非互易网络的无耗约束条件 [1]

梁昌洪 李 龙 史小卫

(西安电子科技大学电子工程学院 西安 710071)

摘 要 该文论述了在非互易条件下，无源无耗网络的各种约束表征：例如，阻抗 $[Z]$ 矩阵可以存在实部。它并不与能量定律相悖，即在这种情况下，阻抗矩阵中的电阻并不代表损耗，其负阻也不表示有源增益；传输 $[A]$ 矩阵也反映出 $|\det[A]|=1$ 的似互易特性。文中给出了具体实例。

关键词 非互易，无源，无耗网络，阻抗实部，似互易特性

中图号 TN711.1, TN015

1 引 言

无源无耗网络已经有了很多深入的研究。但是，在非互易条件下无耗约束会出现很多奇特的性质。例如，阻抗 $[Z]$ 矩阵的每一个元素不一定均为纯电抗。起因是 90 年代的一场争论 [1]，由此也把问题引向了深入。

几位青年学者提出一个悖论 [1]：他们认为只要网络无耗则必互易。理由是无耗约束在 $[Z]$ 矩阵条件下等价于

$$[Z]^{+}+[Z]=[0] \tag{1}$$

其中 $[\ ]^{+}$ 表示 Hermite 符号，即矩阵的转置共轭，或共轭转置。而“证明”者认为无耗网络的 $[Z]$ 矩阵，每一个元素应该是纯电抗，于是 (1) 式也可变成

$$[Z]^{T}=[Z] \tag{2}$$

亦即似乎无耗必互易。

本文正是针对以上的悖论，对非互易条件下各种网络参数的无耗约束作深入的讨论。

2 非互易网络 $[Z]$ 矩阵的无耗约束

让我们仔细回顾 $[Z]$ 矩阵无耗约束的全部证明。已经知道，根据能量关系，不论网络互易与否， $[S]$ 散射矩阵均有 [2]

$$[S]^{+}[S]=[I] \tag{3}$$

其中 $[I]$ 表示 n 阶单位矩阵。

我们在这里讨论归一化 $[\overline{Z}]$ 矩阵并不失一般性，计及 $[\overline{Z}]$ 与 $[S]$ 有下述关系 [3]:

$$[S]=([\overline{Z}]-[I])([\overline{Z}]+[I])^{-1} \tag{4}$$

于是有

$$[S]^{+}=([\overline{Z}]^{+}+[I])^{-1}([\overline{Z}]^{+}-[I]) \tag{5}$$

[1] 2002-04-02 收到， 2002-08-05 改回

代入无耗约束 [2] 易知

$$([\overline{Z}]^{+}-[I])([\overline{Z}]-[I])=([\overline{Z}]^{+}+[I])([\overline{Z}]+[I]) \tag{6}$$

展开 (6) 式即可得 (1) 式为

$$[Z]^{+}+[Z]=[0]$$

如果设 $\overline{Z}_{ij}=\overline{R}_{ij}+j\overline{X}_{ij}$ 可分两种情况讨论：

情况 1 互易情况

已知互易条件

$$\overline{Z}_{ij}=\overline{Z}_{ji} \tag{7}$$

而式 (1) 等价于

$$\left.\begin{aligned}\overline{R}_{ij}+\overline{R}_{ji}=0\\ \overline{X}_{ij}-\overline{X}_{ji}=0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

显然，条件 (7) 和 (8) 式是相容的，即无耗互易网络有

$$\left.\begin{aligned}\overline{R}_{ij}=0\\ \overline{X}_{ij}=\overline{X}_{ji}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

情况 2 非互易情况

在非互易条件下，必然有

$$\overline{R}_{ij}=-\overline{R}_{ji} \tag{10}$$

亦即阻抗 $[\overline{Z}]$ 矩阵必定存在实部，而且必定存在负实部．这两条都与一般常识相悖，也就是非互易无耗网络悖论出现的缘由．

为了深入讨论，我们研究一理想三端口环形器，如图 1 所示．

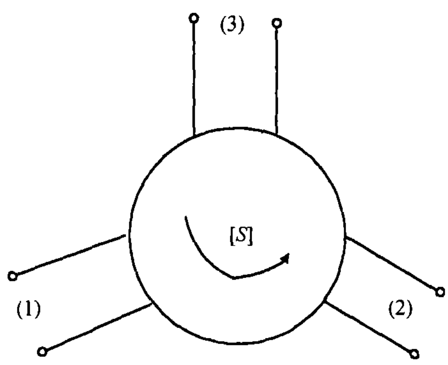

图 1 理想三端口环形器

其 $[S]$ 矩阵为

$$[S]=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} \tag{11}$$

环形方向为 $1 \to 2 \to 3 \to 1$ 。式中， $S_{13} = -1$ 可由相位调节而成。考虑到 (11) 式的 $[S]$ 满足幺正性 $[S]^+[S] = [I]$ ，所以确为无耗网络。由

