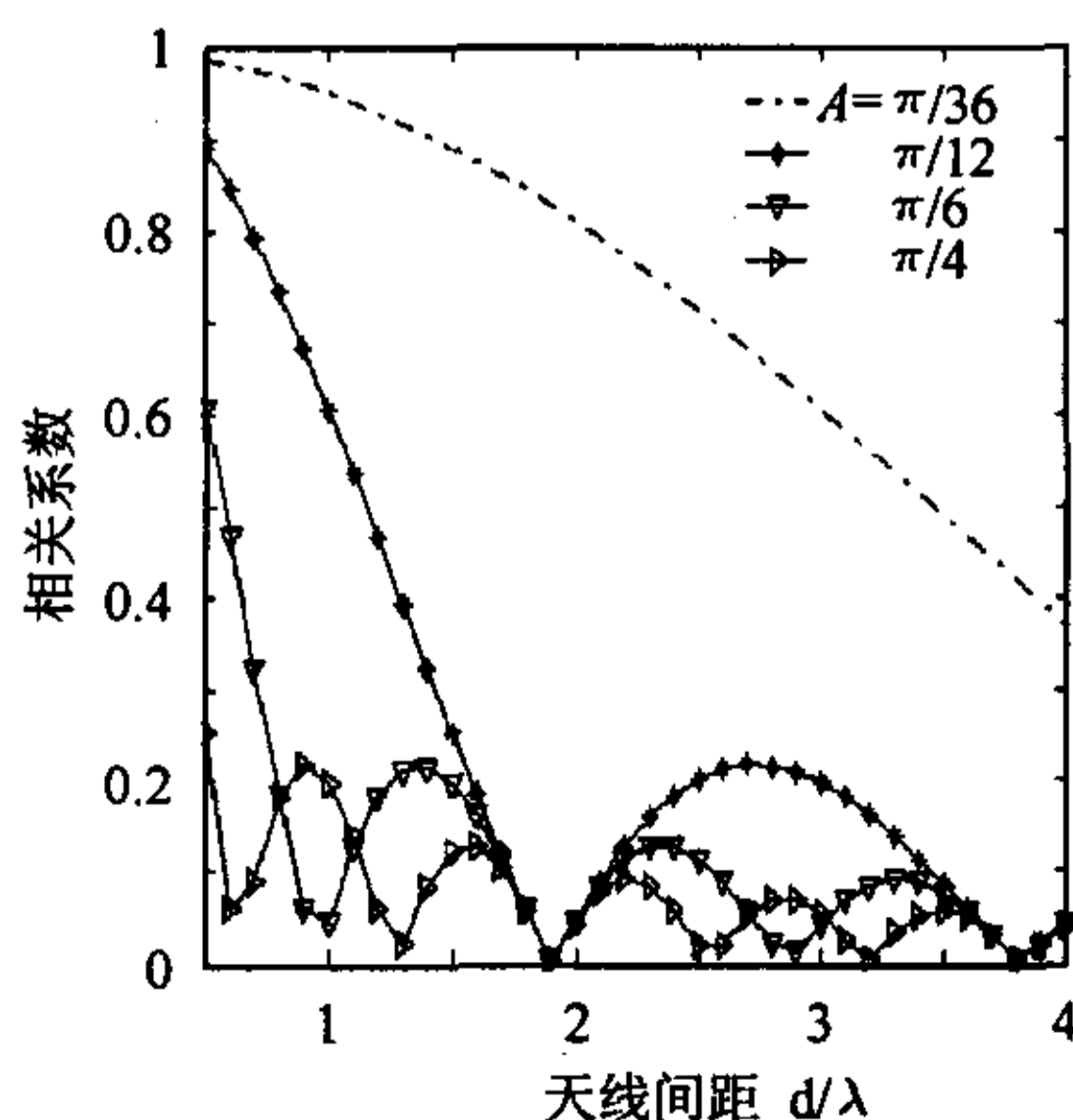


图 1 相关系数与天线间距及散射角的关系

### 4 仿真结果与分析

图 2 给出了信道容量与天线数、散射角大小间的关系。UCA 天线阵半径为  $r = 0.5\lambda$ , 信噪比  $\text{SNR} = 20\text{dB}$ 。我们只考虑接收相关, 接收相关系数  $R$  由式(5)计算。从图 2 可以看出, 在接收端空间一定的情况下, 由于衰落相关的影响, 信道容量与天线数并不完全为线性关系。如图 2 所示, 无论散射角大小如何, 每一条曲线都由两部分组成: 一段直线和一段曲线。这说明接收空间(即  $r$ )一定时, 天线数增大到一定程度后信道容量达到饱和。再增大天线数对信道容量影响很小。对比图 1 和图 2 可知, 散射角越大, 衰落间的相关系数会有一定程度的下降。随着散射角的增大, 信道容量也逐渐增大。

