第 22 卷 第 6 期
2000 年 11 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol.22 No.6
Nov. 2000

三维电磁波体积分方程的快速多极子算法 [1]

陈晓光　　金亚秋

(复旦大学 波散射和遥感中心 电子工程系 上海 200433)

摘　要　该文提出用快速多极子方法 (FMM) 求解三维非均匀介质散射体的电磁散射，将以往边界方程的 FMM 推广到三维矢量电磁波体积分方程 (3DV-FMM)，推导了一级和多级快速多极子的三维体积分离散公式．这一方法减少了计算机存储要求，并从量级上降低了共轭梯度迭代求解的矩量法的计算量．在计算中，选用 δ 函数作基函数，达到相当好的收敛性．本文用 3DV-FMM 数值计算了三维均匀和非均匀介质立方体，多个介质体的双站散射截面 (RCS)，以及任一剖面上的等效电流体密度分布．计算结果与矩量法相吻合，但在计算内存和 CPU 时间上要节省得多．本文的方法也可为三维电磁波逆散射的反演算法研究给出正向模拟的快速计算．

关键词　三维积分方程，快速多极子算法，数值结果

中图号　TN011

1 引　言

任意形状的三维电磁散射体散射场的数值建模、及其快速而精确的求解，是电磁散射与逆散射研究中的关键问题之一．它涉及到许多应用领域，譬如，遥感与通信、目标识别、非破坏性检测、地球物理探测、以及复杂介质微波成像等。由于积分方程法满足电磁场的辐射条件，所以在许多应用领域，人们习惯采用矩量法 (MM) 求解．然而， MM 的数值离散将产生一个满阵，对三维矢量场来说，需要大量的内存和 CPU 时间，从而限制它的广泛应用．

近十年来，快速多极子方法 (FMM) 在求解边界积分方程方面得到迅速地发展．1992 年，Rokhlin 将 FMM 方法应用于二维电大尺寸无限长导体柱的电磁散射问题 [1]．随后，Coifman，Rokhlin 等在 1993 年提出了三维电磁波 FMM 边界积分方程理论 [2]． Song 和 Chew1995 年完成了三维导体电磁散射的 FMM 边界积分方程的数值计算 [3]． 同年， Michael[4] 等在理论上又将其进一步完善．近来，多级快速多极子算法 (ML-FMM) 进一步减少了计算复杂性以及对计算机的存储要求，越来越受到人们的重视 [5,6]．特别地，在 Chew 及其课题组的努力下，推出了应用 ML-FMM 计算导体目标雷达散射截面 (RCS) 的软件 FISC[7]，成功地计算了 VFY218 型飞机的 RCS ，引起了人们的关注．但是，这些 FMM 方法均只限于边界积分方程，只能计算导体的 RCS ．

FMM 方法是计算 N 个源的集合在 N 个场点处所产生的远距作用．先对所有的未知量进行分组，然后再对邻近组和远距组采用不同算法．邻近组之间的相互作用仍由 MM 求解，但远距组之间的相互作用则用 FMM 处理．它涉及聚合、转化和配置三种计算过程．聚合就是计算各组中所有子散射体在组中心的总场，转化是将一个组中心的场作用于另一个组中心，配置是将该组中心处所有的场之和重新分配到每一个子散射体上．它有效地将 MM 中的满阵转化成稀疏矩阵，从而有效地加快了矩阵的迭代求解速度，并降低了对计算机存储要求．

本文将以往求解边界积分方程的 FMM 方法直接推广到电磁波体积分方程的求解，推导了一级和多级快速多极子的三维体积分离散公式，从而得到计算三维介质体散射的三维

[1] 1998-12-31 收到， 1999-09-23 定稿

国家自然科学基金 49831060 ， 69771007，国家教育部博士点基金，中国博士后基金，上海科技研究与发展基金等资助项目

电磁波体积分方程的快速多极子方法 (3DV-FMM) . 本文给出三维均匀和非均匀介质体的 3DV-FMM 电磁散射计算实例，与 MM 方法作了比较，验证了这种方法的可行性.

