

# 应用超图理论实现有向基本割集矩阵

黄汝激

(北京科技大学自动化系,北京 100083)

**摘要** 本文应用超图理论提出了从有向基本割集矩阵  $Q_f$  的树路子阵  $Q_{fp}$  逐层判断其可实现性和综合出其对应应有向图  $G$  的算法 RFCMHGT. 它的原理直观, 计算复杂度为  $O(nl^2)$ ,  $n$  和  $l$  为  $Q_{fp}$  的行和列数. 例 2 表明, Tutte 条件不是  $Q_f$  可实现的充分条件.

**关键词** 网络拓扑综合;超图;有向图

## 一、引言

如何从已知有向基本割集矩阵  $Q_f$  综合出其对应应有向图  $G$  是有向开关网络拓扑综合中的重要问题. 文献[1]和[2]分别应用拟阵和  $PQ$  图理论提出了实现无向  $Q_f$  的两个算法. 文献[3]和[4]给出了从有向  $Q_f$  求关联矩阵  $A$  的元素和其符号的算法, 但很繁琐, 且未解决分解时分块数大于 2 的问题. 本文应用超图理论提出了从有向  $Q_f$  的树路子阵  $Q_{fp}$  逐层判断其可实现性和综合出其对应应有向图  $G$  的算法 RFCMHGT. 它的原理直观.

## 二、有向图关于基本割集的超图和等效图

设已知一个元素为 0, 1 和 -1 的  $n \times e$  阶基本割集矩阵  $Q_f = [I \ Q_{fp}]$ ,  $I$  为单位阵,  $Q_{fp}$  称为  $Q_f$  的树路子阵, 因为它的每行对应于一条树支, 每列对应于一条连支和与该连支构成基本回路的一条树路. 行(树支)号集  $t = \{1, \dots, n\}$ , 列(边)号集  $g = \{1, \dots, e\}$ ,  $Q_{fp}$  的列(连支)号集  $\bar{t} = \{n+1, \dots, e\}$ . 要求实现  $Q_f$ , 即综合出一个连通有向图  $G$ ,

以  $Q_f$  为其基本割集矩阵. 若  $Q_f$  含有互不关联的  $d$  块(子阵)  $Q_{f1}, \dots, Q_{fd}$ , 则它们可以分别进行实现. 若它们实现成有向图  $G_{f1}, \dots, G_{fd}$ , 则由它们共有一点(参考点)所得的图  $G$  就是  $Q_f$  的一个实现. 暂时假设  $Q_f$  只含一块, 并省去下标  $f$ , 即设  $Q = [I \ Q_p]$ . 令  $M(R;), M(;C)$  和  $M(R;C)$  分别表示矩阵  $M$  中行集  $R$ , 列集  $C$  以及行集  $R$  和列集  $C$  所构成的子阵, 则  $Q = Q(t;g), Q_p = Q(; \bar{t})$ .

**定义 1** 矩阵  $Q_{-y}, y \in t$ , 是指从  $Q$  中移去行  $y$ , 列  $y$  和列集  $\bar{t}_y$  得到的矩阵, 即

$$Q_{-y} = Q(t - \{y\}; g - \{y\} - \bar{t}_y), \quad \bar{t}_y = \{k | Q(y;k) \neq 0, k \in \bar{t}\} \quad (1)$$

一般  $Q_{-y}$  可按行划分成互不关联(即没有公共连支)的  $c$  个子阵(块)  $Q_{-y}(t_i; \bar{t}_i)$ ,  $t_i$  为块  $i$  的行(树支)号集,  $i = 1, \dots, c$ . 若  $Q$  可实现成图  $G$ , 则块  $Q_{-y}(t_i; \bar{t}_i)$  对应于子

图  $G_i$ . 令行  $\gamma$  对应于  $G_0, t_0 = \{y\}$ . 暂时不考虑边的方向和各  $G_i$  内部的边和顶点, 仅考虑每个  $G_i$  的端点集  $E_i$ , 以便搞清各  $G_i$  之间的联接关系. 根据超图理论<sup>[1]</sup>,  $E_i$  是超树支, 超树支集  $E = \{E_0, E_1, \dots, E_c\}$  构成超树  $T$ , 有向图  $G$  (图 1(a)) 变成无向超图  $HG$  (图 1(b)). 对应于基本割集  $\gamma$  中每条连支  $k$ ,  $HG$  中有一条由超树支组成的超通路  $P_k$  与连支  $k$  构成超回路,  $P_k$  称为超树路. 在  $E_0$  左、右的子超树添上  $E_0$  后各称为左超树  $LT$  和右超树  $RT$ .  $RT(LT)$  内  $E_i (i > 0)$  的端点中离  $E_0$  的右(左)端最近(即对应超树路最短)者称为  $E_i$  和  $t_i$  的父点  $r_i$ . 若把  $E_0(t_0)$  用等效树支  $u_1$  代替, 把  $E_i(t_i), i > 0$  的从  $r_i$  到其余各端点的二端子超边  $E_{i_a}$  (树路  $p_a$ ) 各用一等效树支  $u_a, a > 1$  代替, 则  $E_i(t_i)$  变成以  $r_i$  为中心的等效星树  $t_{e_i}$  (每个  $t_{e_i}$  的所有树支互称为伴随树支),  $T(t)$  变成等效树  $t_e, HG(G)$  变成无向等效图  $G_e$  (图 1(c)).  $t_e$  的在  $u_1$  左、右的子树添上  $u_1$  后各称为左树  $Lt$  和右树  $Rt$ . 如果从  $u_1$  和  $E_0$  开始向右、左逐步生长  $t_e$  和  $T$ , 则生长  $t_{e_i}$  和  $E_i$  的等效树支  $s_i = u_b$  (树支  $f_i \in p_b$ ) 称为  $t_{e_i}$  和  $E_i$  的等效父支(父支), 记作  $rb(i) = b$ ; 从等效树支  $u_a$  (树支  $j$ ) 生长出的等效树支  $u_c$  (树支  $h$ ) 称为  $u_a(j)$  的等效子支(子支); 从  $u_a$  生长出的所有右(左)等效子支的集合记作  $Rt_a(Lt_a); E_0, u_1$  和  $\gamma$  各称为  $T, t_e$  和  $t$  的根支.

