# 非线性网络 Volterra 级数表示的代数求解算法*

王柏勇　　　　杨　山
（云南工学院，昆明）　（天津大学，天津）

**摘要**　本文基于非线性网络 Volterra 级数表示的辅助代数方法，提出了非线性网络 $n$ 阶 Volterra 核和 $n$ 阶非线性传递函数的代数编列算法。求取了非线性网络的规范形、三角形、对称形 $n$ 阶 Volterra 核及相应的 $n$ 阶非线性传递函数，同时也降低了非线性网络 Volterra 级数表示编列算法的复杂性.

**关键词**　非线性网络；Volterra 级数；编列算法

## 一、引　言

设图 1 所示非线性网络 NL 是一时不变解析因果律系统，则网络输出 $y(t)$ 和输入 $u(t)$ 的关系可用 Volterra 级数表示为：


图 1

$$y(t) = \boldsymbol{T}[u(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \tag{1}$$

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{\infty}^{-\infty} h_n(\tau_1, \cdots, \tau_n) \prod_{i=1}^{n} u(t-\tau_i) d\tau_i \tag{2}$$

$h_n(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 是网络 NL 的 $n$ 阶 Volterra 核，它的 $n$ 维 Laplace 变换

$$H_n(s_1, \cdots, s_n) = \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} h_n(\tau_1, \cdots, \tau_n) \exp(-s_1\tau_1 - \cdots - s_n\tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n \tag{3}$$

被称为网络 NL 的 $n$ 阶非线性传递函数.

自从 N. Winear 把 Volterra 级数方法引入非线性系统分析以来，人们便对这种方法产生了极大兴趣. 虽然这种方法用于解决实际电路问题的历史只有十几年，但它已成为非线性电路分析和器件造型的重要方法之一. 在用 Volterra 级数方法解决实际电路问题时，首先要求取网络的 $n$ 阶 Volterra 核和非线性传递函数. 目前，人们主要用多维

* 1986 年 12 月 10 收到，1988 年 4 月 6 日修改定稿.

Laplace 变换来研究非线性网络 Volterra 级数表示. 现有的非线性网络 Volterra 级数表示的编列算法仅能获取网络的 $n$ 阶对称形非线性传递函数[1,2]. 因此现有算法有两点不足: (1)对称形非线性传递函数表示繁冗,所需的计算时间长,且存贮空间大; (2)从运算角度讲, 由对称形非线性传递函数 $H_n^{sym}(\cdot)$ 很难求得三角形和规范形非线性传递函数,也不易得到相应的 Volterra 核[3]. 这样,只能在代数域 $[s_1,\cdots,s_n, H_1^{sym}(\cdot),\cdots,H_n^{sym}(\cdot)]$ 中讨论问题. 局限了 Volterra 级数方法的应用.

本文讨论了非线性网络 Volterra 级数表示的辅助代数方法,提出了由 Volterra 级数的辅助代数表示求取时域 Volterra 核函数的代数方法,给出了由 Volterra 级数的辅助代数表示列写网络非线性传递函数的代数算法. 对一大类典型非线性系统的讨论表明: 非线性网络 Volterra 级数代数编列算法求出了非线性网络的规范形、三角形、对称性 $n$ 阶 Volterra 核和相应的 $n$ 阶非线性传递函数,而且它的复杂性也有所下降.

## 二、非线性网络 Volterra 级数表示的辅助代数方法

在文献[4]中,我们采用形式变量 $x_{-1}$, $x_0$ 和 $x_1$ 分别代表算式: $\int_0^t \dot u(\tau)d\tau$, $\int_0^t d\tau$ 和 $\int_0^t u(\tau)d\tau$. 把 Volterra 级数(1)在代数域 $\{x_{-1}, x_0, x_1\}$ 表示为:

$$Y(x_{-1}, x_0, x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x_{-1}, x_0, x_1) \tag{4}$$

(4)式叫做非线性网络 Volterra 级数表示(1)式的辅助代数表示. 文献[4]还给出了由非线性网络拓扑求取非线性网络 Volterra 级数辅助代数表示的递推算法. 对于非线性时不变集中参数网络,其 $n$ 阶输出 $y_n(t)$ 的辅助代数表示是:

$$Y_n(x_{-1}, x_0, x_1) = \sum_k Q_k \cdot R_0^k(x_0)x_{k_1}R_1^k(x_0)\cdots R_{n-1}^k(x_0)x_{k_n} \tag{5}$$