2 三维散射体离散化体积分方程

当平面电磁波 $\overline{E}_i$ 照射到一个任意形状的三维非均匀介质体上，整个空间的散射场 $\overline{E}_s$ 的分布可通过体积分求出. 一般地，用等效的体电流密度 $\overline{J}(\overline{r})$ 代替非均匀介质的散射体. 根据等效原理，一个具有复电介质系数 ε 的散射体，其等效电流密度可写成

$$\overline{J}(\overline{r}) = j\omega[\varepsilon(\overline{r}) - \varepsilon_0]\overline{E}(\overline{r}), \tag{1}$$

其中 ω 是圆频率 (在本文中，采用时谐因子 $e^{j\omega t}$) ， ε_0 是真空介电常数， $\overline{r}$ 是场的空间位置. $\overline{E}(\overline{r})$ 是空间 $\overline{r}$ 处的总场，它满足下式:

$$\overline{E}(\overline{r}) = \overline{E}_i(\overline{r}) + \overline{E}_s(\overline{r}). \tag{2}$$

由 Maxwell 方程和等效源方程 (1) 式，电磁波的体积分方程可以写成 [8]

$$\overline{E}_i(\overline{r}) = \text{p.v.} \int \overline{J}(\overline{r})\overline{\overline{G}}(\overline{r},\overline{r})\mathrm{d}v + D(\overline{r})\overline{J}(\overline{r}), \qquad \overline{r} \in V, \tag{3}$$

其中自由空间的并矢格林函数:

$$\overline{\overline{G}}(\overline{r},\overline{r}') = -j\omega\mu_0 \left(\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right) \frac{e^{-jk|\overline{r}-\overline{r}'|}}{4\pi|\overline{r}-\overline{r}'|}, \tag{4}$$

这里 p.v. 代表主值积分，单位并矢 $\overline{\overline{I}} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}$ 以及

$$D(\overline{r}) = -\frac{\varepsilon_r(\overline{r}) + 2}{3j\omega[\varepsilon(\overline{r}) - \varepsilon_0]}. \tag{5}$$

这里 ε_r 是相对介电常数 $(= \varepsilon/\varepsilon_0)$, $\overline{r}$ 和 $\overline{r}'$ 分别代表场点和源点的矢量位置， $k^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$. 由于散射体的复杂性，一般难以有 $\overline{E}(\overline{r})$ 的解析解，只能通过数值离散化计算求解. 现将散射体的体积 V 离散成 N 个体积单元 $v_1, v_2, \cdots, v_N$, 那么， (1) 式可展成一系列基函数的叠加:

$$\overline{J}(\overline{r}) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{q=1}^{3} J_n^q \overline{B}_n^q(\overline{r}), \tag{6}$$

其中基函数

$$\overline{B}_n^q(\overline{r}) = \hat{x}_q B_n^q(\overline{r}) = \hat{x}_q P_n(\overline{r}), \tag{7}$$

$$P_n(\overline{r}) = \begin{cases} 1, & r \in v_n, \\ 0, & r \notin v_n. \end{cases} \tag{8}$$

这里 $\hat{x}_q$ 是单位矢量，即在直角坐标系内 $\hat{x}_1 = \hat{x}, \hat{x}_2 = \hat{y}, \hat{x}_3 = \hat{z}$. 把 (6) 式代入方程 (3) 式，并在每个单元中心点匹配，可以得到以下第 $e(e = 1, 2, \cdots, N)$ 个未知量所满足的矩阵方程:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{q=1}^{3}\sum_{q'=1}^{3} \hat{x}_q J_n^q G_n^{qq'}(\overline{r}_n, \overline{r}'_e) + D(\overline{r}_e)\sum_{i=1}^{3} J_e^i \hat{x}_i = \sum_{i=1}^{3} E_e^i \hat{x}_i, \qquad e \in N, \tag{9}$$

其中 $G_n^{qq'}$ 是指第 n 个单元的第 qq' 的并矢格林函数值。(9) 式可以采用共轭梯度方法迭代求解，它的运算为量 $O(N^2)$ 。

3 3DV-FMM 解法

首先，将散射体离散成一系列子散射体，并将其分成一系列组。根据任意子散射体所在的组与其它子散射体所在组之间的距离大小，来确定采用不同的计算方法。假定某一个常数 a 为邻近组之间的最大距离，由此可以确定多少个邻近组和远距组。与边界积分方程不同的是，邻近组的中心将分布在半径为 a 的球体内。三维电标量格林函数的加法定理写为

$$\frac{e^{-jk|\overline{d}+\overline{R}|}}{|\overline{d}+\overline{R}|} \approx -jk\sum_{l=0}^{M}(-1)^l\cdot(2l+1)j_l(kd)h_l^{(2)}(kR)P_l(\hat{d}\cdot\hat{R}), \tag{10}$$