**定义 2** 定义  $Q_p$  关于行  $\gamma$  的无向子阵  $J_\gamma$  如下:

$$\left. \begin{aligned} Q_{p\gamma} &\leftarrow Q_p(t_\gamma; \bar{t}_\gamma), \quad t_\gamma = t_0 \cup t_1 \cup \dots \cup t_c \\ J_\gamma &\leftarrow Q_{p\gamma} \text{ (所有元素取绝对值)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

对于  $i = 0, 1, \dots, c$  进行: 从  $J_\gamma(t_i; \bar{t}_i)$  中取出所有相异列的列号组成集  $Z_{di}$ ; 对于

$$s = 1, \dots, |Z_{di}| \text{ 进行: } k \leftarrow Z_{di}(s), a \leftarrow \sum_{r=0}^{i-1} |Z_{dr}| + s, p_a \leftarrow \{j | J_\gamma(j; k) = 1, j \in \bar{t}_i\},$$

$$Z_{ca} \leftarrow \{k' | J_\gamma(t_i; k') = J_\gamma(t_i; k), k' \in \bar{t}_i\}, W(a) \leftarrow i, n_c \leftarrow \sum_{i=0}^c |Z_{di}|. p_a \subset \bar{t}_i \text{ 称为 } t_i \text{ 的 } a$$

号树路,  $W$  称为  $p_a$  到  $t_i$  的下标变换集.  $J_\gamma$  的行数  $n_\gamma = n$ , 列数  $l_\gamma = |\bar{t}_\gamma|$ .

**定义 3** 把  $J_\gamma$  中每条树路  $p_a$  用一等效树支  $u_a$  代替, 并以  $Z_{ca}$  作为  $u_a$  关联的连支集, 构成行  $J_c(u_a; \bar{t}_c)$ , 即  $\forall a \in \{1, \dots, n_c\}, \forall k \in \bar{t}_c$ ; 若  $k \in Z_{ca}$ , 则  $J_c(u_a; k) \leftarrow 1$ , 否则  $J_c(u_a; k) \leftarrow 0$ ; 那么行(树支)集  $t_i$  变成行(等效树支)集  $t_{e_i}$  ( $t_{e_i}$  内所有行互称为伴随行), 形成的矩阵  $J_c$  称为  $Q$  关于  $\gamma$  的等效树路阵或  $G_e$  的树路阵.  $J_c$  的行、列号集各为  $t_e = t_{e_0} \cup t_{e_1} \cup \dots \cup t_{e_c}$  和  $\bar{t}_e = \bar{t}_\gamma$ , 行、列数各为  $n_e$  和  $l_e = l_\gamma$ .

**定义 4** 元素为 0 为 1 的矩阵  $M$  称为  $(0, 1)$  矩阵.  $M$  中每行(列)的非零元素数称为该行(列)的长度. 元素全为 1 的行(列)称为幺行(列). 元素全为零的行(列)称为零行(列). 设  $M$  的行、列号集各为  $R$  和  $C$ , 若

$$M(i; k) - M(j; k) \leq 0, \quad \forall k \in C \quad (3)$$

$$M(i; m) - M(i; n) \leq 0, \quad \forall i \in R \quad (4)$$

则称行  $i$  含于行  $j$ , 列  $m$  含于列  $n$ , 记作  $M(i; ) \subset M(j; ), M(; m) \subset M(; n)$ ; 否则称为行  $i$  不含于行  $j$ , 列  $m$  不含于列  $n$ , 记作  $M(i; ) \supset M(j; ), M(; m) \supset M(; n)$ . 若(3)和(4)式中等号成立, 则称为行  $i$  等于行  $j$ , 列  $m$  等于列  $n$ , 记作  $M(i; ) = M(j; ), M(; m) = M(; n)$ .  $\supset$  是  $\subset$  的特殊情况.