$$[\overline{Z}] = ([I] + [S])([I] - [S])^{-1} \tag{12}$$

可具体写出

$$[I] + [S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$([I] - [S])^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

最后得到理想三端口环形器阻抗 $[\overline{Z}]$ 矩阵为

$$[\overline{Z}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

显然，它满足条件 (1) 式，且存在实部。

让我们考查其能量关系，设电流矢量：

$$[I]^T = [I_1, I_2, I_3] \tag{16}$$

其损耗功率可写为

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}([I]^+[\overline{Z}][I]) \tag{17}$$

因为在 (15) 式条件下：

$$[I]^+[\overline{Z}][I] = (I_1 I_2^* - I_1^* I_2) + (I_2 I_3^* - I_2^* I_3) + (I_1 I_3^* - I_1^* I_3) = 2j\mathrm{Im}(I_1 I_2^* + I_2 I_3^* + I_1 I_3^*) \tag{18}$$

可知

$$P \equiv 0 \tag{19}$$

上述实例表明：非互易情况下， $[\overline{Z}]$ 的实部并不表示损耗，而负实部也不表示有源增益。

3 非互易网络 $[A]$ 矩阵的无耗约束

我们进一步研究如图 2 所示双口非互易网络 $[A]$ 矩阵的无耗约束。

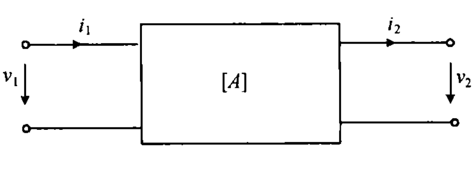

图 2　双口非互易无耗 $[A]$ 网络

根据定义写出

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

从两方面对无耗约束进行分析:

情况 1 阻抗考虑

由 (20) 式很易知 [2]

$$Z_{in} = \frac{A_{11}\overline{Z}_L + A_{12}}{A_{21}\overline{Z}_L + A_{22}} = \frac{(A_{11}\overline{Z}_L + A_{12})(A_{21}^*\overline{Z}_L^* + A_{22}^*)}{|A_{21}\overline{Z}_L + A_{22}|^2} \tag{21}$$

令负载阻抗为纯电抗，即

$$\overline{Z}_L = jk \tag{22}$$

其中 k 为任意实数，则有

$$\mathrm{Re}(\overline{Z}_{in}) = 0 \tag{23}$$

具体写出为

$$\mathrm{Re}[(A_{11}kj + A_{12})(-A_{21}^*kj + A_{22}^*)] = 0 \tag{24}$$

进一步化简为

$$\mathrm{Re}[(A_{11}A_{21}^*k^2 + A_{12}A_{22}^*) + jk(A_{11}A_{22}^* - A_{12}A_{21}^*)] = 0 \tag{25}$$

(1) 取 k=0，有

$$\mathrm{Re}(A_{12}A_{22}^*) = 0 \tag{26}$$

(2) 取 $k \to \infty$，有

$$\mathrm{Re}(A_{11}A_{21}^*) = 0 \tag{27}$$

(3) 取 $k = 1$，并计及 (26) 和 (27) 式有

$$\mathrm{Im}(A_{11}A_{22}^* - A_{12}A_{21}^*) = 0 \tag{28}$$

情况 2 功率考虑

还是由 (20) 式写出

$$v_1 i_1^* = A_{11}A_{21}^*|v_2|^2 + A_{12}A_{22}^*|i_2|^2 + A_{11}A_{22}^*v_2 i_2^* + A_{12}A_{21}^*v_2^* i_2 \tag{29}$$