其中 j_l 是第 l 阶球贝塞尔函数，$h_l^{(2)}$ 是第 l 阶球汉克尔函数，P_l 是 l 阶勒让德多项式，$\overline{R}$ 和 $\overline{d}$ 是位移矢量，$\hat{R}$ 和 $\hat{d}$ 是单位矢量，且 $d<R$ 。(10) 式中的最大模数 M 取决于 d 和 R 的比率，以及计算精度的要求。

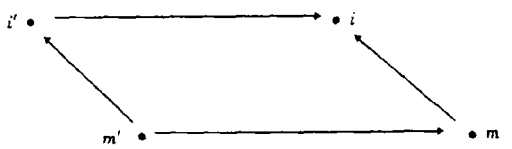

图 1　源、场及其所在的组的基本几何关系

假定 i' 代表源点，m' 属于源点所在的组，i 是场点，m 是该场点所在的组，如图 1 所示。根据矢量运算规则，从 i' 到 i 的矢量 $\overline{r}_{ii'}$ 满足下列方程：

$$\overline{r}_{ii'}=\overline{r}_i-\overline{r}_{i'}=\overline{r}_{im}+\overline{r}_{mm'}-\overline{r}_{i'm'}. \tag{11}$$

若选取

$$\overline{d}=\overline{r}_{im}-\overline{r}_{i'm'},\qquad \overline{R}=\overline{r}_{mm'}, \tag{12}$$

则有

$$\overline{d}+\overline{R}=\overline{r}_{im}+\overline{r}_{mm'}-\overline{r}_{i'm'}. \tag{13}$$

而 (10) 式中右边的 $j_l(kd)P_l(\hat{d}\cdot\hat{R})$ 用平面波表示 [2,4]：

$$4\pi(-j)^n j_l(kd)P_l(\hat{d}\cdot\hat{R})=\int\int_{\hat{S}}e^{-j\overline{k}\cdot\overline{d}}P_l(\hat{k}\cdot\hat{R})\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi, \tag{14}$$

式中 $\hat{S}$ 是单位球，满足下列关系：

$$(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)=\hat{S},\quad \|\hat{S}\|=1. \tag{15}$$

将 (15) 式代入 (10) 式，并交换积分与求和符号，得到

$$\begin{aligned}\frac{e^{-jk|\overline{d}+\overline{R}|}}{4\pi|\overline{d}+\overline{R}|}&\approx\frac{-jk}{(4\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-j\overline{k}\cdot\overline{d}}\sum_{l=0}(-j)^l\cdot(2l+1)h_l^{(2)}(kr_{mm'})\times P_l(\hat{k}\cdot\hat{r}_{mm'})\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-j\overline{k}\cdot\overline{d}}T_{mm'}(\hat{k}\cdot\hat{r}_{mm'})\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $T_{mm'}(\hat{k}\hat{r}_{mm'})$ 是 m 组与 m' 组之间相互作用的转化因子，有

$$T_{mm'}(\hat{k}\cdot\hat{r}_{mm'}) = -\frac{k}{(4\pi)^2}\sum_{l=0}^{M}(-j)^l\cdot(2l+1)h_l^{(2)}(kr_{mm'})P_l(\hat{k}\cdot\hat{r}_{mm'}). \tag{17}$$

(4) 式可写成

$$\overline{\overline{G}}(\overline{r},\overline{r}') = -\omega\mu_0\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\delta_{qq'}\overline{\overline{I}}-\hat{k}_q\hat{k}_{q'})e^{-j\overline{k}\cdot\overline{d}}T_{mm'}(\hat{k}\cdot\hat{r}_{mm'})\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi, \tag{18}$$

其中 $q,q'=1,2,3$ 分别代表场点与源点在直角坐标系中的三个分量. 当 $q=q'$ 时，$\delta_{qq'}=1$；当 $q\neq q'$ 时，$\delta_{qq'}=0$.