图 3 给出了信道容量与信噪比、天线数、散射角大小间的关系。UCA 天线阵半径为  $r = 0.5\lambda$ 。从图中可以看出, 天线数相同时, 散射角越大, 信道容量随信噪比增大幅度越明显。散射角大小一定, 天线数越大信道容量随信噪比变化越明显。这说明, 当散射环境一定时, 特别是对于室内无线局域网, 适当地增加天线数可以大幅度提高信道容量。对于室外环境, 散射角的大小对信道容量的影响也很明显。因此, 根据不同的环境选择合适的天线数显得尤为重要。

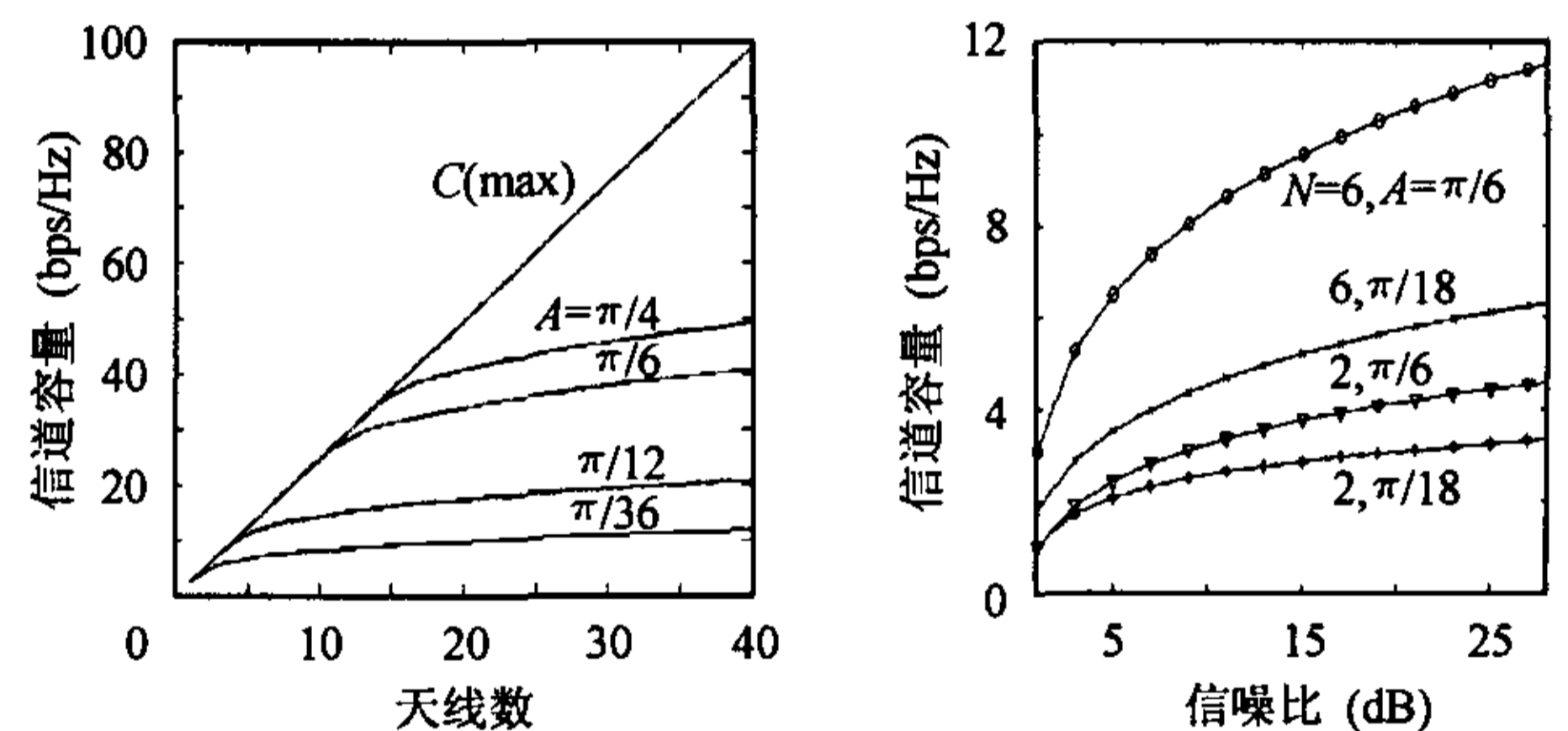


图 2 信道容量与天线数关系 图 3 信道容量与接收信噪比关系

### 5 结论

本文主要讨论了接收端放置天线空间有限的情况下, 衰落相关性对 MIMO 系统信道容量的影响。文中采用了 UCA 接收天线阵, 构建了 MIMO 系统衰落相关的数学模型。根据随机理论推导了 MIMO 系统信道容量的闭式表达。分析了散射角大小与天线数对信道容量的影响。仿真结果证明, 当接收端空间有限时, 天线数增大到一定程度信道容量达到饱和。散射角的大小直接影响到衰落相关系数的大小。从仿真结果可看出, 散射角对信道容量的影响比较明显。

