

拓展图的一般理论*

胡宗煌

(山东大学电子系)

提 要

本文提出拓展图的统一理论。文中证明了两个矩阵运算的数学定理。以此为基础,给出矩阵行列式、代数余子式和线性方程组的拓展图算法,并就拓展科茨(Coates)和拓展梅森(Mason)图进行了拓扑简化。拓展图理论的建立使现行网络拓扑理论的结构大为缩减。

一、引 言

在频域内线性集总是常网络特性可用如下矩阵方程来描述:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}x_{n+1}, \quad (1)$$

式中 $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$, $\mathbf{B} = [b_1 b_2 \cdots b_n]^T$, $\mathbf{X} = [x_1 x_2 \cdots x_n]^T$ 和 $x_{n+1} = 1$ 。 T 表示转置。 \mathbf{X} 的元素是未知量,对回路分析它们是电流,对节点或割集分析是电压,而对混合分析是电流和电压的组合。根据克拉默(Cramer)法则得到

$$\frac{x_i}{x_{n+1}} = \frac{\sum_{k=1}^n b_k \Delta_{ki}}{\det \mathbf{A}} \triangleq \frac{N}{D}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

其中 Δ_{ki} 是元素 a_{ki} 的代数余子式, $\det \mathbf{A}$ 是 \mathbf{A} 的行列式。

当 \mathbf{A} 的元素除含复变量 s 外,尚含有符号变量(例如 R, C 及 β 等)时常用拓扑法来计算 $\det \mathbf{A}$ 和 Δ_{ki} 。现有的拓扑方法都采用不同的拓扑公式来计算 $\det \mathbf{A}$ 和 Δ_{ki} 。例如,用陈氏(Chen)有向图计算 $\det \mathbf{A}$ 及 Δ_{ki} 要分别求有向树和有向 2 树;用科茨图要求连接和单连接,用梅森图则需求各阶回路和前回路。林氏(P. M. Lin)在文献[1]中指出,从计算机程序设计来看,十分希望用一种拓扑算法便能同时得到(2)式中的 N 和 D 。他推广了“封闭系统”概念,提出构造封闭系统以实现单一拓扑算法的基本原理。林氏法的主要缺点是,建立封闭系统的拓扑图比较复杂,且不易直接用于各类拓扑图的分析。现有实现单一算法的具体方式有两种:(1)网络拓展^[2]:在网络上加入某些给定值元件;(2)图形拓展^[1,3,4]:在拓扑图上添加某些给定权的边。本文基于文献[3]和[4],将给出图形拓展的一般理论,得到适用于各类图以实现单一算法的普遍方法,并克服了林氏法的缺点。

* 1985年6月15日收到,1986年2月14日修改定稿。

二、基本定理

定理 1 设 $W = [W_{ij}]_{n \times n}$ 和 $\epsilon_p = [0 \cdots 0 1 0 \cdots 0]_{1 \times n}$, 元素 1 位于 ϵ_p 的第 p 行. 若 $\hat{W} = W + F$, 且 $F = K\epsilon_i\epsilon_j^T$, K 为异于 W 的各元素之符号, 则

$$\det \hat{W} = \det W + K\Delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n, \quad (3)$$

式中 Δ_{ij} 是元素 W_{ij} 的代数余子式.

证明 由于

$$F = K\epsilon_i\epsilon_j^T = \begin{bmatrix} & & & j \text{ 列} \\ & & & \vdots \\ & & & K \\ & & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots \\ & & & i \text{ 行} \\ & & & \vdots \\ & & & \vdots \\ & & & \vdots \\ & & & \vdots \end{bmatrix}_{n \times n}$$

把 \hat{W} 的行列式按第 i 行作拉普拉斯 (Laplace) 展开得

$$\begin{aligned} \det \hat{W} &= [W_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + (W_{ij} + K)\Delta_{ij} + \cdots + W_{in}\Delta_{in}] \\ &= (W_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + W_{ij}\Delta_{ij} + \cdots + W_{in}\Delta_{in}) + K\Delta_{ij}, \end{aligned}$$