对于远距组之间的相互作用，(3) 式右端只存在主值积分这一项，用 $\overline{f}(\overline{r})$ 表示，由 (18) 式写出

$$\overline{f}(\overline{r}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sum_{m'=1}^{M}\overline{v}_{m'}(\hat{k})T_{mm'}(\hat{k}\cdot\hat{r}_{mm'})e^{-j\overline{k}\cdot\overline{r}_{im}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi, \tag{19}$$

其中 $\overline{v}_{m'}(\hat{k})$ 可称为聚合因子，且有

$$\overline{v}_{m'}(\hat{k}) = -\omega\mu_0\sum_{i'=1}^{N_a}\int\sum_{q=1}^{3}\sum_{q'=1}^{3}\hat{u}_{q'}\cdot J_{i'}^{q'}(\delta_{qq'}\overline{\overline{I}}-\hat{k}_q\hat{k}_{q'})\exp(j\overline{k}\cdot\overline{r}_{i'm'})\mathrm{d}v, \tag{20}$$

式中 N_a 是源组中的总单元数. (19) 式是基本 3DV-FMM 体积分公式.

对于边界积分方程，可以用多级的快速多极子算法 (ML-FMM) 求解，同样，体积分方程求解，也可以采用类似的方法. 把离散的方程 (9) 式改写成矩阵形式，有

$$\overline{\overline{Z}}\cdot\overline{I} = \overline{V}, \tag{21}$$

其中 $\overline{\overline{Z}}$ 为阻抗，$\overline{I}$ 为电流，$\overline{V}$ 为电压. 而阻抗矩阵 $\overline{\overline{Z}}$ 可以展开为

$$\overline{\overline{Z}} = \overline{\overline{Z}}_{1\mathrm{NF}} + \overline{\overline{Z}}_{1\mathrm{FF}}, \tag{22}$$

其中 $\overline{\overline{Z}}_{1\mathrm{NF}}$, $\overline{\overline{Z}}_{1\mathrm{FF}}$ 分别是一阶邻近组 (NF) 和远距组 (FF) 的阻抗. 同样，阻抗矩阵 $\overline{\overline{Z}}_{1\mathrm{NF}}$ 又可以进一步分解为

$$\overline{\overline{Z}}_{1\mathrm{NF}} = \overline{\overline{Z}}_{2\mathrm{NF}} + \overline{\overline{Z}}_{2\mathrm{FF}}, \tag{23}$$

其中 $\overline{\overline{Z}}_{2\mathrm{NF}}$, $\overline{\overline{Z}}_{2\mathrm{FF}}$ 分别是二级邻近组和远距组的阻抗. 以此向下分解，最后得

$$\overline{\overline{Z}}_{N-1,\mathrm{NF}} = \overline{\overline{Z}}_{N,\mathrm{NF}} + \overline{\overline{Z}}_{N,\mathrm{FF}}, \tag{24}$$

即第 $N-1$ 级的邻近组阻抗等于第 N 级邻近组和远距组的阻抗之和. 经整理，得到

$$\overline{\overline{Z}} = \overline{\overline{Z}}_{N,\mathrm{NF}} + \sum_{i=1}^{N}\overline{\overline{Z}}_{i\mathrm{FF}}. \tag{25}$$

那么，对于任一个场点 $\bar{r}$, 所有源点对场点 $(\bar{r})$ 的贡献可写成

$$\begin{aligned}\bar{f}(\bar{r}) = &\sum_{e=1}^{N_b}\sum_{q=1}^{3}\sum_{q'=1}^{3}\hat{\mu}_q J_e^{q'} G_e^{qq'}(\bar{r}_e,\bar{r}') + D(\bar{r})\sum_{i=1}^{3} J_e^i \hat{\mu}_i \\ &+ \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sum_{m'1=1}^{M1}\bar{v}_{m'1}(\hat{k})T_{m1,m'1}(\hat{k}\cdot\hat{r}_{m1,m'1})e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}_{im1}}\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &+ \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sum_{m'2=1}^{M2}\bar{v}_{m'2}(\hat{k})T_{m2,m'2}(\hat{k}\cdot\hat{r}_{m2,m'2})e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}_{im2}}\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &+ \cdots \\ &+ \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sum_{m'n=1}^{Mn}\bar{v}_{m'n}(\hat{k})T_{mn,m'n}(\hat{k}\cdot\hat{r}_{mn,m'n})e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}_{imn}}\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,\end{aligned} \tag{26}$$