在 (29) 式两边取实部，即

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(v_1 i_1^*) = {} & \mathrm{Re}(A_{11}A_{21}^*)|v_2|^2 + \mathrm{Re}(A_{12}A_{22}^*)|i_2|^2 + \mathrm{Re}(A_{11}A_{22}^* + A_{12}A_{21}^*)\mathrm{Re}(v_2 i_2^*) \\ & - \mathrm{Im}(A_{11}A_{22}^* - A_{12}A_{21}^*)\mathrm{Im}(v_2 i_2^*)\end{aligned} \tag{30}$$

计及无耗约束条件

$$\mathrm{Re}(v_1 i_1^*) = \mathrm{Re}(v_2 i_2^*) \tag{31}$$

又可知

$$\mathrm{Re}(A_{11}A_{22}^* + A_{12}A_{21}^*) = 1 \tag{32}$$

由 (26), (27) 和 (28) 式，我们可知 $A_{12}A_{22}^*$ 和 $A_{11}A_{21}^*$ 为纯虚数，而且有

$$\mathrm{Im}(A_{11}A_{22}^*) = \mathrm{Im}(A_{12}A_{21}^*) \tag{33}$$

$$\mathrm{Im}(A_{12}A_{22}^*A_{11}A_{21}^*) = \mathrm{Im}(A_{11}A_{22}^*A_{12}A_{21}^*) = 0 \tag{34}$$

所以，我们可令 $A_{11}A_{22}^* = a + jb, A_{12}A_{21}^* = c + jb$，代入 (34) 式，即

$$\mathrm{Im}[(a+jb)(c+jb)] = b(a+c) = 0 \tag{35}$$

容易得到 $b=0$ 或 $a=-c$．再根据 (32) 式，我们可得

$$\mathrm{Re}[(a+jb)+(c+jb)] = a+c = 1 \tag{36}$$

因此，这与 $a=-c$ 是矛盾的，故只有 $b=0$ 各等式才成立，即

$$\mathrm{Im}(A_{11}A_{22}^*) = \mathrm{Im}(A_{12}A_{21}^*) = 0 \tag{37}$$

由此，(32) 式可变形为

$$A_{11}A_{22}^* + A_{12}A_{21}^* = 1 \tag{38}$$

综上所述，有下列无耗约束

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}(A_{12}A_{22}^*) = 0\\ &\mathrm{Re}(A_{11}A_{21}^*) = 0\\ &\mathrm{Im}(A_{11}A_{22}^*) = 0\\ &\mathrm{Im}(A_{12}A_{21}^*) = 0\\ &A_{11}A_{22}^* + A_{12}A_{21}^* = 1 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

再从逆向网络即从端口 2 视入的阻抗考虑，还可写出

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}(A_{11}A_{12}^*) = 0\\ &\mathrm{Re}(A_{21}A_{22}^*) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

(39) 和 (40) 两式构成双口无耗网络 $[A]$ 矩阵的全部约束．

举例来说，我们把上节提出的理想三端口环形器的端口 3 接 $\Gamma_L = 1$ 的负载，则将其变为无耗非互易的二端口网络，端接负载后的等效 $[S]$ 参数为

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{41}$$

则该网络的 $[A]$ 参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

可见，满足无耗网络 $[A]$ 矩阵的约束条件 (39) 和 (40) 式．

定理　非互易 $[A]$ 矩阵无耗约束为其行列式的模值等于 1，即

$$|\det[A]| = 1 \tag{43}$$

我们把 (43) 式称为似互易特性，这是无耗和互易的奇妙内在关系．

证明　(43) 式亦即

$$\det[A]\det[A]^* = 1 \tag{44}$$

于是可以写出

$$\begin{aligned}\det[A]\det[A]^* &= (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})(A_{11}^*A_{22}^* - A_{12}^*A_{21}^*) \\ &= |A_{11}A_{22}|^2 + |A_{12}A_{21}|^2 - 2\mathrm{Re}(A_{11}A_{21}^*A_{12}^*A_{22}) \\ &= |A_{11}A_{22}|^2 + |A_{12}A_{21}|^2 + 2\mathrm{Im}(A_{11}A_{21}^*)\mathrm{Im}(A_{12}^*A_{22}) \end{aligned} \tag{45}$$

另一方面，由 (39) 式可知

$$(A_{11}A_{22}^* + A_{12}A_{21}^*)(A_{11}^*A_{22} + A_{12}^*A_{21}) = 1 \tag{46}$$