故得

$$\det \hat{W} = \det W + K\Delta_{ij}.$$

定理证毕

引理 设 $n \times n$ 矩阵 M 被分划为

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix},$$

其中 M_{11} 、 M_{12} 、 M_{21} 及 M_{22} 的阶分别是 $r \times r$ 、 $r \times (n-r)$ 、 $(n-r) \times r$ 及 $(n-r) \times (n-r)$, $1 \leq r \leq n-1$. 若 M_{11} 是非奇异的, 则

$$\det M = \det M_{11} \det (M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}). \quad (4)$$

引理的证明见文献[5], 有人称(4)式为舒尔 (Schur) 公式.

定理 2 对矩阵方程(1)式构造增广矩阵

$$W = \left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline \mathbf{0}_1 & 0 \end{array} \right]_{(n+1) \times (n+1)}, \quad (5)$$

式中 $\mathbf{0}_1$ 是 n 维行零矢量. 设 A 是非奇异的, $\epsilon_p = [0 \cdots 0 1 0 \cdots 0]_{1 \times (n+1)}$, 元素 1 处于 ϵ_p 的第 p 行. 若 $\hat{W} = W + F$, 且 $F = K\epsilon_{n+1}\epsilon_i^T + \epsilon_{n+1}\epsilon_{n+1}^T$, $i = 1, 2, \cdots, n$, K 为异于 W 的各元素之符号, 则

$$\det \hat{W} = \det A + K \sum_{k=1}^n b_k \Delta_{ki}, \quad (6)$$

其中 Δ_{ki} 是 A 的元素 a_{ki} 的代数余子式.

证明 由于

$$F = K\epsilon_{n+1}\epsilon_i^T + \epsilon_{n+1}\epsilon_{n+1}^T = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_1^T \\ \hline K\epsilon_i^T & 1 \end{array} \right]_{(n+1) \times (n+1)},$$

式中 $\mathbf{0}_2$ 是 n 阶零方阵, 则

$$\hat{W} = W + F = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ K\mathbf{e}_i^T & 1 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}. \quad (7)$$

应用舒尔公式得

$$\det \hat{W} = \det \mathbf{A} \det(1 + K\mathbf{e}_i^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}), \quad (8)$$

其中逆矩阵

$$\mathbf{A}^{-1} = (1/\det \mathbf{A}) \text{adj}[\mathbf{A}].$$

这里 $\text{adj}[\mathbf{A}] = [\Delta_{ij}]^T$ 是 \mathbf{A} 的伴随矩阵, 故

$$\begin{aligned} K\mathbf{e}_i^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} &= (K/\det \mathbf{A}) [\Delta_{1i}, \Delta_{2i}, \dots, \Delta_{ni}] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= (K/\det \mathbf{A}) \sum_{k=1}^n b_k \Delta_{ki} \det(1 + K\mathbf{e}_i^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) \\ &= 1 + (1/\det \mathbf{A}) K \sum_{k=1}^n b_k \Delta_{ki}. \end{aligned} \quad (9)$$

把(9)式代入(8)式得到

$$\det \hat{W} = \det \mathbf{A} + K \sum_{k=1}^n b_k \Delta_{ki}. \quad \text{定理证毕}$$

三、拓扑计算

定义 1 矩阵 $\mathbf{W} = [W_{ij}]_{n \times n}$ 的伴随图是有限标号赋权图, 用符号 $G(V, E, f)$ 表示. 这里 V 是顶点集, 各顶点用 $1, 2, \dots, l, \dots, n$ 标号, $|V| = n$. 顶点标号 l 与 \mathbf{W} 的第 l 行相对应; E 是边集, 映射函数 $f: \{(i, j) | i, j = 1, 2, \dots, n; (i, j) \in E\} \rightarrow \{W_{ij} | i, j = 1, 2, \dots, n\}$.

