基于符号动力学的混沌信号处理研究

金文光[①] 王金铭[②]
[①](浙江大学信息与电子工程系 杭州 310028)
[②](浙江树人大学信息科技学院 杭州 310015)

摘 要 基于1-D分段线性映射函数构造的混沌系统符号动力学，该文研究了一种能直接对混沌符号序列进行加、减及乘法运算的方法。由两串符号序列之间的轨道距离定义推导并证明了相应的运算法则。通过FIR数字滤波器卷积和操作的计算机数值仿真表明，采用这些方法运算得到的结果与传统二进制算术编码算法完全等效，可应用于混沌信号处理系统。

关键词 混沌，符号动力学，信号处理
中图分类号：TM911.7 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2006)10-1774-04

Study on Chaotic Signal Processing with Symbol Dynamics

Jin Wen-guang[①] Wang Jin-ming[②]
[①](*Dept. of Information & Electronic Engineering, Zhejiang University, Hangzhou* 310028, *China*)
[②](*College of Information Science & Technology, Zhejiang Shuren University, Hangzhou* 310015, *China*)

Abstract Based on symbol dynamics in 1-D piecewise linear mapping chaotic systems, an arithmetic method processing chaotic signals is studied in the paper, including addition, subtraction and multiplication. The operational rules are calculated and proved according to a definition of the distance between two chaotic sequences. By computer simulation with convolution sum of FIR digital filter, the results show that the model is the same as traditional binary coding arithmetic, which can be used in chaotic signal processing systems.

Key words Chaos, Symbol dynamics, Signal processing

1 引言

目前混沌信号处理业已受到越来越多研究人员的注意，如混沌信号在信息存储检索、图像压缩等方面的应用。利用1-D分段线性映射函数构造的混沌系统在实现信息处理方面的研究已经取得了较大的进展[1-4]，其主要思想均是利用混沌系统中存在的大量不稳定极限环或稳定周期轨道来进行相应的信息处理，但并没有利用混沌系统产生的符号序列作为信息处理的对象。为有效地进行混沌态下的信息处理，文献[5]提出了利用混沌测量电路来实现“混沌”运算器的原理，为混沌信息数字化处理开辟了新的途径。

本文根据1-D分段线性映射函数的混沌轨道距离定义，提出了利用1-D分段线性映射函数所产生的混沌符号序列来进行加、减及相乘的算术运算方法。利用该运算模型能在符号空间直接实现信息处理的基本运算工具－卷积运算，从而便现有的一些信息处理方法可以用该混沌运算模型来进行处理，进而实现混沌态下信息处理的目的。

为验证该运算模型的可行性，本文构建了一FIR数字滤波器模型。仿真中首先对该数字滤波器的脉冲响应和激励输入加以符号化，即利用1-D分段线性混沌系统对模型参数和输入数据进行混沌符号编码，进而作相应的符号序列加、减及相乘运算，操作后得到的结果与直接采用十进制滤波运算得到的结果进行比较，来验证混沌运算模型的正确性。

2 混沌编码及序列运算基本原理

考虑以下锯齿映射：

$$X_{n+1}=g(X_n)=\begin{cases}-\lambda X_n+2, & X_n\in[1/\lambda,1]\\ -\lambda X_n+1, & X_n\in[0,1/\lambda,]\end{cases} \tag{1}$$

当参数 $1<\lambda\leqslant 2$ 时， 式(1)表现为混沌映射[6]。设函数值 $X_n\in[0,1/\lambda)$ 时，分配符号 $a_n=0$，反之 $a_n=1$，即

$$a_n=T(X_n)=\begin{cases}1, & X_n\in[1/\lambda,1]\\ 0, & X_n\in[0,1/\lambda,]\end{cases} \tag{2}$$

根据式(1)就可以将任一初值X_1编码成一串对应的符号序列：$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$。经简单推导，当 $n\to\infty$ 时，初值与符号序列的关系为

$$X_1=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1+a_i}{\lambda^i}(-1)^{i+1} \tag{3}$$

在系统参数 $\lambda=2$ 时，该映射函数为满映射，则初值空间 $A\in[0,1]$ 与符号空间 $\boldsymbol{S}$ 之间存在着一一对应关系，本文以下讨论都以参数 $\lambda=2$ 为条件。

展开式(3)，任取其中相邻两项可进一步得到如下关系:

2005-01-20 收到, 2005-06-13 改回

$$\frac{1+a_n}{2^n}(-1)^{n+1}+\frac{1+a_{n+1}}{2^{n+1}}(-1)^{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+a_n-1}{2^n}(-1)^{n+1}+\frac{1+a_{n+1}-2}{2^{n+1}}(-1)^{n+2} \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+a_n+1}{2^n}(-1)^{n+1}+\frac{1+a_{n+1}+2}{2^{n+1}}(-1)^{n+2} \tag{5}$$