其中 $k=1,2,\cdots,K$. $K$ 为有限正整数. 即和式 $\sum_k$ 是关于 $k$ 的有限和式. $k_1\cdots,k_n\in\{-1,1\}$. 和式中第 $k$ 项中的 $R_0^k(x_0),\cdots,R_{n-1}^k(x_0)$ 都是关于 $x_0$ 的有理式,它们的一般表示形式是

$$R_j^k(x_0) = (1+c_{kj1}x_0)^{-1}x_0\cdots x_0(1+c_{kjl}x_0)^{-1} \tag{6}$$

$Q_k$, $C_{kj1},\cdots,C_{kjl}\in \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}$ 是复数域, $0\leqslant j\leqslant n-1$.

**定义** 设 $h(t)$ 为分段连续实函数,定义

$$H(x_0) = \bar G[h(t)] = \frac{1}{x_0}\int_0^\infty h(t)\cdot\exp(-t/x_0)dt$$

是函数 $h(t)$ 的修改 Laplace 变换.

可以证明,修改 Laplace 变换满足下列性质:

**性质 1** 设 $\alpha,\beta$ 是常数, $H_1(x_0)=\bar G[h_1(t)]$, $H_2(x_0)=\bar G[h_2(t)]$, 则

$$\bar G[\alpha h_1(t)+\beta h_2(t)] = \alpha H_1(x_0)+\beta H_2(x_0)$$

**性质 2** 设分段连续实函数 $h(t)$ 的 Laplace 交换 $H(s)=\mathscr{L}[h(t)]$, 其修改

Laplace 变换 $P(x_0)=\bar{G}[h(t)]$。 则 $H(s)=\frac{1}{s}P(1/s)$。

**性质 3**　若 $H(x_0)=\bar{G}[\bar{G}(t)]$，且 $h'(t)$ 分段连续，则 $\bar{G}[h'(t)]=x_0^{-1}H(x_0)-h(0)x_0^{-1}$。其中 $x_0^{-1}\triangleq 1/x_0$。

**性质 4**　若 $H(\alpha_0)=h[h(t)]$，则 $\bar{G}\left[\int_0^t h(\tau)d\tau\right]=x_0H(x_0)$。

**命题 1**　非线性网络 $n$ 阶输出的辅助代数表示 (5) 式的通项 $R_0^k(x_0)x_{k_1}R_1^k(x_0)\cdots R_{n-1}^k(x_0)x_{k_r}$ 是重积分

$$\int_0^t\int_0^{\tau_n}\cdots\int_0^{\tau_2}f_0^k(t-\tau_n)\cdots f_{n-1}^k(\tau_2-\tau_1)u_{k_1}(\tau_n)\cdots u_{k_n}(\tau_1)d\tau_1\cdots d\tau_n \tag{7}$$

在代数域 $\{x_{-1},x_0,x_1\}$ 中的代数表示。$R_i^k(x_0)$ 是 $f_i^k(t)$ 的修改 Laplace 变换，即

$$R_i^k(x_0)=\bar{G}[f_i^k(t)].$$

$$u_{k_m}(\cdot)=\begin{cases}\hat{u}(\cdot)，当\ k_m=-1\ 时，\\ u(\cdot)，当\ k_m=1\ 时，\end{cases}\quad 1\leqslant m\leqslant n$$

**证明**　设 $h(\tau_n)=\int_0^{\tau_n}f_1^k(\tau_n-\tau_{n-1})u_{k_2}(\tau_{n-1})d\tau_{n-1}$

$$\cdot\int_0^{\tau_{n-1}}\cdots\int_0^{\tau_2}f_{n-1}^k(\tau_2-\tau_1)u_{k_n}(\tau_1)d\tau_1$$

则 (7) 式为

$$\int_0^t f_0^k(t-\tau_n)\cdot u_{k_1}(\tau_n)\cdot h(\tau_n)d\tau_n$$

取上式的修改 Laplaee 变换，考虑网络 NL 的因果律性质：当且仅当 $t>\tau_n>\cdots>\tau_1>0$ 时，

$$f_0^k(t-\tau_n)\cdots f_{n-1}^k(\tau_2-\tau_1)\neq 0$$

则

$$\bar{G}\left[\int_0^t f_0^k(t-\tau_n)u_{k_1}(\tau_n)\cdot h(\tau_n)\cdot d\tau_k\right]$$
$$=R_0(x_0)\bar{G}[u_{k_1}(\tau_m)\cdot h(\tau_n)]=R_0^k(x_0)x_{k_1}\bar{G}[h(\tau_n)]$$