又可给出

$$|A_{11}A_{22}|^2 + |A_{12}A_{21}|^2 + 2\mathrm{Im}(A_{11}A_{12}^*)\mathrm{Im}(A_{21}^*A_{22}) = 1 \tag{47}$$

比较 (45) 式和 (47) 式，可知本定理等价于

$$\mathrm{Im}(A_{11}A_{21}^*)\mathrm{Im}(A_{12}^*A_{22}) = \mathrm{Im}(A_{11}A_{12}^*)\mathrm{Im}(A_{21}^*A_{22}) \tag{48}$$

已经知道，由 $\mathrm{Im}(A_{11}A_{22}^*) = 0$ ，即有

$$\sin\varphi_{11}\cos\varphi_{22} = \cos\varphi_{11}\sin\varphi_{22} \tag{49}$$

而又由 $\mathrm{Im}(A_{12}A_{21}^*) = 0$ ，可知

$$\sin\varphi_{12}\cos\varphi_{21} = \cos\varphi_{12}\sin\varphi_{21} \tag{50}$$

即可得证 (48) 式. 证毕

需要指出，由无耗 $[S]$ 矩阵约束

$$|S_{12}| = |S_{21}| \tag{51}$$

以及由 A 参数表征 S 参数，直接可得

$$|\det[A]| = 1$$

我们容易推广到 $2n$ 端口非互易无耗网络中仍存在似互易性 [4] .

4 结 束 语

本文深入讨论了非互易条件下，各种网络矩阵的无耗约束。结果表明：非互易条件下， $[Z]$ 允许存在实部，它与能量定理并不相悖．作为对偶关系，很易推广到 $[Y]$ 矩阵。

特别有兴趣地指出：无耗约束可表现出一种似互易特性，例如 [5]

$$\left.\begin{aligned} &|\det[S_{\mathrm{I\,II}}]| = |\det[S_{\mathrm{II\,I}}]| \\ &|\det[Z_{\mathrm{I\,II}}]| = |\det[Z_{\mathrm{II\,I}}]| \\ &|\det[A]| = 1 \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

其中 $[S_{\mathrm{I\,II}}]$, $[S_{\mathrm{II\,I}}]$ 和 $[Z_{\mathrm{I\,II}}]$, $[Z_{\mathrm{II\,I}}]$ 分别表示分块矩阵。造成这种情况的更深层次的对称性原因，值得我们进一步探讨.

参 考 文 献

[1] 梁昌洪，史小卫，电磁网络的无耗性与互易性，电子科技杂志， 1992, 6(1), 25-27.
[2] 梁昌洪，计算微波，西安，西北电讯工程学院出版社， 1985, 16-18.
[3] 吴万春，梁昌洪，微波网络及其应用，北京，国防工业出版社， 1980, 25-35.
[4] 李润旗，微波网络理论的新进展及其应用， [博士论文], 西安电子科技大学， 1991.7.
[5] 林守远，广义模对称定理的推广，电子科学学刊， 1991, 13(6), 637-639.

LOSSLESS CONSTRAINT CONDITIONS OF NON-RECIPROCAL NETWORKS

Liang Changhong Li Long Shi Xiaowei

(*School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an* 710071, *China*)

Abstract The lossless constraint conditions of the non-reciprocal passive networks are studied in this paper. It is shown that the impedance matrix $[Z]$ of a non-reciprocal lossless network has the reai part, but it is compatible with the law of conservation of energy. In the non-reciprocal case, the positive resistances of the impedance matrix do not represent the loss of the network, and the negative resistances do not represent the active gain. In addition, the transmission matrix $[A]$ has the characteristic of $|\det[A]|=1$, which is called as the quasi- reciprocity. The realistic examples are given in this paper.

Key words Non-reciprocal, Passive, Lossless network, Impedance real part, Quasi-reciprocity

梁昌洪： 男， 1943 年生，教授，博士生导师，中国电子学会微波学会副主任委员、中国电子学会会士、 IEEE Senior member．研究方向包括计算场论、计算微波、微波网络理论、电磁散射与逆散射、电磁兼容等方面．
李 龙： 男， 1977 年生，博士，主要从事电磁场数值计算、电磁兼容、孔耦合理论等方面的研究工作．
史小卫： 男， 1963 年生，教授，博士生导师，主要研究领域有电磁兼容、计算电磁学、智能天线．