伴随图是矩阵的图形表示. 若 $(i, j) \in E$, 映射关系可表示为

$$(i, j) \mapsto f((i, j)), \quad (10)$$

并称 $f((i, j))$ 为边 (i, j) 的权. 通过函数 f 把 \mathbf{W} 的元素分配给边作为权, 二者有一对一关系. 不同的映射函数得到各异的拓扑图, 它既可是有向图(例如梅森 (Mason) 图)或无向图(例如表示对称矩阵的麦克斯韦 (Maxwell) 图), 也可是混合图(例如由无源边和有源边组成的混合图). 以后我们把 \mathbf{W} 的伴随图简记为 $G[\mathbf{W}]$.

对伴随图施行不同的拓扑运算得到^[6]

$$\begin{aligned} \det \mathbf{W} &= \mathcal{F}(G[\mathbf{W}]), \\ \Delta_{ij} &= \mathcal{D}(G[\mathbf{W}]), \end{aligned} \quad (11)$$

式中算子 \mathcal{F} 和 \mathcal{D} 分别表示为求矩阵行列式及其代数余子式对 $G[\mathbf{W}]$ 进行的拓扑运算, 简称为 \mathcal{F} 运算和 \mathcal{D} 运算.

根据定理 1 和 2, 并运用(11)式直接得到如下定理.

定理 3 设 $\hat{W} = W + F$, $G[\hat{W}]$ 是 \hat{W} 的伴随图, 这样, (1) 若 $\mathbf{W} = [W_{ij}]$ 和

$F = K\epsilon_i\epsilon_j^T$, 则

$$\mathcal{S}(G[\hat{W}]) = \det W + K\Delta_{ij}; \quad (12)$$

(2)若 W 是 $AX = B_{x_{n+1}}$ 的增广矩阵和 $F = K\epsilon_{n+1}\epsilon_n^T + \epsilon_{n+1}\epsilon_{n+1}^T$, 且 A 是非奇异的, 则

$$\mathcal{S}(G[\hat{W}]) = \det A + K \sum_{k=1}^n b_k \Delta_{ki}. \quad (13)$$

定理 3 表明, 只需用 \mathcal{S} 运算便能同时得到矩阵行列式值及其代数余子式. 对于可解网络可用 \mathcal{S} 运算来解描述网络特性的线性方程组. 应用定理 3 的关键在于构造 $G[\hat{W}]$. 下面我们会看到, $G[\hat{W}]$ 可由对 $G[W]$ 进行拓展得到. 因而 $G[\hat{W}]$ 是 $G[W]$ 的拓展图 $\hat{G}[W]$ (拓展图定义见文献[4]).

定义 2 若 $R \subset G[W]$, 且满足拓扑性质 P , $f(R) = \prod_{(i,j) \in R} f((i,j))$; 当 R 是孤立顶点时, $f(R) = 1$, 称 $f(R)$ 是满足 P 的子图 R 的权.

显然, 子图的权是边的权((10)式)概念的推广. 所谓拓扑性质是指图的顶点与边的关联关系.

定义 3 边的分解和约化: (1) 若把边 (i,j) 用并行边 $(i,j)_1, \dots, (i,j)_x, \dots$ 代替, 使得 $f((i,j)) = \sum_x f((i,j)_x)$, 则称为边的分解; (2) 若把并行边 $(i,j)_1, \dots, (i,j)_x, \dots$ 用一条边 (i,j) 代替, 使得 $\sum_x f((i,j)_x) = f((i,j))$, 则称为边的约化.

边的约化是分解的逆过程, 两者在本质上都是对图的一种运算.

定理 4 设 $\mathcal{S}(G[W]) = \mu + \sum_R L(R)f(R)$ 和 $R \subset G[W]$. 子图 R 具有拓扑性质 P , μ 是与 R 无关的常量, $L(R)$ 是与 P 有关的量, 则图 $G[W]$ 对于 \mathcal{S} 运算可施行边的分解和约化.