依此类推，命题成立。

据此，非线性网络 Volterra 级数 $n$ 阶项的辅助代数表示(5)式表征了重积分

$$y_n(t)=\sum_k Q_k\int_0^t\int_0^{\tau_n}\cdots\int_0^{\tau_2}f_0^k(t-\tau_n)\cdots f_{n-1}^k(\tau_2-\tau_1)$$
$$\cdot u_{k_1}(\tau_n)\cdots u_{k_n}(\tau_1)d\tau_1\cdots d\tau_n$$

显然，非线性网络 Volterra 级数的辅助代数表示(4)式是在代数域 $\{x_{-1},x_0,x_1\}$ 中对时域 Volterra 级数的表示。

**命题 2**　如果在非线性网络 $n$ 阶输出的辅助代数表示(5)式中，$-1\in\{k_1,\cdots,k_n\}$，依下列算法可将 $x_{-1}$ 变换成 $x_1$。

(1) 假设 $x_{k_j}=x_{-1}$，则

$$[\cdots \circ R_{j-1}^{k}(x_0)x_{-1}R_j^k(x_0)\cdots]$$
$$=[\cdots R_{j-1}^{k}(x_0)x_0^{-1}x_1R_j^k(x_0)\cdots]-[\cdots R_{j-1}^{k}(x_0)x_1x_0^{-1}R_j^k(x_0)\cdots] \quad (8)$$

(2) $R_0^k(x_0)x_{k_1}\cdots x_{k_{(n-1)}}R_{n-1}^k(x_0)x_{-1}=R_0^k(x_0)x_{k_1}\cdots x_{k_{(n-1)}}R_{n-1}^k(x_0)x_0^{-1}x_1$ (9)

(8)式中仅列出了同 $x_{k_j}=x_{-1}$ 相邻的两项，其余用省略号…代替的项在算法执行中均无变化。

命题 2 的证明可由如下两步骤来完成：(1)基于命题 1，将(5)式中的通项 $R_0^k(x_0)\cdot x_{k_1}\cdots R_{n-1}^k(x_0)x_{k_n}$ 换成重积分形式，并进行分部积分；(2)基于修改 Laplace 变换的性质和命题 1，再将时域重积分变换到 $\{x_{-1}, x_0, x_1\}$ 域中。

命题 2 所示的代数变换算法非常简便。只须依次将 $x_{-1}$ 左右两边关于 $x_0$ 的有理式分别乘以 $x_0^{-1}$ 后做减法运算即可，则非线性网络 $n$ 阶输出的辅助代数表示为

$$Y_n(x_0, x_1)=\sum_i W_j G_{j0}(x_0)x_1G_{j1}(x_0)\cdots G_{j(n-1)}(x_0)x_1 \quad (10)$$

其中 $\sum_i$ 是关于 $i$ 的有限和式，$W_j\in \boldsymbol{C}$. $G_{jl}(x_0)$ 是 $x_0$ 的有理式，$0\leqslant i\leqslant n-1$。

## 三、非线性网络的时域 Volterra 核

目前，Volterra 级数主要应用于非线性网络和系统的频域特性研究。但在估计 Volterra 多项式的截断误差，用 Volterra 级数方法进行非线性网络和系统的辨识、校正等方面则需要获取时域 Volterra 核。本部分旨在求取时域 Volterra 核。非线性网络的时域 Volterra 核代数求取算法尤其易于用计算机来完成。

由命题 1 可知，相应于非线性网络 $n$ 阶输出的辅助代数表示(10)式，该网络的 $n$ 阶输出 $y_n(t)$ 应为：

$$y_n(t)=\int_0^t\int_0^{\tau_u}\cdots\int_0^{\tau_2}\Big[\sum_i W_j f_{j0}(t-\tau_n)\cdots f_{j(n-1)}(\tau_2-\tau_1)\Big]\cdot\prod_{i=1}^{n}u(\tau_i)d\tau_i$$