其中 N_b 表示第 N 级的邻近组所有单元之和， $m1, m'1, m2, m'2, mn, m'n$ 分别为各级源、场点所在的组． $M1, M2, Mn$ 分别为各级组的数目． v, T 分别是聚合因子和转化因子．(26) 式是体积分方程的多级快速多极子的一般表达式．

根据矢量运算规则，可以很容易导出各级组中各层聚合因子之间关系：

$$\bar{v}_{m'n-1}(\hat{k}) = \sum_{m'n}^{Mn}\exp(j\bar{k}\cdot\bar{r}_{m'n-1,m'n})\bar{v}_{m'n}(\hat{k}), \tag{27}$$

式中 $\bar{r}_{m'n-1,m'n}$ 表示第 $n-1$ 级组中心到 $m'n$ 级组中心的距离．这样，(26) 式也可以写成多级多层快速多极子公式．那么，第 N 级 ML-FMM 的运算量为 $O(N^{N-1/N})$ ．

3DV-FMM 的求解思路与边界积分的相似，但是，由于体等效电流的存在，(3) 式右边增加了一项．随着频率的增加，该项系数 $D(\bar{r})$ 将相应地变小，直接地影响整个算子的收敛性．针对高频计算，算子预条件化技术仍然是有效的 [9] ．如果将 (21) 式转化成

$$\overline{M}^{-1}\cdot\overline{\overline{Z}}\cdot\bar{I} = \overline{M}^{-1}\cdot\bar{V}, \tag{28}$$

那么，(21) 式与 (28) 式具有同样的解，但是 (28) 式系数矩阵的谱具有更优越的特性．式中 $\overline{M}^{-1}$ 叫做预条件化因子．假定矩阵 $\overline{\overline{Z}}$ 具有块结构，且能进一步分解成

$$\overline{\overline{Z}}\cdot\bar{I} = (\overline{\overline{Z}}_0 + \overline{\overline{Z}}_1)\cdot\bar{I} + \overline{\overline{Z}}_2\cdot\bar{I}, \tag{29}$$

其中矩阵 $\overline{\overline{Z}}_0, \overline{\overline{Z}}_1$ 表示邻近组各单元之间的相互作用，由矩量法直接求解，且 $\overline{\overline{Z}}_0$ 就是块对角化部分．矩阵 $\overline{\overline{Z}}_2$ 表示远距相互作用， $\overline{\overline{Z}}_2\cdot\bar{I}$ 由 FMM 求解．选择 $\overline{\overline{Z}}_0$ 为预条件化因子，有

$$\overline{\overline{Z}}_0^{-1}\cdot\overline{\overline{Z}}\cdot\bar{I} = \bar{I} + \overline{\overline{Z}}_0^{-1}\cdot(\overline{\overline{Z}}_1\cdot\bar{I} + \overline{\overline{Z}}_2\cdot\bar{I}). \tag{30}$$

因为 $\overline{\overline{Z}}_0$ 可由上下三角形矩阵变换用 $\overline{\overline{Z}}_0^{-1}$ 来表示，在每次矩阵相乘时，块对角预条件化无需额外存储与 CPU 时间．

4 数值计算与讨论

为了验证上面的数值方法，我们首先考虑一个均匀介质立方体的平面波散射问题，其边长为 0.25λ, 相对介电常数 $\varepsilon_r = 4.0$, 背景介质为自由空间，平面波的频率 $f = 300\text{MHz}$ 。立方体被分成 512 个相等的子立方体，对于基本 FMM 算法来说，共分成 64 组，每组有 8 个相等的子立方体，在一个半径 $0.5a(a = 0.25\lambda)$ 的球内，各组之间关系可视为邻近组，反之，则为远距组。由我们的 3D-FMM 与 MM 计算的结果两者几乎完全吻合，从而验证了 3DV-FMM 方法的有效性。在 585/166 微机上计算， MM 迭代一次需要 10s ，而 3DV-FMM 仅为 5s 。计算效率提高了一倍。随着未知数的逐渐增多，3DV-FMM 的快速高效的优点将更加突出。