证明 令 $(i,j) \in R$ 和 $R' = R - (i,j)$, 则 $f(R) = f((i,j))f(R')$. 不失一般性, 设 $f((i,j)) = f((i,j)_1) + f((i,j)_2)$, 且 $(i,j)_1 \mapsto f((i,j)_1)$ 以及 $(i,j)_2 \mapsto f((i,j)_2)$. 由于 $R = (i,j) \cup R'$, 并满足是拓扑性质 P , 则 $R_1 = (i,j)_1 \cup R'$ 和 $R_2 = (i,j)_2 \cup R'$ 都满足拓扑性质 P , 都属于 \mathcal{S} 运算中的子图, 故 $L(R_1) = L(R_2) = L(R)$. 在有并行边 $(i,j)_1$ 和 $(i,j)_2$ 的图上进行运算, 得到

$$\begin{aligned} L(R_1)f(R_1) + L(R_2)f(R_2) &= L(R_1)f((i,j)_1)f(R') + L(R_2)f((i,j)_2)f(R') \\ &= L(R)[f((i,j)_1) + f((i,j)_2)]f(R') \\ &= L(R)f(R), \end{aligned}$$

因而 $G[W]$ 对于 \mathcal{S} 运算可进行边的分解. 同理可证, $G[W]$ 对于 \mathcal{S} 运算亦可施行边的约化. 定理证毕.

根据科茨图、梅森图、陈氏有向图等^[6]的 \mathcal{S} 运算规则, 它们都满足定理 4 的条件, 因而对 \mathcal{S} 运算都可进行边的分解和约化. 这是把 $G[W]$ 转换为拓展图 $\hat{G}[W]$ 的理论依据.

例 设 W 是不定矩阵, W_{ij} 是从 W 删去第 i 行和第 j 列所得的子矩阵, 现构造求 $\det W_{ij}$ 和 $\Delta_{ij, st}$ 的拓展图 $\hat{G}[W]$, 这里 $\Delta_{ij, st}$ 是 W 的二阶代数余子式.

根据定理 3 得, $\hat{W}_{ij} = W_{ij} + F_{ij}$ 和 $F_{ij} = K\epsilon_i\epsilon_j^T$. 设

$$F = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \dots & K \dots -K \dots \\ \vdots & \vdots \\ \dots & K \dots K \dots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} s \text{ 行} \\ \\ \\ i \text{ 行} \\ \\ \end{matrix},$$

t 列 j 列

F 是不定矩阵，则 $\hat{W} = W + F$ 也是不定矩阵。按陈氏有向图的映射关系^[6]，便获得

$G[\hat{W}]$ 。在 $G[\hat{W}]$ 上只有边 (s, t) 、 (i, j) 、 (s, j) 和 (i, t) 的权与 F 的非零元素有关。例如， $f((s, t)) = -(W_{st} + K)$ 。将 (s, t) 分解为两条并行边，使得 $f((s, t)_1) = -W_{st}$ 和 $f((s, t)_2) = -K$ ，则

$$f((s, t)) = f((s, t)_1) + f((s, t)_2).$$

对其他三条边也作类似的分解，则 $G[\hat{W}]$ 便由 $G[W]$ 和外加四条下边为 2 的有向边组成（见图 1），即 $G[\hat{W}] = \hat{G}[W] = G[W] \cup (s, t)_2 \cup (i, j)_2 \cup (s, j)_2 \cup (i, t)_2$ 和 $f((s, t)_2) = f((i, j)_2) = -K, f((s, j)_2) = f((i, t)_2) = K$ 。这与文献[4]所得结果相同。