其中 $G_{jl}(x_0)=\bar{G}[f_{jl}(t)]$，$0\leqslant l\leqslant n-1$。

对于时不变非线性网络 NL，其 $n$ 阶输出 $y_n(t)$ 可表示为：

$$y_n(t)=\int_0^t\int_0^{\tau_n}\cdots\int_0^{\tau_2} h_n^{\rm reg}(\tau_2-\tau_1,\cdots,\tau_n-\tau_{n-1},t-\tau_n)\prod_{i=1}^{n}u(\tau_i)d\tau_i \quad (11)$$

$h_n^{\rm reg}(\cdot)$ 是网络 NL 的 $n$ 阶规范形 Volterra 核。显然有：

**命题 3** 相应于非线性网络 $n$ 阶输出的辅助代数表示(10)式，非线性网络的 $n$ 阶规范形 Volterra 核

$$h_n^{\rm reg}(\tau_2-\tau_1,\cdots,\tau_n-\tau_{n-1},t-\tau_n)=\sum_i W_j\cdot f_{j0}(t-\tau_n)\cdots f_{j(n-1)}(\tau_2-\tau_1) \quad (12)$$

其中 $\sum_i$ 是关于 $j$ 的有限和式，$W_j \in \boldsymbol{C}$. $G_{jl}(x_0) = \bar{G}[f_{jl}(t)]$，$(0 \leqslant l \leqslant n-1)$.

求出网络的 $n$ 阶规范形 Volterra 核后，则可列写出网络的 $n$ 阶三角形 Volterra 核 $h_n^{\text{tri}}(\cdot)$ 和 $n$ 阶对称形 Volterra 核 $h_n^{\text{sym}}(\cdot)$ 为

$$h_n^{\text{tri}}(\tau_1, \cdots, \tau_n) = \sum_j W_j f_{j0}(\tau_n) \cdot f_{j1}(\tau_{n-1} - \tau_n) \cdots f_{j(n-1)}(\tau_1 - \tau_2) \tag{13}$$

$$\begin{aligned} h_n^{\text{sym}}(\tau_1, \cdots, \tau_n) &= \text{SYM}[h_n^{\text{tri}}(\tau_1, \cdots, \tau_n)] \\ &\triangleq \frac{1}{n!} \sum_{\tau_1, \cdots, \tau_n \text{ 全排列}} h_n^{\text{tri}}(\tau_1, \cdots, \tau_n) \end{aligned} \tag{14}$$

$f_{jl}(t)$ 与 $G_{jl}(x_0)$ 构成一修改 Laplace 变换对. 为书写简单，不妨记作一般形式 $\{f(t), G(x_0)\}$. 借助于修改 Laplace 变换的性质，应有：

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} G\left(\frac{1}{s}\right)\right] \tag{15}$$

如前所述，$G(x_0)$ 是关于 $x_0$ 的有理式，并且

$$\frac{1}{s} G\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{s^m}{(s+a_0)^{n_0}(s+a_1)^{n_1}\cdots(s+a_i)^{n_i}}$$

$m, n_0, \cdots, n_i$ 都是正整数，$m \leqslant n_0 + n_1 + \cdots + n_i + 1$，常向量 $[a_0, \cdots, a_i]^T \in \boldsymbol{C}^{i+1}$. 将上式进行部分分式分解：

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} G\left(\frac{1}{s}\right) = Ms + N + \frac{M_{0n_0}}{(s+a_0)^{n_0}} + \cdots + \frac{M_{01}}{s+a_0} + \cdots \\ + \frac{M_{in_i}}{(s+a_i)^{n_i}} + \cdots + \frac{M_{i1}}{s+a_i} \end{aligned} \tag{16}$$

很容易确定出待定常数 $M, N, M_{0n_0}, \cdots, M_{01}, \cdots, M_{in_i}, \cdots, M_{i1}$，则

$$\begin{aligned} f(t) = M\dot{\delta}(t) + N\delta(t) + M_{01} \cdot \exp(-a_0 t) + \cdots \\ + M_{0n_0} \frac{t^{n_0 - 1}}{(n_0 - 1)!} \exp(-a_0 t) + \cdots + M_{i1}\exp(-a_i t) + \cdots \\ + M_{in_i} \frac{t^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} \cdot \exp(-a_i t) \end{aligned} \tag{17}$$

非线性网络 $n$ 阶时域 Volterra 核编列算法：

(1) $n = 1$;

(2) 调出非线性网络 $n$ 阶输出的辅助代数表示：

$$Y_n(x_0, x_1) = \sum_j W_j G_{j0}(x_0) x_1 G_{j1}(x_0) \cdots G_{j(n-1)}(x_0) x_1;$$