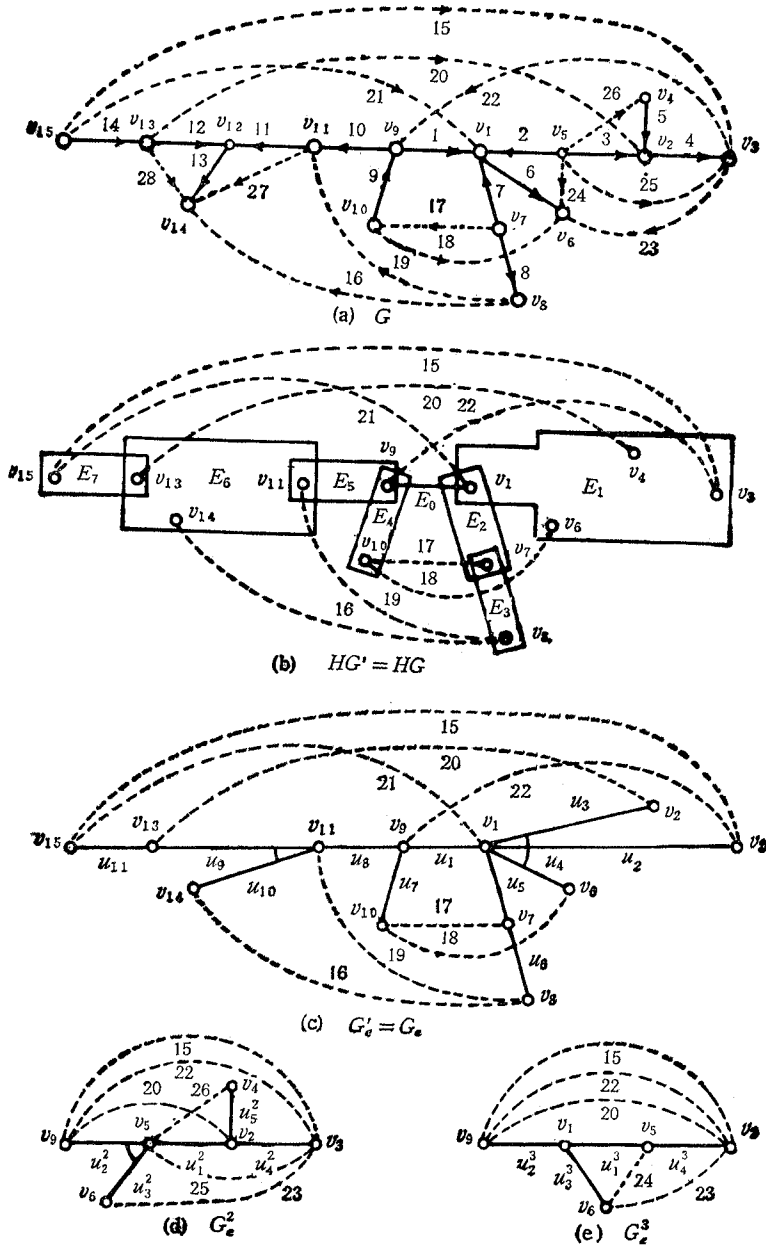


图 1 有向图  $G$  及其超图  $HG$  和等效图  $G_e, G_e^2, G_e^3$  ((b) 中  $v_4$  应为  $v_2$ )

**定义 5** 对于矩阵  $J_e$  的任一列  $k$ , 定义列  $k$  的增广列  $k^*$  如下: 若  $J_e(u_a; k) = 1, u_a \in r_{ei}$ , 则对于所有  $u_b \in r_{ei}, J_e(u_b; k^*) \leftarrow 1$ . 从  $J_e(J_e)$  中选一最长列  $k_1$ , 去掉所有含于列  $k_1(k_1^*)$  的列后, 再选一最长列  $k_2$ , 去掉所有含于列  $k_2(k_2^*)$  的列, 依此类推, 直到全部列都去掉, 所得列集  $\{k_1, \dots, k_w\}$  称作  $J_e$  的覆盖列集, 记作  $Z_e(J_e)$  的增广覆盖列集, 记作  $Z_e$ .

### 三、从等效树路阵 $J_e$ 综合等效树 $t_e$ 和超树 $T$

要从  $Q$  综合  $G$ , 可先从  $Q_p$  综合  $G$  的有向树  $t$ , 再给  $t$  添上所有连支, 就形成  $G$ . 若有从  $J_e$  综合  $t_e$  和  $T$  的算法, 就可接着应用该算法于  $Q_{-y}$  的各分块, 依此类推, 逐步产生出  $t$ . 为此应将  $J_e$  中每列  $k$  的树支集  $p_k$  都实现成一条树路, 而且彼此相容, 即能够形成一等效树  $t_e$ .

**定义 6** 对于任意  $k \in Z_e, p_k \leftarrow \{u_a | u_a \in t_e, J_e(u_a; k) = 1\}, J_{e_k} \leftarrow J_e(p_k; \cdot), h \leftarrow l_e$ , 对于  $j = 2, \dots, |p_k|$  进行: 若  $p_k(j) = u_a$ , 则  $i \leftarrow W(a)$ ; 若  $|t_{ei}| > 1$ , 则把当行  $j$  加上(逻辑和)其在  $J_e$  中的每个伴随行时所形成的新列排在  $J_{e_k}$  的右边(这是由于  $t_{ei}$  为星树, 这些列也是应被实现的树路), 即对于  $r = 1, \dots, |t_{ei}|$  进行: 若  $t_{ei}(r) = u_b, b \neq a$ , 则对于  $s = 1, \dots, l_e$  进行: 若  $J_e(b; s) = 1$  则  $h \leftarrow h + 1, J_{e_k}(; h) \leftarrow J_{e_k}(; s), J_{e_k}(a; h) \leftarrow 1$ . 比较各列, 若有相等列, 仅留一列, 移去多余列, 把行按长短从上到下排列. 若几行等长, 则其中对应于末梢树支(即  $l_e(j) = 1$ )的行  $j$ (若有的话)应排在下面, 其余行按行号自然顺序排. 形成的矩阵称为  $J_{e_k}$  的**增广阵**, 记作  $J_k$ . 若  $J_{e_k}$  的第  $j$  行变成  $J_k$  的第  $i$  行, 则  $S_k[p_k(j)] \leftarrow i, T_k(i) \leftarrow p_k(j)$ , 集  $S_k$  和  $T_k$  分别称为  $J_e$  到  $J_k$  的行号正和反变换集.  $J_k$  的行、列号集记作  $R_k$  和  $C_k$ .

根据定义 6, 注意到  $p_k$  关联的所有连支都跨越根支  $u_1$ , 并且  $p_k$  的末梢树支  $u_i$  (用  $l_e(u_i) = 1$  表示) 上不容许再生长树支, 可导出下面的定理 1 和推论 1.