从式(4)可知，对于低位第 $n+1$ 位的进位，等价于从高位第 n 位上减去“1”。同样由式(5)可知，如果存在向高位借位的情况，即等价于在高位上加上“1”。

3　混沌符号序列运算算法

当有初值为 x_1 所对应的符号序列 $\{a_i\}$ ($i=1,2,\cdots$)与初值为 y_1 所对应的符号序列 $\{b_i\}$ ($i=1,2,\cdots$)相加时，由式(3)可得：

$$x_1+y_1=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1+(1+a_i+b_i)}{2^i}(-1)^{i+1} \tag{6}$$

当然，$(x_1+y_1)\in[0,1]$，这是进行加法的先决条件。令 $s_i=1+a_i+b_i$，由于 $a_i,b_i\in\{0,1\}$，有 $s_i\in\{1,2,3\}$，而不是通常的 $\{0,1\}$。利用式(4)，式(5)所示的等价关系，将符号序列 $\{s_i\}$ 转化成 $\{0,1\}$ 范围内的符号序列 $\{c_i\}$。

若对第 i 进行转化时，低位 s_{i+1} 向本位 s_i 的进位 s_C_{i+1} 有 $\{-1,0,1,2\}$ 4 种情况，其中当 $s\_C_{i+1}<0$ 表示为借位；当 $s\_C_{i+1}>0$ 时为进位。根据 $s_i-s\_C_{i+1}$ 的差值，便有表 1 中第 1 列所示的情况。表中序列 $\{c_i\}$ 为转化的目标结果。

表 1　加法操作 $s_i\to c_i$ 的转化

Tab.1　Transformation of $s_i\to c_i$ in addition

$s_i-s\_C_{i+1}$	c_i	s_C_i	$s_{i-1}-s\_C_i$
−1	1	−1	$s_{i-1}-(-1)$
0	0	0	$s_{i-1}-0$
1	1	0	$s_{i-1}-0$
2	0	1	$s_{i-1}-1$
3	1	1	$s_{i-1}-1$
4	0	2	$s_{i-1}-2$

确定了一位符号的转化关系后，利用符号间的相互关系，可实现整串符号的转化。利用表 1 所示关系，易推得整个符号序列的转换关系：

$$\{c_i,s\_C_i\}=\begin{cases}\{0,s_i/2\}, & (s_i-s\_C_{i+1})<0 \\ & |s_i-s\_C_{i+1}|\bmod 2=0 \\ \{1,(s_i+1)/2-1\}, & (s_i-s\_C_{i+1})<0 \\ & |s_i-s\_C_{i+1}|\bmod 2\neq 0 \\ \{0,s_i/2\}, & (s_i-s\_C_{i+1})>0 \\ & |s_i-s\_C_{i+1}|\bmod 2=0 \\ \{1,(s_i-1)/2\}, & (s_i-s\_C_{i+1})>0 \\ & |s_i-s\_C_{i+1}|\bmod 2\neq 0\end{cases} \tag{7}$$

其中 $i=N,\cdots,(n+1),n,(n-1),\cdots,1$。

经过式(7)所示的处理得到 $c_i\in\{0,1\}$，即实现了利用两个混沌符号序列 $\{a_i\}$，$\{b_i\}$ 相加得到另一串符号序列 $\{c_i\}$：

$$x_1+y_1=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1+c_i}{2^i}(-1)^{i+1} \tag{8}$$

因此，通过以上混沌符号序列直接运算得到的符号序列 $\{c_i\}$ 与初值 (x_1+y_1) 直接迭代而获取的符号序列是一样的，记

$$\{c_i\}=f_1(\{a_i\}+\{b_i\}) \tag{9}$$

同理，当有两个符号串相减的情况时，则由式(3)可得两个符号序列相减的结果：

$$x_1-y_1=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i-b_i}{2^i}(-1)^{i+1} \tag{10}$$

其中要满足 $(x_1-y_1)\in[0,1]$。为演化出初值 (x_1-y_1) 所对应的符号序列，将式(10)进行简单的变化，如式(11)所示：

$$x_1-y_1=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1+(a_i-b_i-1)}{2^i}(-1)^{i+1} \tag{11}$$

对于式(11)，同样令 $s_i=a_i-b_i-1$，则 $s_i\in\{-2,-1,0,1\}$。利用 $s_i-s\_C_{i+1}$ 的差值，可得到表 2 所示第 i 位的转化关系：

表 2　减法操作 $s_i\to c_i$ 的转化

Tab.2　Transformation of $s_i\to c_i$ in subtraction

$s_i-s\_C_{i+1}$	c_i	s_C_i	$s_{i-1}-h\to\{s_h\}$
−3	1	−2	$s_{i-1}-(-2)$
−2	0	−1	$s_{i-1}-(-1)$
−1	1	−1	$s_{i-1}-(-1)$
0	0	0	$s_{i-1}-0$
1	1	0	$s_{i-1}-0$
2	0	1	$s_{i-1}-1$
3	1	1	$s_{i-1}-1$

