

Alpha 稳定分布噪声下级联恒模阵列及其稳定性分析

唐洪 邱天爽

(大连理工大学电子与信息工程学院 大连 116024)

摘要 该文研究 Alpha 稳定分布噪声下级联恒模阵列的稳定性。首先,提出一种新型的信号对消器,把本级阵列捕获的信号从接收数据中消除,并分析了该对消器达到的稳定状态。然后,以韧性的波束形成器和新型的信号对消器组成级联恒模阵列。分析了恒模信号和 Alpha 稳定分布噪声在级联恒模阵列间的传递情况。数值仿真验证了理论分析的结论,并对级联恒模阵列的多信号恢复进行了模拟。

关键词 恒模阵列,波束形成器,信号对消器,同信道信号恢复,Alpha 稳定分布,分数低阶统计量理论

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)08-1439-04

A Robust Cascade Constant Modulus Array in Alpha-Stable Noise Environment and Its Steady-State Analysis

Tang Hong Qiu Tian-shuang

(School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract This paper studies the steady-state of a robust cascade constant modulus(CM) array in alpha-stable distribution noise environment. A new signal canceller is proposed to cancel the captured signal by the previous beamformer. The convergence behavior of the canceller weight vector is examined. The behaviors of signals and alpha-stable noise transmitting along the cascade CM array are investigated. Computer simulations are presented to support this theoretical analysis.

Key words Constant modulus array, Beamformer, Signal canceller, Cochannel signal copy, Alpha-stable distribution, Fractional lower-order statistics theory

1 引言

在文献[1]中已经研究了韧性恒模波束形成器在Alpha稳定分布噪声环境中对单个信号的恢复问题。如果将恒模波束形成器/信号对消器组成的模块级联起来,所得到的多级系统则可分离多个同信道信号,并能估计出它们的波达方向。因此,这种多级恒模阵列在同信道干扰为主要危害的蜂窝式通信系统中具有很好的应用价值。这种级联阵列的多信号恢复方法最早由Shynk等提出^[2-3]。本文将研究Alpha稳定分布噪声环境中的级联恒模阵列,并分析信号和噪声在阵列间的传递行为。

2 信号对消器

从文献[1]知道,韧性恒模波束形成器达到稳定以后阵列输出主要包含了某个被捕获的信号 $s_i(k)$ 。信号对消器把 $s_i(k)$ 从阵列接收数据 $\mathbf{x}(k)$ 中消除,使 $\mathbf{x}(k)$ 中不再含有 $s_i(k)$ 。信号对消器的结构如图 1 所示。

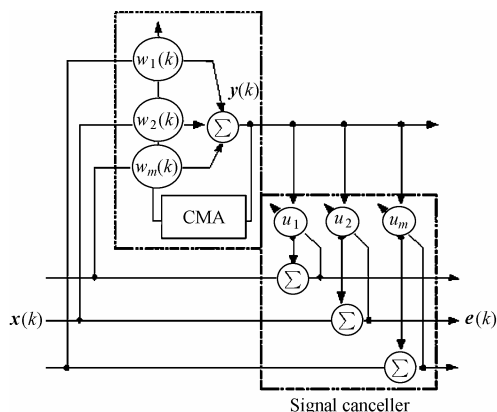


图 1 自适应信号对消器

Fig.1 Adaptive signal canceller

信号对消器通过自适应地调节权向量 $\mathbf{u}(k)=[u_1(k), \dots, u_m(k)]^T$, 从 $\mathbf{x}(k)$ 中消除被捕获的信号。于是信号对消后的误差向量为 $\mathbf{e}^c(k)=[e_1^c(k), \dots, e_m^c(k)]^T$ 表示为

$$\mathbf{e}^c(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{u}(k)y(k) \quad (1)$$

式(1)中的 $\mathbf{x}(k)$ 和 $\mathbf{u}(k)y(k)$ 都是含有稳定分布噪声的,因此, $\mathbf{e}^c(k)$ 也是含有稳定分布噪声的。于是,只能在稳定分布变量所张成的空间里来讨论 $\mathbf{e}^c(k)$ 的情况。

2004-11-15 收到, 2005-04-25 改回
国家自然科学基金(60372081, 60172072, 30170259)和辽宁省科学技术基金(2001101057)资助课题