**定理 1**  $J_{e_k}$  的增广阵  $J_k$  具有下列性质:

- (1) 第一行为么行,  $k$  号连支对应列为么列.
- (2) 若  $J_k$  可实现成树路  $p_k$ , 则右(左)树路  $Rp_k (Lp_k)$  中串联树支的对应行必相等, 非串联树支的对应行必不等而且长度不同, 离根支  $u_1$  愈近的树支对应行愈长, 在  $J_k$  中愈靠上.
- (3) 设从  $J_k$  已产生  $p_k$  的子树路  $p'_k \subset p_k, p'_k$  的右和左末梢树支各为  $a_k$  和  $b_k$ , 则从  $J_k$  删去  $p'_k$  的对应行集  $S(p'_k)[R_k \leftarrow R_k - S(p'_k)]$  和零列集  $Z_0 = \{j | j \in C_k, J_k(R_k; j) = 0\}(C_k \leftarrow C_k - Z_0)$  后, 若第一行  $R_k(1)$  为么行, 则其对应树支  $e_k = T_k(R_k(1))$  是唯一当前待生树支, 它将生长在  $p'_k$  的右或左侧; 否则, 不含于行  $R_k(1)$  的最长行(称为  $R_k(1)$  的匹配行)的对应树支  $e_k^*$  也是当前待生树支,  $e_k$  与  $e_k^*$  将分别生长在  $p'_k$  的两侧.

- (4) 当前待生树支  $d_k(e_k$  或  $e_k^*)$  可生长在父支  $s_k(a_k$  或  $b_k)$  上的必要条件是: (a)  $s_k$  不是  $p_k$  的末梢树支, 即  $l_e(s_k) = 0$ ; (b) 行  $d_k$  含于行  $s_k$ , 即  $J_k(d_k; \cdot) \subset J_k(s_k; \cdot)$ .

**推论 1** 矩阵  $J_k$  可实现的一个必要条件是  $J_k$  或其子阵不含有 3 个长度相同的不相等行.

注意: (1) 星树  $t_{ei}$  中所有等效树支是互相伴随的, 必须同时产生, 即在生长  $e_k \in t_{ei}$  和  $e_k^* \in t_{ei}^*$  的同时必须生长  $t_{ei}$  和  $t_{ei}^*, t_{ei}$  和  $t_{ei}^*$  称为**当前待生星树**,  $E_i$  和  $E_i^*$  称为**当前待生超树支**. (2) 当从  $J_k$  综合了  $p_k$  时, 不仅实现了  $J_e$  的列  $k$ , 也实现了  $J_e$  中含于增广列  $k^*$  的所有列. (3) 所有满足  $p_k \cap t_{ei} \neq \phi, k \in Z_e$ , 的树路  $p_k$  的集合称为生

长  $\tau_{ei}$  的树路集,其对应列号集记作  $Z_i, Z_i \subset Z_e$ . 根据这些和定理 1 可导出定理 2.

**定理 2** 设  $J_e$  的增广覆盖列集  $Z_e = \{k_1, \dots, k_w\}$ , 构造增广阵  $J_{k_1}, \dots, J_{k_w}$ , 从它们同时综合树路  $p_{k_1}, \dots, p_{k_w}$ , 若整个综合过程满足下面的**相容生长条件**: 对于每棵当前待生星树  $\tau_{ei}$  和所有  $k \in Z_i$ , 所有  $f_k = p_k \cap \tau_{ei}$  都是当前待生树支, 而且都能够生长于同一条等效父支  $s_k(a_k \text{ 或 } b_k) = u_i$  上, 即

$$\forall k \in Z_i, s_k(a_k \text{ 或 } b_k) = u_i, I_e(s) = 0, J_k(f_k) \subset J_k(s_k) \quad (5)$$

则  $p_{k_1}, \dots, p_{k_w}$  是相容的, 即它们能组成等效树  $\tau_e$ .

根据定理 1 和 2 可设计一个从  $J_e$  综合  $\tau_e$  和  $T$  的算法 SHTMJJE 如下. 算法中每步生长过程进行了两次, 第一次检查相容生长条件是否满足, 若满足才进行第二次的实际生长过程; 若从右侧进行和从左侧进行生长都不满足相容生长条件, 则  $J_e$  不能实现. 每条等效树支  $u_a$  在算法中用其下标  $a$  表示.

**算法 SHTMJJE** ( $J_e, y; RT, LT, Rl, Ll, rb$ )

1. 初始化: 所有数组清零,  $\alpha \leftarrow 1, RT(1) \leftarrow 0, \beta \leftarrow 1, LT(1) \leftarrow 0$ ; 按定义 5 求  $Z_e, \forall k \in Z_e, g_k \leftarrow 1, h_k \leftarrow 1, Rp_k(1) \leftarrow 1, Lp_k(1) \leftarrow 1$ .

2.  $\forall k \in Z_e$ , 按定义 6 从  $J_e$  构造  $J_k, S_k, T_k, R_k$  和  $C_k, R_k \leftarrow R_k - R_k(1)$ .

3. 若  $Z_e = \phi$ , 转步骤 7, 否则  $\forall k \in Z_e$  进行(求等效父支  $a_k, b_k$ , 当前待生树支集  $B_k$  和当前待生超树支集  $D_k$ ):

(1)  $Z_0 \leftarrow \{j | j \in C_k, J_k(R_k; j) = 0\}, C_k \leftarrow C_k - Z_0, Z_{01} \leftarrow \{j | j \in C_k, J_k(R_k(1); j) = 0\}, e_k \leftarrow T_k(R_k(1)), i \leftarrow W(e_k), a_k \leftarrow Rp_k(g_k), b_k \leftarrow Lp_k(h_k)$ .

(2) 若  $Z_{01} = \phi$ , 则  $B_k \leftarrow \{e_k\}, D_k \leftarrow \{i\}$ .