利用式(7)所示的算法，可得到两串符号序列相减后的结果：

$$x_1-y_1=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1+c_i}{2^i}(-1)^{i+1} \tag{12}$$

记

$$\{c_i\}=f_2(\{a_i\}-\{b_i\}) \tag{13}$$

至此，推倒了初值加减所对应的符号序列可直接采用混沌符号序列运算得到。那么，乘法呢？也可用同样的方法得到。两个符号串相乘为

$$x_1\cdot y_1=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1+a_i}{2^i}(-1)^{i+1}\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1+b_i}{2^i}(-1)^{i+1}\right]$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1+S_i}{2^i}(-1)^{i+1} \tag{14}$$

其中 $S_i=\left[-\sum_{\substack{l=1\\k=1\\l+k=i}}^{\infty}(a_l+1)\cdot(b_k+1)\right]-1$。以上结果实际上是采用移位加得到的。再次利用式(7)可得到两个值相乘后所对应的符号串，表示成如式(3)所示形式：

$$x_1 \cdot y_1 = \frac{s\_C_2}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1+c_i}{2^i}(-1)^{i+1} \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+c_1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1+c_i}{2^i}(-1)^{i+1} \tag{16}$$

其中 $s\_C_2 = 1 + c_1$，可以采用反正法来证明整数 $c_1 \in \{0,1\}$。

证明 若 $c_1 \notin \{0,1\}$，则必有 $c_1 \le -1$ 或 $c_2 \ge 2$。由于有 $x_1, y_1 \in [0,1]$，则必有 $x_1 \cdot y_1 \in [0,1]$。同样，对于式(16)中的求和因子，有

$$0 \le \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1+c_i}{2^i}(-1)^{i+1} \le \frac{1}{2} \tag{17}$$

则当 $c_1 \le -1$ 时，必有

$$\frac{1+c_1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1+c_i}{2^i}(-1)^{i+1} < 0 \tag{18}$$

同理，当 $c_1 \ge 2$ 时，亦有

$$\frac{1+c_1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1+c_i}{2^i}(-1)^{i+1} > 1 \tag{19}$$

即分别有 $x_1 \cdot y_1 \le 0$ 或 $x_1 \cdot y_1 > 1$，这明显与 $x_1 \cdot y_1 \in [0,1]$ 的前提条件相违背，故假设不成立，必有 $c_1 \in \{0,1\}$。 证毕

经过上述证明，式(16)就有如下的形式：

$$x_1 \cdot y_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1+c_i}{2^i}(-1)^{i+1} \tag{20}$$

符号序列 $\{c_i\}$ 便是初值 x_1，y_1 相乘后所对应的符号序列，记

$$\{c_i\} = f_3(\{a_i\} \times \{b_i\}) \tag{21}$$

综上所述，针对各个初值对应的符号序列进行加、减及乘的运算可以完全等价地得到运算后初值所对应的符号序列，即当知道 $\boldsymbol{x}_1^k \in \boldsymbol{A}(k=1,2,3,\cdots,m)$所一一对应的符号序列 $\{\boldsymbol{a}_i^k\} \in \boldsymbol{S}$，便可得到任意初值 $x_1' = F_1(x_1^1, x_1^2, \cdots, x_1^m) \in \boldsymbol{A}$ 所对应的符号序列 $\{a_i'\} \in \boldsymbol{S}$，即

$$\{a_i'\} = T \circ g \circ F_1(x_1^1, x_1^2, \cdots, x_1^m) = F_2^{m-1}(\{a_i^1\}, \{a_i^2\}, \cdots, \{a_i^m\}) \tag{22}$$

其中 $F_1(\cdot)$ 是以 x_i^k 为自变量进行加、减及相乘运算的函数，$T \circ g(\cdot)$ 是根据初值来得到混沌符号序列的函数，函数 $F_2(\cdot) \in \{f_1(\cdot), f_2(\cdot), f_3(\cdot)\}$，$F_2^{m-1}$ 表示 F_2 反复运算 $m-1$ 次。

4 仿真试验与结果

卷积和运算是数字信号处理的基础，本文结合有限脉冲响应(FIR)数字滤波器进行混沌态下卷积和运算来验证上述运算模型的正确性。设 M 阶 FIR 数字滤波器差分方程为

$$y(n) = h_0 x(n) + h_1 x(n-1) + \cdots + h_{M-1} x(n-M+1) \tag{23}$$

其中 $h = \{h_0, h_1, \cdots, h_{M-1}\}$ 表示滤波系数，$x = \{x(n), \quad x(n-1), \cdots, x(n-M+1))\}$ 表示系统的激励。