定义 1 如果 X 是 SaS 变量, 分散系数为 γ , 它所张成的线性空间是 Banach 空间 ($1 \leq \alpha \leq 2$) 或 metric 空间 ($0 < \alpha < 1$), 范数定义为

$$\|X\|_{\alpha} = \begin{cases} \gamma^{1/\alpha}, & 1 \leq \alpha \leq 2 \\ \gamma, & 0 < \alpha < 1 \end{cases} \quad (2)$$

定义 2 如果 X 和 Y 是 SaS 变量, 结合式(2)和文献[1]中的式(1), 任意两个变量在空间里的距离可以表示为

$$d_{\alpha}(X, Y) = \|X - Y\|_{\alpha} = \begin{cases} [E(|X - Y|^p)/C(p, \alpha)]^{1/p}, & 0 < p < \alpha, 1 \leq \alpha \leq 2 \\ [E(|X - Y|^p)/C(p, \alpha)]^{\alpha/p}, & 0 < p < \alpha, 0 < \alpha < 1 \end{cases} \quad (3)$$

选择适当的 $\mathbf{u}(k)$, 当 $\mathbf{x}(k)$ 和 $\mathbf{u}(k)y(k)$ 在向量空间里接近, 即达到了信号对消。式(2)包含了 Banach 空间里距离的度量, 根据式(3), 此距离的度量等价于该变量之差的分数低级矩的度量。于是定义 $\mathbf{u}(k)$ 的代价函数:

$$J(\mathbf{u}_i(k)) = E(|e_i^c(k)|^p), \quad 1 < p < \alpha, \quad i = 1, \dots, m \quad (4)$$

式中 $e_i^c(k) = x_i(k) - u_i(k)y(k)$ 表示 $e^c(k)$ 的第 i 个分量。利用梯度下降法求解代价函数, 得到 $u_i(k)$ 的迭代求解方程:

$$u_i(k+1) = u_i(k) + \mu(e_i^c)^{<p-1>} y^*(k), \quad i = 1, \dots, m \quad (5)$$

同样我们要考虑: 信号对消器按照式(5)迭代计算, 稳定后对消器最终会达到什么样的稳定状态?

从式(4)出发, 令 $e_i^c(k)$ 的分散系数为 γ_{e_i} 。根据式(2)和式(3), 式(4)可以等价转换为

$$u_i = \min_{u_i} \{\gamma_{e_i}\} \quad (6)$$

根据文献[1]中共变的定义, γ_{e_i} 可以表达为

$$\gamma_{e_i} = [e_i^c(k), e_i^c(k)]_{\alpha} \quad (7)$$

把式(1)代入式(7), 并经过简化和整理(见附录), 得到

$$\gamma_{e_i} = C_{ii} - u_i^* \mathbf{W}^T \mathbf{C}_{icol}^T - u_i \mathbf{W}^H \mathbf{C}_{irow} + u_i \gamma_y u_i^* \quad (8)$$

式中 C_{ii} 表示共变矩阵 \mathbf{C}_{xx} 的第 (i, i) 个元素, \mathbf{C}_{icol} 是 \mathbf{C}_{xx} 的第 i 列, \mathbf{C}_{irow} 表示 \mathbf{C}_{xx} 的第 i 行。式(8)对 u_i 求导, 并令导数等于零, 得到对消器权向量第 i 个元素的最优解:

$$u_i = \frac{(\mathbf{C}_{irow} \mathbf{W}_{opt} + \mathbf{C}_{icol}^H \mathbf{W}_{opt})}{2\gamma_y}, \quad i = 1, \dots, m \quad (9)$$

把第 i 个元素的最优解推广到对消器的其它元素, 得到最优权向量:

$$\mathbf{u}_{opt} = \frac{(\mathbf{C}_{xx} + \mathbf{C}_{xx}^H) \mathbf{W}_{opt}}{2\gamma_y} \quad (10)$$

把文献[1]中的 \mathbf{W}_{opt} 代入式(10), 有

$$\mathbf{u}_{opt} = \frac{(\mathbf{C}_{xx} + \mathbf{C}_{xx}^H)}{2\gamma_y} \lambda \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta_i) = \frac{\lambda}{\gamma_y} \mathbf{a}(\theta_i) \quad (11)$$