(3) 若  $Z_{01} \neq \phi$ , 则  $r \leftarrow$  第一个  $\subset R_k(1)$  的最长行的行号,  $e_k^* \leftarrow T_k(r), i^* \leftarrow W(e_k^*), B_k \leftarrow \{e_k, e_k^*\}, D_k \leftarrow \{i, i^*\}$ .

4.  $D \leftarrow \bigcup_{k \in Z_e} D_k$  ( $D$  中元素按自然顺序排),  $\forall i \in D, Z_i \leftarrow \phi. \forall i \in D$  和  $\forall k \in Z_e$  进行(修改  $B_k$  和  $D_k$ , 求生长  $\tau_{ei}$  的树路号集  $Z_i$ ):

(1)  $p_{ik} \leftarrow \tau_{ei} \cap p_k$ , 若  $p_{ik} = \{f_k\} \neq \phi, f_k \in B_k$ , 则  $Z_i \leftarrow Z_i \cup \{k\}$ .

(2) 若  $p_{ik} = \{f_k\} \neq \phi, f_k \notin B_k$ , 则若  $B_k = \{e_k\}, B_k \leftarrow B_k \cup \{f_k\}, D_k \leftarrow D_k \cup \{i\}, Z_i \leftarrow Z_i \cup \{k\}$ ; 若  $B_k = \{e_k, e_k^*\}$ , 转步骤 6.

5. 检查相容生长条件, 生长当前待生树支和当前待生超树支:

(1)  $m_1 \leftarrow 0, n_1 \leftarrow 0, l \leftarrow 0$ .

(2)  $D^* \leftarrow D, M \leftarrow \phi, ST \leftarrow \phi, SI \leftarrow \phi, r \leftarrow 0$ .

(3) 若  $D^* = \phi$ , 转步骤 3; 否则  $i \leftarrow D^*(1), M(i) \leftarrow 1$ , 转步骤 5(5).

(4) 若  $r = 0, m_1 = 0$ , 则  $m_1 \leftarrow 1, l \leftarrow n_1$ , 转步骤 5(2). 若  $r = 0, m_1 = 1$ , 转步骤 5(1). 若  $r \neq 0$ , 则  $i \leftarrow ST(r), l \leftarrow SI(r), r \leftarrow r - 1$ , 转步骤 5(5).

(5)  $\forall k \in Z_i$  进行(取出待生树支  $f_k$ , 匹配超树支  $i^*$  进栈):  $f_k \leftarrow B_k \cap \tau_{ei}$ , 若  $D_k - \{i\} = \{i^*\} \neq \phi, M(i^*) = 0$ , 则  $M(i^*) \leftarrow 1, r \leftarrow r + 1, ST(r) \leftarrow i^*$ ; 若  $l = 0$ , 则  $SI(r) \leftarrow 1$ , 否则  $SI(r) \leftarrow 0$ .

(6) 若  $m_1 = 0, l = 0$ , 转步骤 5(7). 若  $m_1 = 0, l = 1$ , 转步骤 5(8). 若  $m_1 = 1, l = 0$ , 转步骤 5(10). 若  $m_1 = 1, l = 1$ , 转步骤 5(11).

(7) 若  $\forall k \in Z_i, a_k = a, I_e(a) = 0, J_k(f_k) \subset J_k(a_k)$ , 则  $D^* \leftarrow D^* - \{i\}$ , 转步骤 5(4); 否则转步骤 5(9).

(8) 若  $\forall k \in Z_i, b_k = b, I_e(b) = 0, J_k(f_k) \subset J_k(b_k)$ , 则  $D^* \leftarrow D^* - \{i\}$ , 转步骤 5(4); 否则转步骤 5(9).

(9) 若  $n_i = 0$ , 则  $n_i \leftarrow 1, l \leftarrow 1$ , 转步骤 5(2); 否则转步骤 6.

(10)  $\forall k \in Z_i$  进行:  $g_k \leftarrow g_k + 1, Rp_k(g_k) \leftarrow f_k, a \leftarrow a_k, j \leftarrow S_k(f_k), R_k \leftarrow R_k - \{j\}$ , 若  $R_k = \phi, Z_e \leftarrow Z_e - \{k\}, \alpha \leftarrow \alpha + 1, RT(\alpha) \leftarrow i, rb(i) \leftarrow a, Rt_a \leftarrow Rt_a \cup t_{ei}, D \leftarrow D - \{i\}$ , 转步骤 5(4).

(11)  $\forall k \in Z_i$  进行:  $h_k \leftarrow h_k + 1, Lp_k(h_k) \leftarrow f_k, b \leftarrow b_k, j \leftarrow S_k(f_k), R_k \leftarrow R_k - \{j\}$ , 若  $R_k = \phi, Z_e \leftarrow Z_e - \{k\}, \beta \leftarrow \beta + 1, LT(\beta) \leftarrow i, rb(i) \leftarrow b, Lt_b \leftarrow Lt_b \cup t_{ei}, D \leftarrow D - \{i\}$ , 转步骤 5(4).

6. 停止, 显示 “ $J_e$  不能实现”.

7. 结束 SHTMJE.

#### 四、从基本割集矩阵 $Q_f$ 综合有向图 $G$

**定义 7** 从矩阵  $Q$  构造二维数组  $L$  和一维数组  $D$  如下:

$$\left. \begin{aligned} L &\leftarrow \phi, D \leftarrow \phi, L(i; )_{i \leq n} \leftarrow \{k | k > n, Q(i; k) \neq 0\} \\ L(k; )_{k > n} &\leftarrow \{i | i \leq n, Q(i; k) \neq 0\}, D(i) \leftarrow |L(i; )|, i = 1, \dots, e \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

数组对  $(L, D)$  称为矩阵  $Q$  的邻接表.