(3) 如 $Y_n(x_0, x_1) = 0$，则转 (7)，否则 $j = 1$;

(4) $l = 0, n-1$，由 (16)，(17) 两式所示的待定系数法求取

$$f_{jl}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} G_{jl}\left(\frac{1}{s}\right)\right];$$

(5) 如 $j$ 不等于有限和式 $\sum_j$ 的项数，$j = j + 1$，转 (4)；否则

(6) 按 (12)，(13) 式输出 $n$ 阶 Volterra 核；

(7) 如$n$满足，则暂停；否则 $n=n+1$，转(2).

## 四、非线性传递函数的代数编列算法

对于非线性网络 NL，其$n$阶非线性传递函数的表达形式并不是唯一的. 通常的$n$阶非线性传递函数可表示成规范形 $H_n^{reg}(\cdot)$，三角形 $H_n^{tri}(\cdot)$ 和对称形 $H_n^{sym}(\cdot)$. 虽然它们都表征了非线性网络的性质，但在讨论不同的非线性问题时，则各有所长. 文献[1]提出了对称形非线性传递函数的编列算法. 但是对称形非线性传递函数不易转化成三角形和规范形非线性传递函数，因而不便对非线性网络作较全面的分析. 非线性传递函数的代数编列算法则可得到这三种形式的非线性传递函数.

**命题4**　对于非线性网络 NL，设其$n$阶输出的辅助代数表示为:

$$Y_n(x_0,x_1)=\sum_j W_j G_{j0}(x_0)x_1 G_{j1}(x_0)x_1\cdots G_{j(n-1)}(x_0)x_1$$

则网络 NL 的$n$阶规范形、三角形和对称形非线性传递函数分别是:

$$H_n^{reg}(s_1,\cdots,s_n)=\sum_j W_j\left[\frac{1}{s_n}G_{j0}\left(\frac{1}{s_n}\right)\right]\cdots\left[\frac{1}{s_1}G_{j(n-1)}\left(\frac{1}{s_1}\right)\right] \tag{18}$$

$$H_n^{tri}(s_1,\cdots,s_n)=\sum_j W_j\left[\frac{1}{s_1+\cdots+s_n}G_{j0}\left(\frac{1}{s_1+\cdots+s_n}\right)\right]\cdots\cdot\left[\frac{1}{s_1}G_{j(n-1)}\left(\frac{1}{s_1}\right)\right] \tag{19}$$

$$H_n^{sym}(s_1,\cdots,s_n)=\mathrm{SYM}[H_n^{tri}(s_1,\cdots,s_n)]\triangleq\frac{1}{n!}\sum_{s_1,\cdots,s_n\text{全排列}}H_n^{tri}(s_1,\cdots,s_n) \tag{20}$$

**证明**　由非线性传递函数的定义(3)式，分别求$n$阶规范形、三角形和对称形时域 Volterra 核的$n$维 Laplace 变换. 根据(12)，(13)和(14)式分别可得到:

$$H_n^{reg}(s_1,\cdots,s_n)=\sum_j W_j F_{j0}(s_n)\cdots F_{j(n-1)}(s_1)$$

$$H_n^{tri}(s_1,\cdots,s_n)=\sum_j W_j F_{j0}(s_1+\cdots+s_n)\cdots F_{j(n-1)}(s_1)$$

$$H_n^{sym}(s_1,\cdots,s_n)=\mathrm{SYM}\,[H_n^{tri}(s_1,\cdots,s_n)]$$

其中 $F_{jl}(s)=\mathscr{L}[f_{jl}(t)]$，$0\leqslant l\leqslant n-1$，$1\leqslant j\leqslant J$，$J$ 是有限和式$\sum\limits_j$ 的项数；而 $F_{jl}(s)=\frac{1}{s}G_{jl}\left(\frac{1}{s}\right)$，可知(18)，(19)，(20)式成立.