式(11)的简化使用了 $\mathbf{C}_{xx}^H \mathbf{C}_{xx}^{-1} \approx \mathbf{I}$ 。 γ_y 代表波束形成器输出的

功率, 即 $\gamma_y = \sigma_{s_i}^2 + \gamma_{opt}$ 。当噪声较小时, $\lambda_i/\gamma_y = \sigma_{s_i}^2 / (\sigma_{s_i}^2 + \gamma_{opt}) \approx 1$, 即 $\mathbf{u}_{opt} \approx \mathbf{a}(\theta_i)$ 。式(11)可以这样理解:

阵列首先捕获第 i 个信号, 然后第 i 个信号被对消器从接收数据 $\mathbf{x}(k)$ 中消除。当达到最佳对消效果时, 对消器的最优权向量与第 i 个信号的阵列响应 $\mathbf{a}(\theta_i)$ 一一对应。可见, 尽管在 Alpha 稳定分布噪声环境中, 这种新型信号对消器所能达到的性能与文献[2,3]一致, 仿真结果见第 4 节。

3 多信号恢复的韧性级联恒模阵列

将韧性恒模波束形成器/新型信号对消器组成级联恒模阵列, 如图 2 所示。我们知道, 级联阵列的每一级必定会捕获一个信号, 然后对消器把它从接收数据中消除。依次进行, 直到所有信号全部被恢复, 最后一级的输出只含有噪声。

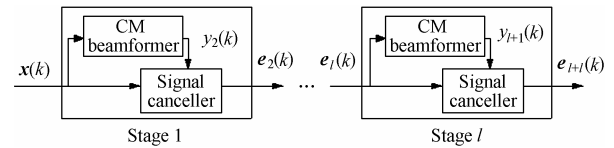


图 2 级联恒模阵列的结构

Fig. 2 Multistage constant modulus array for cochannel signal copy

现在考虑: 第 1 级恒模阵列的输出 $e_2(k)$ 与阵列的输入 $\mathbf{x}(k)$ 有什么关系? 或者第 l 级恒模阵列的输出 $e_{l+1}(k)$ 与阵列的原始输入 $\mathbf{x}(k)$ 存在什么关系?

把 $y(k) = \mathbf{W}^H \mathbf{x}(k)$ 代入式(1), 得到

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{u}(k)y(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{u}(k)\mathbf{W}^H \mathbf{x}(k) = \mathbf{T}_1 \mathbf{x}(k) \quad (12)$$

式中 $\mathbf{T}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{u}(k)\mathbf{W}^H$ 。把第 1 级的输入 $\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k)$ 代入式(12), 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2(k) &= \mathbf{T}_1 \mathbf{x}(k) = \mathbf{T}_1 \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{T}_1 \mathbf{n}(k) \\ &= \mathbf{A}_e^2 \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}_e^2(k) \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $\mathbf{A}_e^2 = \mathbf{T}_1 \mathbf{A}$, $\mathbf{n}_e^2 = \mathbf{T}_1 \mathbf{n}(k)$ 。可见, 第 2 级阵列的输入信号模型式(13)与第 1 级阵列的信号输入模型 $\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k)$ 在结构上非常相似。于是, \mathbf{T}_1 称为第 1 级阵列的“稳态信号传递矩阵”, 而 \mathbf{A}_e^2 称为第 2 级阵列的“有效响应矩阵”。

当阵列达到稳定时, 波束形成器和信号对消器的权向量分别收敛到最优解, 把 \mathbf{W}_{opt} 和 \mathbf{u}_{opt} 代入 $\mathbf{A}_e^2 = \mathbf{T}_1 \mathbf{A}$ 中, 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_e^2 &= \mathbf{T}_1 \mathbf{A} \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{u}_{opt} \mathbf{W}_{opt}^H] [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_i), \dots, \mathbf{a}(\theta_d)] \\ &= [\mathbf{a}(\theta_1) - \beta_{1,1} \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{a}(\theta_d) - \beta_{1,d} \mathbf{a}(\theta_d)] \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $\beta_{i,j} = \mathbf{a}^H(\theta_i) (\mathbf{C}_{xx}^{-1})^H \mathbf{a}(\theta_j) / \mathbf{a}^H(\theta_i) (\mathbf{C}_{xx}^{-1})^H \mathbf{a}(\theta_i)$ 称为“移位因子”。 \mathbf{A}_e^2 的第 i 列是零向量, 于是 \mathbf{A}_e^2 的秩是 $d-1$, 说明第 i 个信号不再包含在第 2 级阵列的输入信号中了。以 θ_i 为变量, 画出“移位因子” $\beta_{1,1}$, $\beta_{1,2}$ 和 $\beta_{1,3}$ 的情况, 如图 3 所示。可见, “移位因子”具有高分辨率方向估计的能力。同时, “移位因子”也验证了第 2 级的输入不再包含第 i 个信号。