应用深度优先搜索算法 DFS (例如文献[6]中算法 5.2) 从  $(L, D)$  可求得  $Q$  的块数和各块的行号集.

从基本割集矩阵  $Q$  综合有向图  $\tau$  是逐层逐块进行的. 令  $H^m$  存放第  $m$  层的正在实现的  $Q$  的一块子阵,  $H_p^m$  存放  $H^m$  的树路子阵,  $X_1(j)$  和  $X_2(j)$  存放树支  $j$  的始点和终点号,  $t^m$  和  $t_e^m$  分别表示第  $m$  层的正在综合的有向树和无向等效树,  $S(j) = 1, -1$  或  $0$  表示树支  $j$  的方向与根支  $y = y^1$  的一致、不一致或未定,  $I(j | j \in t^m) = 1$  表示  $j$  是  $t^m$  的末梢树支,  $Rt = \{Rt_a\}, Lt = \{Lt_b\}$ .

第  $m$  层是从  $H^m$  综合  $t^m$ , 综合过程如下:

(1) 从  $H_p^m$  求出  $J_y^m$  和  $J_e^m$ ; 从  $J_e^m$  综合出  $t_e^m$  和  $T^m$  ( $RT^m$  和  $LT^m$ ). 计算每条树路  $p_k$  及其子树路  $p_{ik}$  的末梢树支数  $q_k$  和  $q_{ik}$ , 若  $q_k > 2$  或  $q_{ik} > 1$ , 则  $p_k$  不能实现.

(2) 顺序处理  $RT^m$  中每条超树支  $E_i^m$  的对应子树  $t_i^m$ : (a) 若  $J_y^m(t_i^m) = J_e^m(t_i^m)$  (即  $|t_i^m| = |t_e^m|$  且  $\forall a \in t_e^m, |p_a^m| = 1$ ), 则可以给  $t_i^m$  中每条未处理 ( $S(j) = 0$ ) 的树支  $j$  标定方向和始、终点号, 即对于树支  $j$  与其父支  $f$  的对应基本割集的所有公共连支  $l$  检查乘积  $H_p^m(j; l)H_p^m(f; l)$  是否都相等; 若否 (表示行  $j$  与  $f$  的元素符号有矛盾), 则  $H^m$  不能实现; 若是, 则  $S(j) \leftarrow H_p^m(j; l)H_p^m(f; l)S(f), I(j) \leftarrow 1$ ; 将  $E_i^m$  的父点号赋予  $j$  的左端; 若  $j$  有一条子支  $h$  已处理过, 则将  $h$  的左端点号赋予  $j$  的右端, 否则  $v \leftarrow v + 1$ , 将  $v$  赋予  $j$  的右端. (b) 若  $J_y^m(t_i^m) \neq J_e^m(t_e^m)$  (即  $|t_i^m| \neq |t_e^m|$  或  $\exists a \in t_e^m, |p_a^m| > 1$ ),

则  $t_i^m$  的结构未定,  $H^{m+1} \leftarrow Q(t_i^m \cup \{f\};)$ , 进入第  $m+1$  层, 从  $H^{m+1}$  综合  $t^{m+1} = t_i^m \cup \{f\}$ .

(3) 顺序处理  $LT^m$  中每条超树支  $E_i^m$  的对应子树  $t_i^m$ : 与(2)类似, 但左、右二字互换.

根据上述原理可设计一个从  $H^m$  综合  $t^m$  的算法 SDTFCM 和从  $Q_f$  综合  $G$  的主算法 RFCMHGT 如下.

**算法 SDTFCM** ( $H^m, y^m; t^m, S, X_1, X_2$ )

1. 初始化:  $Q_p \leftarrow H_p^m, y \leftarrow y^m, t_0 \leftarrow \{y\}, t_{c0} \leftarrow \{1\}$ .

2. 按定义 7 建立  $H^m$  的邻接表  $(L, D)$ , 调算法 DFS 从  $(L, D)$  求出  $H^m$  的块数  $c$  和各块的行号集  $t_i, i = 1, \dots, c$ .

3. 按定义 2 从  $Q_p$  求得  $J, W$  和  $p_a, a = 1, \dots, n_c$ . 若  $m > 2$ , 求  $J$  的覆盖列集  $Z_y$ , 对于每个  $i \in \{1, \dots, c\}$  和每个  $k \in Z$ , 进行:  $q_{ik} \leftarrow \sum_j I(j|j \in t_i, J, (j;k) =$

1), 若  $q_{ik} > 1$ , 转步骤 7; 对于每个  $k \in Z$ , 进行:  $q_k \leftarrow \sum_i q_{ik}$ , 若  $q_k > 2$ , 转步骤 7.

4. 按定义 3 从  $J$  求得  $J_c$  和  $t_{ci}, i = 1, \dots, c$ . 若  $m > 1$ , 对于  $a = 1, \dots, n_c$  进行:  $q_a \leftarrow \sum_j I(j|j \in p_a)$ , 若  $q_a > 0$  则  $I_c(a) \leftarrow 1$ , 否则  $I_c(a) \leftarrow 0$ .

5. 调算法 SHTMJE 从  $J_c$  产生  $RT, LT, Rt, Lt$  和  $rb$ :

(1) 若  $m = 1$ , 转步骤 5(2); 否则找出含有父支  $f^m$  的  $t_i^m$ ; 若  $i \in RT$  则  $L^m \leftarrow -1$ ; 否则  $L^m \leftarrow 1$ . 若  $L^m R^{m-1} = -1$ , 则  $RT^m \leftarrow LT, LT^m \leftarrow RT, Rt^m \leftarrow Lt, Lt^m \leftarrow Rt$ , 转步骤 5(3); 否则转步骤 5(2).