但是，这两种算法得到的内场分布略有不同，这主要是由于 FMM 的分组所产生的误差。相对误差 E_r 可定义为：

$$Er = 10\log\left|\frac{J_i(\text{MM}) - J_i(\text{FMM})}{J_i(\text{MM})}\right|(\text{dB}), \tag{31}$$

式中 $J_i(\text{MM})$ ， $J_i(\text{FMM})$ 表示用矩量法和快速多极子方法分别计算第 i 点电流体密度。我们的计算表明在该立方体的中心内场计算相差较大，约有 -10dB 。

图 2 是一非均匀介质立方体，它的 x-y 剖面上具有四层不对称的介质分布，相对介电常数分别为 $\varepsilon_r = 2.0, 3.0, 4.0, 5.0$ 。图 3 给出沿 z 轴传播的 x 轴极化方向的平面波照射下，用 MM 和 3DV-FMM 计算得到该非均匀介质立方体的双站 RCS 。平面波的频率 $f = 300\text{MHz}$ 。图中实线是 MM 结果，实心点是 3DV-FMM 的结果。从图中可以看出，两种算法所得到的非均匀介质体外的散射场也是完全吻合的。

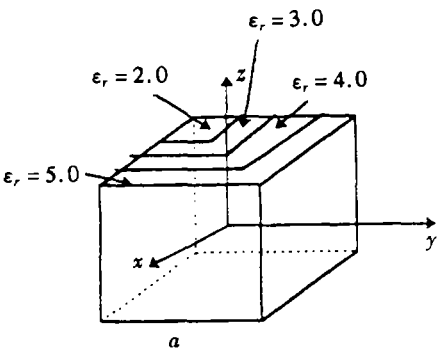

图 2 非均匀介质立方体

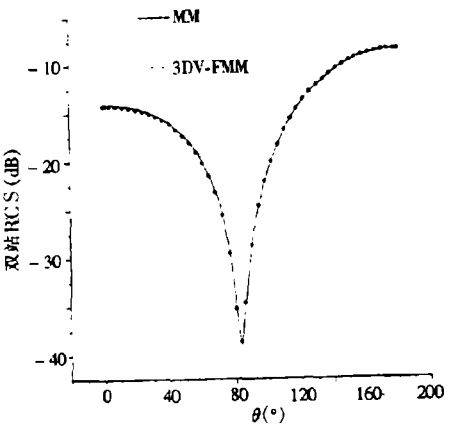

图 3 3DV-FMM 和 MM 计算的 RCS 比较

图 4(a), 4(b) 分别是用 MM 和 3DV-FMM 计算的 $z = 0$ 剖面上等电流密度分布。

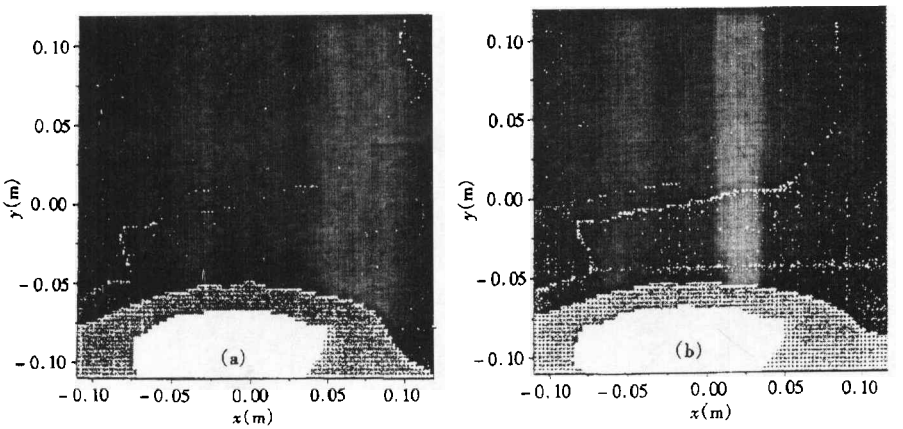

图 4　(a) MM 计算的 $z=0$ 的剖面上等体电流密度分布
(b) 3DV-FMM 计算的 $z=0$ 的剖面上等体电流密度分布

由这两种算法所得到 $z=0$ 剖面上的体电流密度分布的相对误差。与均匀介质体不同，这次在平行于 z 轴的正立方体四个棱上电流分布相差最大，约有 10dB 。