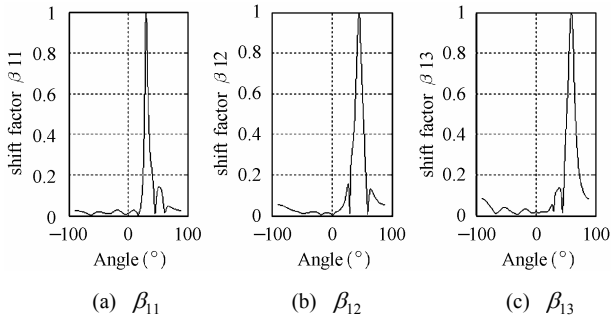


图 3 移位因子(阵元个数 $m = 10$, 信号源个数 $d = 3$, 来波方向 $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$, $\theta_3 = 60^\circ$)

Fig.3 Shift factors(The number of array elements $m = 10$, the number of signal source $d = 3$, the direction of arrival $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$ and $\theta_3 = 60^\circ$)

现在来看第 2 级输入的噪声情况, 从式(13)知道

$$\mathbf{n}_e^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{u}(k)\mathbf{W}^H)\mathbf{n}(k) = \mathbf{n}(k) - \mathbf{u}(k)\mathbf{W}^H\mathbf{n}(k) \quad (15)$$

可见, 第 2 级阵列输入的噪声向量是 $\mathbf{n}(k) - \mathbf{u}(k)\mathbf{W}^H\mathbf{n}(k)$ 而不是 $\mathbf{n}(k)$, 噪声功率增大了。

把式(13)推广到第 l 级, 得到第 l 级的输入信号为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_l(k) &= \mathbf{T}_{l-1} \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{x}(k) = \mathbf{T}_{l-1} \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A} \mathbf{s}(k) + \mathbf{T}_{l-1} \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{n}(k) \\ &= \mathbf{A}_e^l \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}_e^l(k) \end{aligned} \quad (16)$$

则 \mathbf{A}_e^l 将有 $l-1$ 个零列向量, \mathbf{A}_e^l 的秩为 $d-l+1$, 即第 l 级的输入信号不再包含前 $l-1$ 级所捕获的信号。第 l 级的输入噪声功率比第 $l-1$ 级增加了, 增加量由第 $l-1$ 级的传递矩阵 \mathbf{T}_{l-1} 决定。可见, 随着噪声在阵列间传递, 噪声功率被逐级放大了。当阵列级数达到到一定的程度, 噪声功率将非常大, 以至信号被淹没在噪声中, 波束形成器无法正常工作。所以, 级联恒模阵列的级数不能无限制的增加。级联恒模阵列所能达到的最大级数与波束形成器能接受的信噪比有关。

4 数值模拟

假设有 $m = 10$ 个阵元的均匀线性阵列, 接收到 $d = 3$ 个不相关正弦信号, 且每个信号具有单位功率。波达方向分别为 $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$ 和 $\theta_3 = 60^\circ$ 。Alpha 稳定分布噪声的特征指数 $\alpha = 1.5$, 分散系数 $\gamma = 0.1$ 。参数 q 选取为 $q = 0.7$ 。