(2)  $RT^m \leftarrow RT, LT^m \leftarrow LT, Rt^m \leftarrow Rt, Lt^m \leftarrow Lt$ .

(3)  $rb^m \leftarrow rb, I_c^m \leftarrow I_c; p_a^m \leftarrow p_a, a = 1, \dots, n_c; t_i^m \leftarrow t_i, t_{ci}^m \leftarrow t_{ci}, i = 1, \dots, c$ .

6. 顺序处理  $RT^m$  和  $LT^m$  中每条超树支  $E_i^m$  (处理  $RT^m$  时  $R^m \leftarrow 1$ ; 处理  $LT^m$  时  $R^m \leftarrow -1$ ):

(1) 若  $i = 0$ , 则  $a \leftarrow 1, j \leftarrow y^m$ , 转步骤 6(3)(b); 否则转步骤 6(2)

(2) 找出  $E_i^m$  的父支  $f$  和父点  $r$ :  $b \leftarrow rb^m(i), f \leftarrow p_b^m$  中离  $y^m$  最远的树支; 若  $R^m S(f) = 1$ , 则  $r \leftarrow X_2(f)$ ; 否则  $r \leftarrow X_1(f)$ .

(3) 若  $|t_i^m| = |t_{ci}^m|$  且  $\forall a \in t_{ci}^m, |p_a^m| = 1$ , 则对于每个  $j \in t_i^m$ ; 若  $S(j) = 0$ , 进行:

(a) 对于树支  $j$  与  $f$  的对应基本割集的所有公共连支  $l$  检查乘积  $H_p^m(j;l)H_p^m(f;l)$  是否都相等, 若否, 转步骤 7; 若是, 则  $S(j) \leftarrow H_p^m(j;l)H_p^m(f;l)S(f), I(j) \leftarrow 1$ . 若  $R^m S(j) = 1, X_1(j) \leftarrow r$ ; 否则  $X_2(j) \leftarrow r$ .

(b) 找出树支  $j$  的子支  $h$  和子点  $s$ : 若  $R^m = 1$ , 顺序检查  $c \in Rt^m$ , 否则检查  $c \in Lt^m$ ; 若找到一个  $c$  满足  $I_c^m(c) = 1$  且  $|p_c^m| = 1$ , 则  $h \leftarrow p_c^m(1)$ . 若  $R^m S(h) = 1$ , 则  $s \leftarrow X_1(h)$ ; 否则  $s \leftarrow X_2(h)$ . 若找不到上述  $c$ , 则  $v \leftarrow v + 1, s \leftarrow v$ . 若  $R^m S(j) = 1$ , 则  $X_2(j) \leftarrow s$ ; 否则  $X_1(j) \leftarrow s$ .

(4) 若  $|t_i^m| \neq |t_{i'}^m|$  或  $\exists a \in t_i^m, |p_a^m| > 1$ , 则  $m \leftarrow m + 1, H^m \leftarrow Q(t_i^{m-1} \cup \{f\};)$ ,  $H_p^m \leftarrow H^m(;i)$ ; 从  $H_p^m$  找出一个使  $H_p^m(f;k) \neq 0$  的最长列  $k$ , 再找出使  $H_p^m(y;k) \neq 0, S(y) = 0$  的最长行  $y$ . 对于  $y$  与  $f$  的对应基本割集的所有公共连支  $l$  检查乘积  $H_p^m(y;l)H_p^m(f;l)$  是否都相等; 若否, 转步骤 7; 若是, 则  $S(y) \leftarrow H_p^m(y;l)H_p^m(f;l)S(f)$ ,  $I(y) \leftarrow 1, y^m \leftarrow y, f^m \leftarrow f$ , 调 SDTFCM.

7. 停止, 显示 “ $H^m$  不能实现”.

8.  $m \leftarrow m - 1$ , 结束 SDTFCM.

**主算法 RFCMHGT** ( $Q_f; S, X_1, X_2, A$ )

1. 输入  $Q_f$ .

2. 按定义 7 建立  $Q_f$  的邻接表  $(L, D)$ , 调 DFS 求出  $Q_f$  的分块子阵  $Q_{f_x}, x = 1, \dots, d$ .

3. 对于  $x = 1, \dots, d$  进行:

(1) 初始化:  $Q \leftarrow Q_{f_x}, A_x \leftarrow \phi, S \leftarrow \phi, X_1 \leftarrow \phi, X_2 \leftarrow \phi, I \leftarrow \phi, v \leftarrow 0, m \leftarrow 1, H^m \leftarrow Q, H_p^m \leftarrow H^m(;i), y \leftarrow H_p^m$  的最长行的行号,  $S(y) \leftarrow 1, I(y) \leftarrow 1, y^m \leftarrow y$ .

(2) 调 SDTFCM 从  $H^1 = Q$  综合有向树  $t^1 = t$ , 即产生  $t$  的树支的方向集  $S$  和始终点集  $X_1, X_2$ .

(3) 建立  $Q_{f_x}$  的图  $G_{f_x}$  的关联阵  $A_x$ :

$$\left. \begin{aligned} A_n(X_1(j);j) &\leftarrow 1, A_x(X_2(j);j) \leftarrow -1, j = 1, \dots, n \\ p_i &\leftarrow \{i | i \in t, Q(i;j) \neq 0\}, A_x(;j) \leftarrow \sum_{i \in p_i} A_x(i;j)Q(i;j), j = n+1, \dots, e \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

4. 建立  $Q_f$  的图  $G$  的关联阵  $A: A \leftarrow \text{Diag}[A_1, \dots, A_d]$ .