图 5 是 8 个相等的介质立方体的群目标，它们的中心连线构成一个大的立方体构造，边长 $d=20a$, 其中 a 为每一个小正方介质体边长 $(a=0.25\lambda)$ 。平面波的频率 $f=3.0\text{GHz}$ 。在计算中，将每一个小立方体剖分成 512 个单元，总共有 4096 个单元。采用多级多层 3DV-FMM 计算，其步骤如下：(1) 将每一个小立方体当作一级大组，(2) 再将每一个大组分 8 个二级小组，(3) 每一个小组共有 64 个单元。从而构成最简单的二级三层快速多极子算法。由于二级小组中单元较多，计算表明，不划分邻近组，即只存在本组和远距组，也可以达到相当高的计算精度。

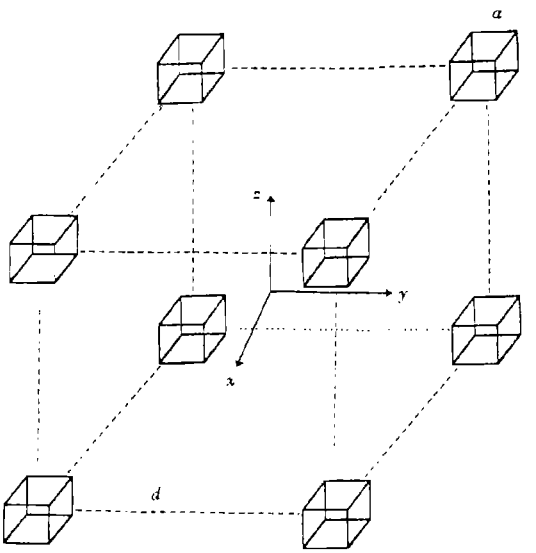

图 5　多个介质立方体的群目标 $(\varepsilon_r=4.0,\ a=0.25\lambda,\ d=20a)$

图 6 和图 7 分别是平面电磁波沿 z 轴入射时，x 轴极化方向和 y 轴极化方向的双站 RCS 。图中实线是 MM 结果，实心点是 3DV-FMM 的结果。两种算法的计算精度都在 10^{-5}

以下. MM 需要迭代 25 次，花费 5h . 3DV-FMM 仅需 19 次， 11min . 计算效率提高了 27 倍. 从图中可以看出，这两种算法的 RCS 计算结果几乎完全吻合.

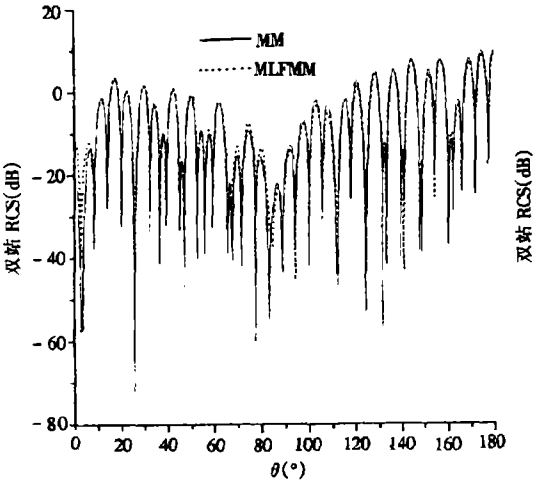

图 6 x 轴极化方向双站 RCS

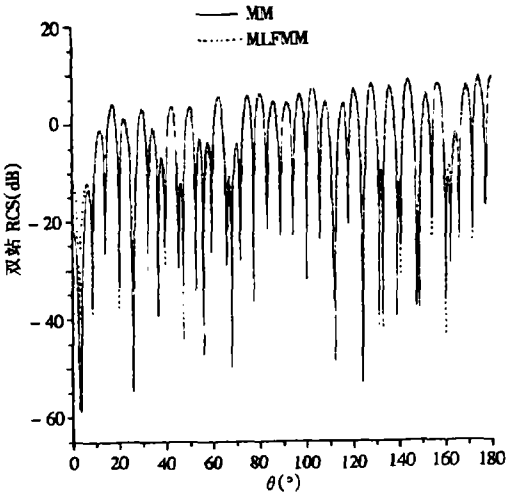

图 7 y 轴极化方向双站 RCS

5 结 论

本文提出了三维电磁波体积分方程的快速多极子算法 (3DV-FMM) . 对均匀和非均匀介质体，以及多个介质体的双站散射截面 (RCS) 进行了计算，结果与 MM 方法所得到的结果几乎完全吻合. 与 MM 方法相比， 3DV-FMM 的最大优点在于能够极大地节约计算机的内存和 CPU 时间，从而使一些复杂的电磁散射问题的求解成为可能. 而对散射体的内场 (或体电流) 计算，却存在着一定的误差，这主要是与散射体分组有关. 本文方法适于计算复杂形状构造、群目标以及非均匀介质体的电磁散射.