初始化波束形成器权向量使其第 1 级捕获第 1 个信号, 信号对消器自适应地把第 1 个信号从 $\mathbf{x}(k)$ 消除。根据分析, 信号对消器所能达到的最优权向量为 $\mathbf{u}_{opt} \approx \mathbf{a}(\theta_1)$ 。最优权向量有 10 个分量, 分别从 10 个阵元的接收信号中消除捕获信号, 它们的幅值和相位如图 4(a), 4(b)所示。选取恰当的迭代步长使信号对消器与波束形成器几乎同时达到收敛, 1000 次后 $\mathbf{u}(1000)$ 达到稳定。 $\mathbf{u}(1000)$ 的幅值和相位如图 4(c), 4(d)所示。可见, 对消器的理论分析与迭代稳定时的权向量是非常吻合的。由于本文模拟中采用的是线性阵列, 阵元间距为半波长, 所以相邻阵元的相位差为 90° 。从图 4(a), 4(c)看

出, 对消器的幅值几乎保持恒定, 也说明我们在附录中对幅值的假设是正确的。

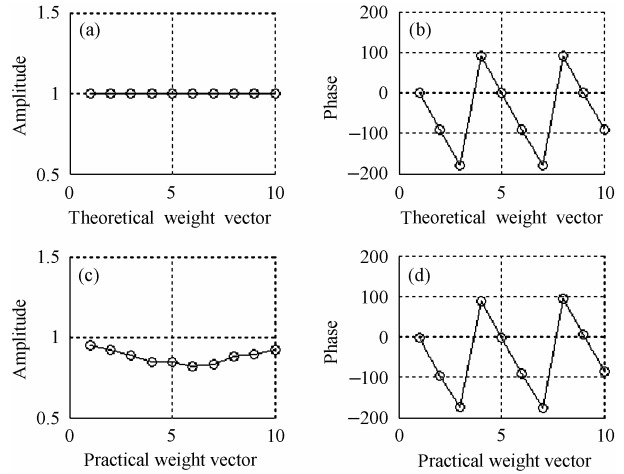


图 4 信号对消器理论计算的权向量与迭代方程稳定时的权向量 (a) 理论计算权向量的幅值 (b)理论计算权向量的相位(度) (c) 迭代方程稳定时权向量的幅值 (d)迭代方程稳定时权向量的相位(度)

Fig.4 Theoretical weight vector and practical weight vector of the signal canceller

- (a) The amplitude of theoretical weight vector
- (b) The phase of theoretical weight vector
- (c) The amplitude of practical weight vector
- (d) The phase of practical weight vector

第 1 级阵列的输出也就是第 2 级阵列的输入, 当第 1 级达到稳定以后, 第 2 级的输入不再包含第 1 级捕获的信号。

从“移位因子”也能看出来, 画出“移位因子” β_{11} , β_{12} 和 β_{13} , 如图 3 所示。 β_{11} 在 30° 时等于 1, β_{12} 在 45° 时等于 1, β_{13} 在 60° 时等于 1, 它们恰好都在来波方向上取得最大值。

采用 3 级韧性恒模阵列对以上这 3 个同信道信号进行恢复, 初始化第 1 级波束形成器权向量使第 1 级阵列捕获第 1 个信号。当第 1 级收敛后, 第 3 级阵列开始工作并捕获第 2 个信号。依次类推, 第 3 级捕获第 3 个信号。注意: 需要仔细调整每一级波束形成器和信号对消器的迭代步长。这 3 级阵列的方向图和输出如图 5 所示。可见, 这 3 级阵列在显著的 Alpha 稳定分布噪声环境中工作相当好。

5 结束语

本文研究了 Alpha 稳定分布噪声环境中级联恒模阵列的稳定性。理论分析表明, 信号对消器能达到的稳定状态与对消信号的方向向量一一对应, 如式(11)。每一级的波束形成器和信号对消器所起的作用相当于传递矩阵对输入信号进行一次变换。信号依次被每一级阵列捕获, 而噪声功率却被逐级放大。因此, 级联恒模阵列所能恢复同信道信号的最大个数是有限的。