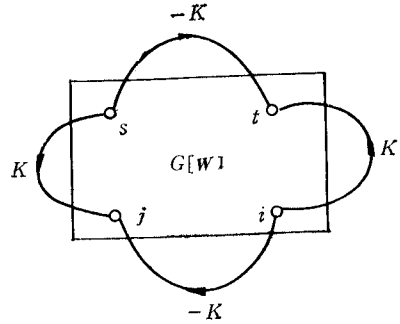


图 1 计算不定矩阵的拓展图 $\hat{G}[W]$

四、科茨图和梅森图的拓展

1. 拓展科茨图

对于科茨图定理 4 成立。根据定理 3 的 (13) 式以及科茨图和 W 的映射规则，立即可得到计算 $\det W$ 和 Δ_{ij} 的 $G_c[\hat{W}]$ ，如图 2 所示。用运算符表示，则为 $G_c[\hat{W}] = \hat{G}_c[W] = G_c[W] \cup (j, i)_2$ 和 $f((j, i)_2) = K$ 。

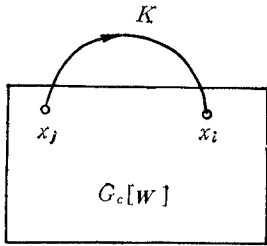


图 2 计算 $\det W$ 和 Δ_{ij} 的拓展图

现考虑如何用拓展科茨图解线性方程组。增广矩阵 W （见(5)式）的伴随科茨图 $G_c[W]$ 是(1)式的科茨图^[6]。根据定理 3 的 (13) 式得到的拓展科茨图 $\hat{G}_c[W]$ 示于图 3，即 $G_c[\hat{W}] = \hat{G}_c[W] = G_c[W] \cup (i, n+1)_2 \cup (n+1, n+1)_2, f((i, n+1)_2) = K$ 和 $f((n+1, n+1)_2) = 1$ 。

又由文献[6]，有

$$\mathcal{T}(\hat{G}_c[W]) = (-1)^{n+1} \sum_{\hat{H}} (-1)^{L_{\hat{H}}} f(\hat{H}),$$

式中 \hat{H} 是 $\hat{G}_c[W]$ 的连接（亦称 1 因子）， $L_{\hat{H}}$ 是 \hat{H} 的有向回路数。现用 H 和 $H(K)$ 分别表示不含和含有权为 K 的边的连接， L_H 和 $L_{H(K)}$ 分别是 H 和 $H(K)$ 的有向回路数，则

$$\mathcal{T}(\hat{G}_c[W]) = (-1)^{n+1} \sum_H (-1)^{L_H} f(H) + (-1)^{n+1} \sum_{H(K)} (-1)^{L_{H(K)}} f(H(K)).$$

根据(13)式，并考虑到(2)式得到

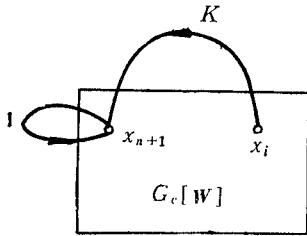


图3 拓展图 $\hat{G}_c[W]$

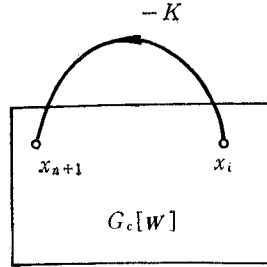


图4 简化拓展图 $\hat{G}_{cs}[W]$

$$x_i/x_{i+1} = (1/K) \sum_{H(K)} (-1)^{L_{H(K)}} f(H(K)) / \sum_H (-1)^{L_H} f(H) \triangleq N_1/D_1. \quad (14)$$

定理 5 设 $\hat{G}_{cs}[W] = G_c[W] \cup (i, n+1)_2$ 和 $f((i, n+1)_2) = -K$, 则 $\hat{G}_{cs}[W]$ 是计算式(14)的拓展图.