### 附录 $E[Ux(Ux)^T]$ 的推导过程

文献[7]所述定理如下: 设二维连续随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y)$ , 函数  $\begin{cases} u = g_1(x, y) \\ v = g_2(x, y) \end{cases}$  有唯一的反函数

$\begin{cases} x = h_1(u, v) \\ y = h_2(u, v) \end{cases}$  且反函数有连续的一阶偏导数, 则随机变量

$Z_1 = g_1(X, Y), Z_2 = g_2(X, Y)$  的联合概率密度为

$$\Psi(u, v) = \begin{cases} f[h_1(u, v), h_2(u, v)]|J|, & (u, v) \in D \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中  $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \end{vmatrix}$  是函数  $x = h_1(u, v), y =$

$h_2(u, v)$  的雅可比行列式,  $D = \{(u, v) | u = g_1(x, y), v = g_2(x, y)\}$ 。

$$\text{这里 } \Omega = Ux = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1M-1} & u_{1M} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2M-1} & u_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{N-11} & u_{N-12} & \cdots & u_{N-1M-1} & u_{N-1M} \\ u_{N1} & u_{N2} & \cdots & u_{NM-1} & u_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{M-1} \\ x_M \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1M-1}x_{M-1} + u_{1M}x_M \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + \cdots + u_{2M-1}x_{M-1} + u_{2M}x_M \\ \vdots \\ u_{N-11}x_1 + u_{N-12}x_2 + \cdots + u_{N-1M-1}x_{M-1} + u_{N-1M}x_M \\ u_{N1}x_1 + u_{N2}x_2 + \cdots + u_{NM-1}x_{M-1} + u_{NM}x_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix} \quad (\text{A-1})$$

假设矩阵  $U$  和  $x$  的各元素间相互独立, 有

$$E[\Omega\Omega^T] = E \begin{bmatrix} a_1 a_1^* & & & & \\ & a_2 a_2^* & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{N-1} a_{N-1}^* & \\ & & & & a_N a_N^* \end{bmatrix} \quad (\text{A-2})$$

因此为了得到  $E[\Omega\Omega^T]$ , 必须求出  $z = xy \quad x \sim N(0, 1) \quad y \sim N(0, \sigma^2)$  的概率密度函数。

由定理可得

$$\left. \begin{matrix} u = xy \\ v = x \end{matrix} \right\} \quad (\text{A-3})$$

其反函数为

$$\left. \begin{matrix} y = u/v \\ x = v \end{matrix} \right\} \quad (\text{A-4})$$

据式(A3)和式(A4)可得函数  $x$  和  $y$  的雅可比行列式为

$$J = \begin{vmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v}, \text{ 从而可以得到 } z = xy \text{ 的概率密度为}$$

$$f_z(u) = \frac{1}{\pi\sigma} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2 v^2}\right) \frac{1}{v} dv \quad (\text{A-5})$$

由上面的分析我们可以求取  $z$  的方差:

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{\pi\sigma} \int_{-\infty}^\infty u^2 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2 v^2}\right) \frac{1}{v} dv du$$

经运算及化简可得

$$\sigma_z^2 = \sigma^2 \quad (\text{A-6})$$

所以

$$E[\Omega\Omega^T] = \begin{bmatrix} M\sigma^2 & & & & \\ & M\sigma^2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & M\sigma^2 & \\ & & & & M\sigma^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-7})$$

### 参 考 文 献

- [1] Foschini G J. Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi-element antennas[J]. *Bell Labs Technical Journal*, 1996, 2(3): 41 - 59.
- [2] Foschini G J, Gans M J. On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas [J]. *Wireless Personal Communications*, 1998, 6(3): 311 - 335.
- [3] Chuah C N, Tse D, Kahn J M, et al.. Capacity scaling in MIMO wireless systems under correlated fading [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2002, 48(3): 637 - 651.
- [4] Salz J, Winters J H. Effect of fading correlation on adaptive arrays in digital mobile radio [J]. *IEEE Trans. on VT*, 1994, 43(4): 1049 - 1057.
- [5] Gray R M. On the asymptotic eigenvalue distribution of Toeplitz matrices [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1972, 18(6): 725 - 730.
- [6] Rapajic P B. Information capacity of the space division multiple access mobile communication system [J]. *Wireless Personal Communications*, 1999, 11(1): 131 - 159.
- [7] 孙荣恒. 应用概率论[M]. 北京: 科技出版社, 1998: 165 - 168.

王 君: 男, 1975 年生, 博士生, 现主要从事多天线系统信道与信道容量及多用户检测等方面的研究。

朱世华: 男, 1950 年生, 教授, 博士生导师, 1987 年获英国 ESSEX 大学电子系统工程博士学位, 现主要从事移动通信、数字传输和程控交换等方面的研究。

王 磊: 女, 1977 年生, 博士生, 现主要从事 MIMO 系统信道容量以及空时编码等方面的研究。