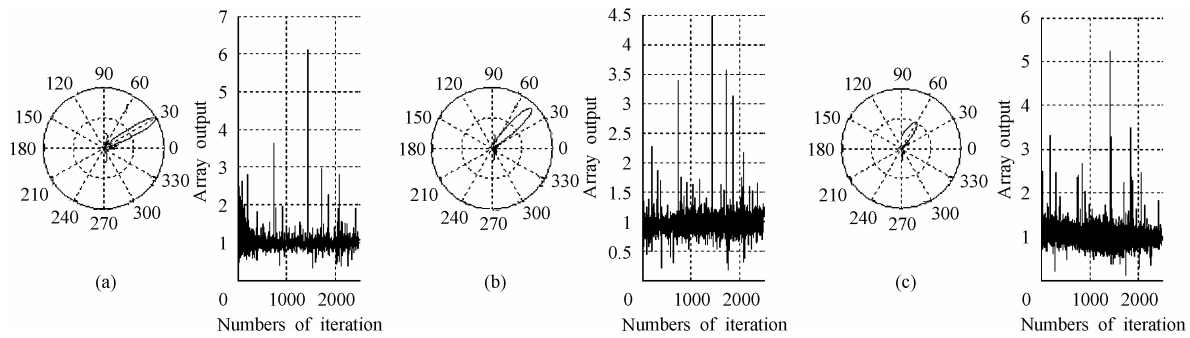


图5 三级韧性恒模阵列的多信号恢复

(a)第1级阵列的方向图和输出 (b)第2级阵列的方向图和输出 (c)第3级阵列的方向图和输出

Fig.5 Cochannel signal recovery by multistage CM array

(a) The array output of the first stage (b) The array output of the second stage (c) The array output of the third stage

附录

把式(1)代入式(7), 并利用文献[1]中共变的性质:

$$\begin{aligned} \gamma_{e_i} &= [x_i(k) - u_i(k)y(k), x_i(k) - u_i(k)y(k)]_{\alpha} \\ &= [x_i(k), x_i(k)]_{\alpha} - u_i^*(k)[x_i(k), y(k)]_{\alpha} \\ &\quad - u_i(k)[y(k), x_i(k)]_{\alpha} + u(k)[y(k), y(k)]_{\alpha} u_i^*(k) \end{aligned} \quad (A-1)$$

我们仍然假设抵消器只对信号的相位调整而不改变信号的幅度。这个假设也在后来的数值模拟中验证了, 见图4(a), 4(c)。再次利用共变性质, 把式(A-1)中的各个分量分别表达为

$$[x_i(k), x_i(k)]_{\alpha} = C_{ii} \quad (A-2)$$

$$\begin{aligned} [x_i(k), y(k)]_{\alpha} &= [x_i(k), \mathbf{W}^H \mathbf{x}(k)]_{\alpha} \\ &= [x_i(k), w_1^* x_1(k) + \dots + w_M^* x_M(k)]_{\alpha} \\ &= [w_1, \dots, w_M] \begin{bmatrix} c_{i1} \\ \vdots \\ c_{iM} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{W}^T \mathbf{C}_{irow}^T \end{aligned} \quad (A-3)$$

\mathbf{C}_{irow} 表示 \mathbf{C}_{xx} 的第 i 行。同理,

$$[y(k), x_i(k)]_{\alpha} = \mathbf{W}^H \mathbf{C}_{icol} \quad (A-4)$$

\mathbf{C}_{icol} 表示 \mathbf{C}_{xx} 的第 i 列。

$$[y(k), y(k)]_{\alpha} = \gamma_y \quad (A-5)$$

把式(A-2), (A-3), (A-4), (A-5)代入到式(A-1)中, 得到

$$\gamma_{e_i} = C_{ii} - u_i^* \mathbf{W}^T \mathbf{C}_{icol}^T - u_i \mathbf{W}^H \mathbf{C}_{irow} + u_i \gamma_y u_i^* \quad (A-6)$$

参考文献

- [1] 唐洪, 邱天爽. 一种脉冲噪声中的韧性恒模算法及其稳定性分析. 电子与信息学报已录用, 稿号 041200.
- [2] Shynk J J, Gooch R P. The constant modulus array for cochannel signal copy and direction finding. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1996, 44(3): 652 - 660.
- [3] Shynk J J, Keerthi A V, Mathur A. Steady-state analysis of the multistage constant modulus array. *IEEE Tran. on Signal Processing*, 1996, 44(4): 948 - 962.

唐洪: 男, 1977年生, 博士生, 研究方向为广义正态信号处理及其在相关领域中的应用。

邱天爽: 男, 1954年生, 教授, 博士生导师, 从事信号与信息处理的研究工作。