如何合理进行散射体单元的合理分组，是今后深入研究 3DV-FMM 的关键问题之一. 尽管如此， 3DV-FMM 的研究，可为三维电磁波逆散射的反演算法研究给出一个正向模拟的快速计算方法.

参 考 文 献

[1] Engheta N, Murphy W D, Rokhlin V, *et al.* The fast multipole method (FMM) for electromagnetic scattering problems. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 1992, AP-40(6): 634–641.

[2] Coifman R, Rokhlin V, Wandzura S. The fast multipole method for the wave equation: A pedestrian prescription. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 1993, 35(3): 7–12.

[3] Song J M, Chew W C. Multilevel fast-multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering. Microwave Opt. Technol. Lett., 1995, 10(1): 14–19.

[4] Epton M A, Dembart B. Multipole translation theory for the there-dimensional Laplace and Helmholtz equations. SIAM J. Sci. Comput., 1995, 16(4): 865–897.

[5] Sheng X Q, Jin J M, Song J M,*et al.* On the formulation of hybrid finite-element and boundary-integral method for 3-D scattering. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 1998, AP-46(3): 303–311.

[6] Zhao J S, Chew W C, Lu C C, *et al.* Thin-stratified medium fast-multipole algorithm for solving microstrip structures. IEEE Trans. on Microwave and Techniques Theory, 1998, MTT-46(4): 395–403.

[7] Song J M, Lu C C, Chew W C, *et al.* Fast Illinois solver code(FISC). IEEE Antennas and Propagation Magazine, 1998, 40(3): 27–34.

[8] Wang J J H, Dubberley J R. Computation of fields in an arbitrarily shaped heterogeneous dielectric or biological body by an interative conjugate gradient method. IEEE Trans. on Microwave and Techniques Theory, 1989, MTT-37(7): 1119–1125.

[9] Song J M, Lu C C, Chew W C. Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 1997, AP-45(10): 1488–1493.

THE FAST MULTIPOLE METHOD OF THREE DIMENSIONAL ELECTROMAGNETIC WAVE VOLUME INTEGRAL EQUATION(3DV-FMM)

Chen Xiaoguang Jin Yaqiu

(*Center for Wave Scattering and Remote Sensing Center, Fudan University, Shanghai* 200433)

Abstract In this paper, a Fast Multipole Method (FMM) is developed to solving the scattered fields from three dimensional (3D) inhomogeneous dielectric scatterers. This generalized FMM is applied to the volume integral equation (3DV-FMM). The discrete formula of the volume integral equation was derived by the basic FMM and multi-level FMM. The FMM approach significantly reduces both the complexity of a matrix-vector multiplying and memory requirement. In calculation, the delta function is chosen as the basis and perfect convergence to the FMM results is achieved. As a typical example, the bistatic RCS of cubic scatterers with homogeneous, or inhomogeneous permittivity is calculated numerically. Distribution of electric currents on the cross-section of a dielectric cube is also obtained. Comparing with conventional moment method, the results of 3DV-FMM are exactly matched. However, the computer memory and CPU time are greatly reduced by using the 3DV-FMM. This method is applicable to the forward numerical simulation for 3D electromagnetic inverse problem.

Key words 3-dimensional integral equation, FMM, Numerical results

陈晓光： 男，1964 年生，博士，现为复旦大学电子系博士后，从事电磁散射与逆散射、计算电磁学等方面的研究.

金亚秋： 男，1947 年生，1985 年获美国麻省理工学院博士学位. 教授，博士生导师，波散射和遥感中心主任. 主要研究领域为复杂介质中电磁散射与辐射传输，定量遥感理论，计算电磁学等. 已发表论文 210 篇，专著 3 部.