非线性网络 NL 的$n$阶非线性传递函数编列算法:

(1) $n=1$;

(2) 调出非线性网络$n$阶输出的辅助代数表示 $Y_n(x_0,x_1)$;

(3) 如 $Y_n(x_0,x_1)=0$，则转(7)；否则 $j=1$;

(4) $k=0$，$n-1$，遍历 $G_{jk}(x_0)$，并对 $x_0$ 作相应修改;

(5) 如$j$不等于有限和式$\sum\limits_j$的项数，则 $j=j+1$，转(4)；否则

(6) 按 (18)，(19) 两式输出网络的 $n$ 阶非线性传递函数；

(7) 如 $n$ 满足，暂停；否则 $n = n + 1$，转(2)。

在得到非线性网络 $n$ 阶输出的辅助代数表示 (10) 式后，便可由上算法列写出网络的 $n$ 阶非线性传递函数。非线性网络 Volterra 级数的辅助代数表示方法没有拘泥于对称形非线性传递函数的表示形式，拼弃了对称化运算。因而本文所提出的非线性传递函数代数编列算法不仅适合于用计算机完成，而且易于得到较高阶的非线性传递函数。

考虑一非线性网络 $\boldsymbol{T}$，网络输入为 $u(t)$，输出为 $y(t)$。网络运动方程是

$$\dot{y}(t) + k_1 y(t) + \sum_{i=2}^{m} k_i y^i(t) = u(t), \quad k_1, \cdots, k_m \in \boldsymbol{C}.$$

非线性传递函数的代数编列算法和基于谐波输入原理的非线性传递函数编列算法[1]都能求得非线性网络的 $n$ 阶非线性传递函数。如果在求取网络 $\boldsymbol{T}$ 的各阶非线性传递函数的过程中不合并相重的表示项，由这两种方法所求出的 $n$ 阶非线性传递函数的表示项数则不同。表1对网络 $\boldsymbol{T}$ 的 $n$ 阶非线性传递函数的表示项数进行了比较。可以看出：在用非线性传递函数的代数编列算法求取网络的 $n$ 阶非线性传递函数时，非线性传递函数的表示项数的增长速度相对较慢。因而在求取较高阶的非线性传递函数时，非线性网络的代数编列算法可大大节省计算时间和存贮空间。

表 1

| $H_n(\cdot)$ 项数 \ 阶数 | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ | $n=5$ |
|---|---|---|---|---|
| 谐波原理算法[1,2] | 1 | 7 | 217 | 27961 |
| 辅助代数算法 | 2 | 14 | 222 | 4410 |

**例题**　在图 2 所示的非线性网络中，$i(t)$ 是网络激励，电容电压 $v$ 是网络输出，非线性电阻的成份关系：$i = f(v) = 2v^2$

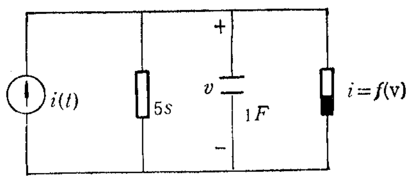


图 2

网络输出 $v(t)$ 的 Volterra 级数的辅助代数表示

$$V(x_0, x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x_0, x_1)$$

$$V_1(\cdot) = (1 + 5x_0)^{-1}x_1$$

$$V_2(\cdot) = -4(1 + 5x_0)^{-1}x_0(1 + 10x_0)^{-1}x_1(1 + 5x_0)^{-1}x_1$$

$$V_3(\cdot)=16(1+5x_0)^{-1}x_0(1+10x_0)^{-1}x_1(1+5x_0)^{-1}x_0(1+10x_0)^{-1}x_1(1+5x_0)^{-1}x_1$$
$$+48(1+5x_0)^{-1}x_0(1+10x_0)^{-1}x_0(1+15x_0)^{-1}x_1$$
$$\cdot(1+10x_0)^{-1}x_1(1+5x_0)^{-1}x_1$$

由非线性网络的 $n$ 阶时域 Volterra 核编列算法，可以得到网络的各阶规范形 Volterra 核

$$h_1^{\text{reg}}(t-\tau_1)=\exp[-5(t-\tau_1)]h_2^{\text{reg}}(\tau_2-\tau_1,\ t-\tau_2)$$
$$=0.8[\exp(-5t+5\tau_1)-\exp(-10t+5\tau_2+5\tau_1)]$$
$$\cdot h_3^{\text{reg}}(\tau_3-\tau_2,\tau_2-\tau_1,t-\tau_3)$$
$$=0.64[\exp(-5t+5\tau_3)-\exp(-10t+10\tau_3)]$$
$$\cdot[\exp(-5\tau_3+5\tau_1)-\exp(-10\tau_3+5\tau_2+5\tau_1)]$$
$$+0.96[\exp(-5t+5\tau_3)-2\exp(-10t+10\tau_3)$$
$$+\exp(-15t+15\tau_3)]\cdot\exp(-10\tau_3+5\tau_2+5\tau_1)$$
$$h_4^{\text{reg}}(\cdot)=\cdots$$