对各个滤波系数 h 及激励输入样值 x，在仿真中首先将其归一化，随后对归一化后所得滤波器系数和激励信号按式(1)进行混沌编码，得到它们所对应的符号序列。若取 M=3，FIR 数字滤波器的系数 $h = \{0.4, 1.0, 0.9\}$，激励输入为：$x = \{0.6, 0.1, 0.2, 0.7\}$，则由式(1)所示的混沌系统迭代可得到各个输入样值和参数对应的符号序列如表 3 所示，仅取前面 16 位符号长度(计算精度为 $1/2^{16}$)。

表 3 (a) $h \to \{s_h\}$

Tab.3(a) Transformation of $h \to \{s_h\}$

h	$\{s_h\}$
h_0 =0.4	s_{h_0} =00110011 00110011
h_1 =1.0	s_{h_1} =10101010 10101010
h_2 =0.9	s_{h_2} =10110011 00110011

表 3 (b) $x \to \{s_x\}$

Tab.3 (b) Transformation of $x \to \{s_x\}$

x	$\{s_x\}$
x_0 =0.6	s_{x_0} =11001100 11001100
x_1 =0.1	s_{x_1} =01001100 11001100
x_2 =0.2	s_{x_2} =01100110 01100110
x_3 =0.7	s_{x_3} =11100110 01100110

在得到 h、x 所对应符号序列后，便可利用式(9)，式(13)，式(21)，并结合式(23)得到各个输出 $y(n)$ 所对应的符号序列的计算公式：

$$s_{y_0} = f_3(s_{h_0} \times s_{x_0}) \tag{24}$$

$$s_{y_1} = f_1(f_3(s_{h_0} \times s_{x_1}) + f_3(s_{h_1} \times s_{x_0})) \tag{25}$$

$$s_{y_2} = f_1(f_3(s_{h_0} \times s_{x_2}) + f_3(s_{h_1} \times s_{x_1}) + f_3(s_{h_2} \times s_{x_0})) \tag{26}$$

$$s_{y_3} = f_1(f_3(s_{h_0} \times s_{x_3}) + f_3(s_{h_1} \times s_{x_2}) + f_3(s_{h_2} \times s_{x_1})) \tag{27}$$

对各式，代入符号序列便有表 4 所示结果：

表 4 FIR 数字滤波器混沌信号处理与传统卷积方法的结果对比

Tab.4 Comparison of the results of the chaotic signal processing and the traditional convolution method by a FIR filter

符号序列 s_y	轨道符号所对应初值	十进制数计算值
s_{y_0} =00011001 10011001	0.299988	0.30
s_{y_1} =11110011 00110001	0.649963	0.65
s_{y_2} =11101000 00111000	0.739944	0.74
s_{y_3} =11110110 10000001	0.639954	0.64

5 结束语

从上述实验结果可知，在精度允许范围内，上述所涉及的混沌符号序列的加、减及乘法运算是与十进制运算完全等效的。因此，这些运算模型为符号序列的进一步处理提供了基础，使得数字信号处理中的许多方法也同样可以用混沌运算来处理，从而达到了混沌态下进行信号处理的目的。

以上 FIR 数字滤波器仿真试验中，没有用到符号序列相减的运算，这并不意味减法运算在 FIR 数字滤波器中行不通，只要保证每次减法运算后所对应初值仍保持在混沌系统的动态范围之内，就可以进行任意的减法运算。

参 考 文 献

[1] Dmitriev A S, Panas A I, Strakov S O. Storing and recognizing

information based on stable cycles of one-dimensional map. *Phys Lett*, 1991, 155: 494 − 499.

[2] Andreyev Y V, Belsky Y L, Dmitriev A S, *et al.*. Information processing using dynamical chaos: neural network implementation. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 1996, 7: 290 − 298.

[3] Andreyev Y V, Dmitriev A S, Starkov S O. Information processing in 1-D systems with chaos. *IEEE Trans. on Circuits Syst.*, 1997, 44(1): 21 − 28.

[4] 余群明, 王耀南. 混沌动力在智能信息处理中的应用. 系统工程与电子技术, 2001, 23(5): 97 − 101.

[5] 童勤业, 金敏, 虞捷.“混沌”运算器的实现[J]. 电路与系统学报, 2002, 5(4): 33 − 37.

[6] Prigogine I. The End of certainity: Time, Chaos and the New laws of Nature[M]. Paris, France: Odile Jacob 1996: 120 − 125.

金文光： 男，1966 年生， 博士，副教授，主要研究方向为混沌动力学与信息处理、系统芯片(SoC)设计等.

王金铭： 男，1978 年生，硕士，教师，主要兴趣为混沌符号动力学信号处理、混沌电路的高精度测量等.