证明 $\hat{G}_{cs}[W]$ 示于图4. 对 $\hat{G}_{cs}[W]$ 进行 \mathcal{S} 运算, 并将含 K 连接 $H_s(K)$ 和不含 K 连接 H_s 分离, 得

$$N_s = (1/K) \sum_{H_s(K)} (-1)^{L_{H_s(K)}} f(H_s(K)), \quad D_s = \sum_{H_s} (-1)^{L_{H_s}} f(H_s). \quad (15)$$

因为连接是 1 度正则子图, 对于顶点 $(n+1)$ 有 $d^+(n+1) = d^-(n+1) = 1$, 这里 d^+ 和 d^- 分别表示顶点的出度和入度. 这样, $\hat{G}_c[W]$ 上的自环 $(n+1, n+1)_2$ 只会出现在 H 中, 而 H_s 则包含孤立顶点 $(n+1)$, (这是因为在 $\hat{G}_{cs}[W]$ 上与顶点 $(n+1)$ 关联的边, 除边 $(i, n+1)_2$ 外, 其余皆为射出边) 故 $H = H_s \cup (n+1, n+1)_2$. 又 $f((n+1, n+1)_2) = 1$, 则

$$f(H) = f(H_s \cup (n+1, n+1)_2) = f((n+1, n+1)_2) f(H_s) = f(H_s); \quad (16)$$

而 H 比 H_s 多一个自环 $(n+1, n+1)_2$, 则

$$L_{H_s} = L_H - 1. \quad (17)$$

再者, $f(H(K)) = K f(H(K) - (i, n+1)_2)$ 和 $f(H_s(K)) = -K f(H_s(K) - (i, n+1)_2)$. 因为 $(n+1, n+1)_2$ 不出现在 $H(K)$ 中, 则

$$f(H(K) - (i, n+1)_2) = f(H_s(K) - (i, n+1)_2),$$

故得

$$f(H_s(K)) = -f(H(K)), \quad L_{H_s(K)} = L_{H(K)}. \quad (18)$$

把(16)–(18)式代入(15)式, 并考虑到(14)式, 便得到

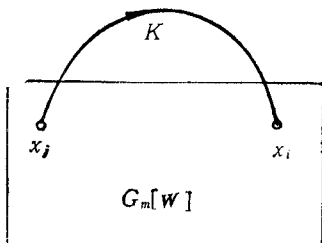
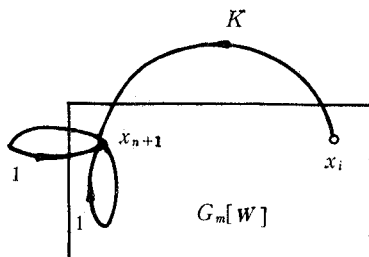
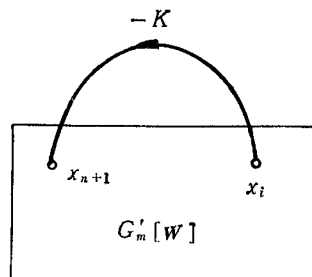
$$N_s/D_s = N_1/D_1.$$

定理证毕

2. 拓展梅森图

由于 W 的梅森图 $G_m[W] = G_c[I_n + W]$, I_n 是 n 阶单位矩阵^[6], 则计算 $\det W$ 和 Δ_{ij} 的 $G_m[\hat{W}] = \hat{G}_m[W] = G_m[W] \cup (j, i)_2$, $f((j, i)_2) = K$, 如图5所示.

增广矩阵 W (见(5)式) 的伴随梅森图 $G_m[W]$ 是(1)式的梅森图, 且 $G_m[W] = G_c[I_{n+1} + W]$, I_{n+1} 是 $n+1$ 阶单位矩阵^[6]. 定理3的(13)式中 \hat{W} 的伴随梅森图 $G_m[\hat{W}] = G_c[I_{n+1} + W + F]$, 因而 $G_m[\hat{W}]$ 也可由对 $G_m[W]$ 进行拓展而得, 即

图5 求 $\det W$ 和 Δ_{ij} 的拓展图图6 拓展图 $\hat{G}_m[W]$ 图7 简化拓展图 $\hat{G}_{ms}[W]$

$G_m[\hat{W}] = \hat{G}_m[W] = G_m[W] \cup (i, n+1)_2 \cup (n+1, n+1)_2$, $f((i, n+1)_2) = K$ 和 $f((n+1, n+1)_2) = 1$. $\hat{G}_m[W]$ 示于图6. 图中还示出 $G_m[W]$ 上顶点 $(n+1)$ 存在的自环 $(n+1, n+1)_1$.