5. 结束 RFCMHGT.

本算法的计算时间主要决定于步骤 3(2), 最坏情况是  $d = 1, m = 1, J_c = Q_{f_p}$  规模最大, 其计算复杂度为  $O(nl^2)$ ;  $n$  和  $l$  为  $Q_f$  的树路子阵  $Q_{f_p}$  的行数和列数.

为了简单, 算法中没有对  $Q_f$  进行预处理. 如果对  $Q_f$  进行预处理, 即对于每组相等行和相等列, 仅留一代表行和代表列, 则可减少综合过程的计算量. 不过综合出有向图  $G$  后, 每条代表树支要用对应的一组串联树支代替, 每条代表连支要用对应的一组并联连支代替.

## 五、应用举例

**例 1** 已知  $Q_{f_p} = Q_p$  如(8)式, 要求综合出其对应于有向图  $G$ .



$$Q_{t_p} - Q_p = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccc} & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{array} & \left[ \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \end{array} \end{array} \quad (8)$$

解 应用算法 RFCMHGT 于  $Q_i$  可得第一层 ( $m=1$ ) 的  $J_e$  和  $J_{15}, \dots, J_{18}$  如(9)~(13)式(式中列上  $\times$  号表示该列为多余列, 可以去掉), 综合出的超图  $HG$  和等效图  $G_e$  如图 1(b)和 1(c)。处理  $E_1$  时要进行第二层 ( $m=2$ ) 综合, 所得等效图  $G_e^2$  如图 1(d)。处理  $E_2$  时要进行第三层 ( $m=3$ ) 综合, 所得等效图  $G_e^3$  如图 1(e), 等等。综合结果:

$$S = \{1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1\}$$

$$X_1 = \{9, 5, 5, 2, 4, 1, 7, 7, 10, 9, 11, 13, 12, 15\}$$

$$X_2 = \{1, 1, 2, 3, 2, 6, 1, 8, 9, 11, 12, 12, 14, 13\}$$

根据  $X_1, X_2$  可建立关联矩阵  $A$ (从略), 从而可画出有向图  $G$  如图 1(a)。

$$J_e = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 \\ \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \end{array} & \left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} t_{e0} \\ t_{e1} \\ t_{e2} \\ t_{e3} \\ t_{e4} \\ t_{e5} \\ t_{e6} \\ t_{e7} \end{array} \end{array} \quad (9)$$

$$\begin{array}{c}
 \times \times \quad 20' \\
 J_{15} = \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} u_1 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_2 \\ u_{11} \end{array}
 \end{array} \quad (10)$$

$$\begin{array}{c}
 \times \times \times 15' \\
 J_{16} = \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} u_1 \\ u_8 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_{10} \end{array}
 \end{array} \quad (11)$$

$$\begin{array}{c}
 \times \times \times \times \\
 J_{17} = \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} u_1 \\ u_5 \\ u_7 \end{array}
 \end{array} \quad (12)$$

$$\begin{array}{c}
 \times \quad \times \times \times \times 15' \\
 J_{18} = \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} u_1 \\ u_4 \\ u_7 \end{array}
 \end{array} \quad (13)$$

例 2 已知  $Q_f = [I \quad Q_p]$ ,  $Q_p$  如(14)式:

$$Q_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

应用 RFCMHGT 发现它不能实现, 根据推论 1 也可知它不能实现。它显然不包含 Tutte 矩阵<sup>[1]</sup>  $L$  或  $L^T$  作为子阵。它也不包含 Kuratowski 图  $K_5$  和  $K_{3,3}$  的回路矩阵  $B(K_5)$  和  $B(K_{3,3})$  作为子阵, 因为后二者的阶数各为  $6 \times 10$  和  $4 \times 9$ , 大于这个  $Q_f$  的阶数  $4 \times 8$ 。因此, 例 2 表明, Tutte 条件<sup>[1]</sup> ( $Q_f$  不包含  $L, L^T, B(K_5)$  或  $B(K_{3,3})$  作为子阵) 只是  $Q_f$  为割集矩阵的必要条件, 不是充分条件。

### 参 考 文 献

- [1] R.E Bixby, W.H. Cunningham, *Mathematics of Operations Research*, 5(1980)3,321—356.
- [2] S.Fujishige, *Journal of Computer and System Sciences*, 21(1980)1,63—86.
- [3] W.Mayeda, *IRE Trans, on CT, CT-10*(1963)1,133—134.

- [4] В.Ф.Ротко, Эффективные Алгоритмы Синтеза Графов с Заданным Множеством Фундаментальных Разрезов или Циклов, Кибернет, (1986)1,39—45.
- [5] 黄汝激,超网络的有向  $k$  超树分析法,电子科学学刊,9(1987)3,244—255.
- [6] A.V.Abo, et al., The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley. Publishing Company. (1976).
- [7] 陈树柏,左培,张良震,网络图论及其应用,第九章,科学出版社,北京,1982年。

## REALIZATION OF DIRECTED FUNDAMENTAL CUTSET MATRIX BY HYPERGRAPH THEORY

Huang Ruji

(Beijing University of Science and Technology, Beijing 100083)

**Abstract** By applying hypergraph theory, algorithm RFCMHGT is presented for determining the realizability of a given directed fundamental cutset matrix  $Q_f$  and synthesizing its corresponding directed graph  $G$  layer by layer from its tree path submatrix  $Q_{fp}$ . Its principle is intuitive and its computational complexity is  $O(nl^2)$ , where  $n$  and  $l$  are the numbers of rows and columns of  $Q_{fp}$ . Example 2 shows that Tutte's condition is not the sufficient condition for  $Q_f$  to be realizable.

**Key words** Network topological synthesis; Hypergraph; Directed graph