网络的各阶三角形 Volterra 核

$$h_1^{\text{tri}}(\tau_1)=\exp(-5\tau_1)$$
$$h_2^{\text{tri}}(\tau_1,\tau_2)=-0.8[\exp(-5\tau_2)-\exp(-10\tau_2)]\cdot\exp(5\tau_2-5\tau_1)$$
$$h_3^{\text{tri}}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)=0.64[\exp(-5\tau_3)-\exp(-10\tau_3)]$$
$$\cdot[\exp(-5\tau_2+5\tau_3)-\exp(-10\tau_2+10\tau_3)]$$
$$\cdot\exp(-5\tau_1+5\tau_2)+0.96[\exp(-5\tau_3)-2\cdot\exp(-10\tau_3)$$
$$+\exp(-15\tau_3)]\cdot\exp(-10\tau_2+10\tau_3)$$
$$\cdot\exp(-5\tau_1+5\tau_2)$$
$$h_4^{\text{tri}}(\cdot)=\cdots$$

由非线性网络 $n$ 阶非线性传递函数的代数编列算法，可以得到网络的各阶规范形非线性传递函数。

$$H_1^{\text{reg}}(s_1)=\frac{1}{s_1+5}$$
$$H_2^{\text{reg}}(s_1,s_2)=-\frac{4}{(s_1+5)(s_2+5)(s_2+10)}$$
$$H_3^{\text{reg}}(s_1,s_2,s_3)=\frac{16}{(s_1+5)(s_2+10)(s_3+5)(s_3+10)}\left[\frac{1}{s_2+5}+\frac{3}{s_3+5}\right]$$
$$H_4^{\text{reg}}(\cdot)=\cdots$$

对非线性网络的各阶三角形非线性传递函数分别进行对称化运算，便可得到网络的各阶对称形非线性传递函数。

$$H_1^{\text{sym}}(s_1)=\frac{1}{s_1+5}$$
$$H_2^{\text{sym}}(s_1,s_2)=-\frac{2}{(s_1+5)(s_2+5)(s_1+s_2+5)}$$
$$H_3^{\text{sym}}(s_1,s_2,s_3)=\frac{2.6667}{(s_1+5)(s_2+5)(s_3+5)(s_1+s_2+s_3+5)}$$

$$\cdot\left[\frac{1}{s_1+s_2+5}+\frac{1}{s_2+s_3+5}+\frac{1}{s_1+s_3+5}\right]$$

$$H_4^{sym}(\cdot)=\cdots$$

可见，籍助于非线性网络 Volterra 级数表示的代数求解算法，我们不仅可以求出非线性网络 $n$ 阶的时域 Volterra 核和非线性传递函数，而且还可以得到它们的规范形、三角形和对称形三种表示形式。

## 参　考　文　献


[1] L. O. Chua, C. Y. Ng, *Electronic Circuits Syst.*, 3(1979), 255—267.

[2] M. Fleiess, M. Lamnabhi, F. Lamnabhi-Lagrrigue, *IEEE Trans. on CAS,* CAS-30(1983), 554—570.

[3] W. J. Rugh, Nonlinear System Theory, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MA. 1981, pp. 12—190.

[4] 王柏勇，非线性网络的辅助代数解析法，中国电机工程学会电路理论及应用分委会首届学术交流会论文集，武汉，1986 年 6 月，pP. 25—31.


# AN ALGEBRAIC ALGORITHM FOR VOLTERRA SERIES EXPRESSION OF NONLINEAR NETWORK


Wang Baiyong

*(Yunnan Institute of Technology, Kunming)*

Yang Shan

*(Tianjin University, Tianjin)*



**ABSTRACT** It is important to solve the $n$th order Volterra kernel or nonlinear transfer function in describing nonlinear network by Volterra series. Based on the auxiliary algebraic expression of the Volterra series, in this paper, an algebraic algorithm is proposed to evaluate the $n$th order Volterra kernel and nonlinear function in regular, triangular and symmetric forms. In addition, the complexity of the algebraic algorithm is reduced.



**KEY WORDS** Nonlinear network; Volterra series; Algebraic algorithm