由梅森图的 \mathcal{S} 运算公式得^[6]

$$\mathcal{S}(\hat{G}_m[W]) = (-1)^{n+1} \left[1 + \sum_{\hat{Q}_{il}} (-1)^l f(\hat{Q}_{il}) \right],$$

式中 \hat{Q}_{il} 是 $\hat{G}_m[W]$ 的 l 阶回路集的第 j 个 l 阶回路, $l = 1, 2, \dots$. 用 Q_{il} 和 $Q_{il}(K)$ 分别表示不含和含有权为 K 的边的 l 阶回路, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\hat{G}_m[W]) &= (-1)^{n+1} \left[1 + \sum_{Q_{il}} (-1)^l f(Q_{il}) \right] \\ &\quad + (-1)^{n+1} \sum_{Q_{il}(K)} (-1)^l f(Q_{il}(K)). \end{aligned}$$

根据(13)式,并考虑到(2)式,得

$$x_i/x_{n+1} = (1/K) \sum_{Q_{il}(K)} (-1)^l f(Q_{il}(K)) / \left[1 + \sum_{Q_{il}} (-1)^l f(Q_{il}) \right] \triangleq N_2/D_2. \quad (19)$$

为把 $\hat{G}_m[W]$ 再作简化,先把顶点 x_{n+1} 的两个自环约化为 $(n+1, n+1)$, 并有

$$f((n+1, n+1)) = 2.$$

定理6 设 $G'_m[W] = G_m[W] - (n+1, n+1)_1$ 和 $\hat{G}_{ms}[W] = G'_m[W] \cup (i, n+1)_2$, $f((i, n+1)_2) = -K$, 则 $\hat{G}_{ms}[W]$ 是(19)式的拓展图.

证明 $\hat{G}_{ms}[W]$ 示于图7. 对 $\hat{G}_{ms}[W]$ 施行 \mathcal{S} 运算, 并把含 K 的 l 阶回路 $Q_{il}^{(K)}$ 和不含 K 的 l 阶回路 $Q_{il}^{(0)}$ 相分离, 便得到

$$N_s = (1/K) \sum_{Q_{il}^{(K)}} (-1)^l f(Q_{il}(K)), \quad D_s = 1 + \sum_{Q_{il}^{(0)}} (-1)^l f(Q_{il}^{(0)}). \quad (20)$$

由于 $l \geq 2$ 阶回路是由 l 个顶点不相接的回路组成, 而自环 $(n+1, n+1)$ 和边 $(i, n+1)_2$ 都与顶点 x_{n+1} 相关联, 则 $(n+1, n+1)$ 对 $Q_{il}(K)$ 无贡献, 从而 $f(Q_{il}(K) - (i, n+1)_2) = f(Q_{il}^{(0)}(K) - (i, n+1)_2)$. 又 $f(Q_{il}(K)) = Kf(Q_{il}(K) - (i, n+1)_2)$ 以及 $f(Q_{il}^{(0)}(K)) = -Kf(Q_{il}^{(0)} - (i, n+1)_2)$, 则

$$f(Q_{il}^{(0)}(K)) = -f(Q_{il}(K)). \quad (21)$$

把 Q_{il} 分解为互不相交的两类: 不含自环 $(n+1, n+1)$ 的 $Q_{il}^{(0)}$ 和含自环 $(n+1,$

$n+1$) 的 $Q_{ii}^{(n)}$. 由图 6 和 7 显见 $Q_{ii}^{(n)} = Q_{ii}^{(n)}$. 另外, $Q_{ii}^{(n)}$ 由自环 $(n+1, n+1)$ 和 $Q_{ii}^{(n)}$ 组成, 且 $Q_{ii}^{(n+1)} = Q_{ii}^{(n)} \cup (n+1, n+1), i=1, 2, \dots$, 因而

$$\begin{aligned} D_2 &= 1 - \left[2 + \sum_{Q_{i1}^{(n)}} f(Q_{i1}^{(n)}) \right] + \left[2 \sum_{Q_{i1}^{(n)}} f(Q_{i1}^{(n)}) + \sum_{Q_{i2}^{(n)}} f(Q_{i2}^{(n)}) \right] \\ &\quad - \left[2 \sum_{Q_{i2}^{(n)}} f(Q_{i2}^{(n)}) + \sum_{Q_{i3}^{(n)}} f(Q_{i3}^{(n)}) \right] + \dots \\ &= - \left[1 - \sum_{Q_{i1}^{(n)}} f(Q_{i1}^{(n)}) + \sum_{Q_{i2}^{(n)}} f(Q_{i2}^{(n)}) - \sum_{Q_{i3}^{(n)}} f(Q_{i3}^{(n)}) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

由(19)–(22)式有

$$N_s/D_s = N_2/D_2. \quad \text{定理证毕}$$

定理 5 和 6 给出的结果是很简单的, 即在构造拓展科茨图或拓展梅森图时只需在原图上加一条边, 而且对于梅森图尚可把顶点 x_{n+1} 的自环预先删除.

五、结 论

本文给出的拓展图的一般理论, 提供了计算矩阵行列式、代数余子式和解线性代数方程组仅需要进行 \mathcal{S} 运算的单一算法, 使拓扑法更便于在计算机上实现. 文中构造的增广矩阵与科茨图、梅森图等紧密相联, 故比文献[1]给出的方法更便于应用. 本文的讨论都不涉及 \mathcal{D} 运算, 而且只需添加为数甚少的边便构成拓展图, 所以此拓展图理论的建立, 使现行网络拓扑理论中有关 \mathcal{D} 运算的叙述成为不必要的, 从而使理论结构大为简化, 本文的另一理论成果是把陈氏提出的有向树法直接应用于解线性代数方程组, 详细讨论见文献[7].

参 考 文 献

- [1] P. M. Lin, *IEEE Trans. on CT*, **CT-20**(1973), 732.
- [2] G. E. Alderson et. al., *ibid.*, **CT-20**(1973), 48.
- [3] 胡宗煊等, 山东大学学报(自然科学版), 1984 年第 1 期第 35 页.
- [4] 胡宗煊等, 电子科学学刊, **6**(1985), 180.
- [5] Ф. П. Гантмахер 著, 柯召译, 矩阵论(上卷), 高等教育出版社, 1955, 第 2 章.
- [6] W. K. Chen, *Applied Graph Theory*, Amsterdam: North-Holland, 1976, Chs. 3–4.
- [7] Z. X. Hu (胡宗煊), "Directed tree Solutions to Linear Network Systems" Proc. of Int. Conf. on Computers, Systems and Signal Processing, Bangalore, India, 1984.

A UNIFIED THEORY OF AUGMENTED GRAPH

Hu Zongxuan

(Department of Electronics, Shandong University)

This paper presents a unified theory of augmented graph. Two basic theorems for a matrix are proved. By making use of graph augmentation, evaluation of the determinant and cofactors associated with a matrix is carried out in one single analysis which is referred to the \mathcal{T} -operation, so that is of a set of linear algebraic equations. The augmented Coates graph and Mason graph are topologically simplified. Since the need for the formulas called \mathcal{D} -operation is eliminated, the augmented graph serves as a theoretic basis, on which the existing network topology could be reduced greatly.