

# 自由电子激光器的横向几何效应\*

应 润 杰

(中国科学院电子学研究所,北京)

**摘要** 以具有轴向磁场和线偏振摆动器场的自由电子激光器为例研究了波导壁和电子束厚度对自由电子激光不稳定性的影响。用流体力学方法推得了辐射波(TE模)和TM模的耦合方程组,将解得的电磁场代入电子束表面的边界条件便得到色散关系和不稳定性的增长率。数值结果表明体耦合的贡献远大于面电流密度耦合的贡献。存在一个最佳厚度和波导壁距离,此时增长率为极大。

**关键词** 自由电子激光;横向几何效应;稳定性

## 一、引 言

大部分喇曼型自由电子激光器的理论工作是基于—维情形,即电子束在横向是没有边界的。可是实际上电子束具有有限的截面,并且在束边界和波导壁之间存在着空隙<sup>[1]</sup>。可以预料它们会对自由电子激光不稳定性产生影响。Uhm 和 Davidson<sup>[2-4]</sup>曾用分布函数的方法讨论了这个问题,但是他们所使用的辐射场形式是真空波导场,这仅适用于稀薄束近似和束厚度较小的情形。Shiozawa 等<sup>[5,6]</sup>利用电子束表面的电磁场连接条件来得到线性和非线性色散关系,解决了这个问题。但是在他们的工作中用了辐射波方程中非线性体电流密度为零的条件,这一点似乎是十分苛刻的,因为在一维情形它正是产生自由电子激光不稳定性的原因<sup>[7]</sup>。

本文以具有轴向磁场的线偏振自由电子激光器为例来讨论束厚度和波导壁的效应。用流体力学方法推得了辐射波(TE模)和TM模的耦合方程组,其中包括了辐射波的非线性体电流密度。解方程组得到了包括非线性耦合贡献的两个模的各个场分量,然后用电子束表面的电磁场连接条件得到了非线性色散关系和辐射波的增长率。数值结果表明体耦合要比面耦合大一个量级,存在一个最佳束厚度和空隙距离使增长率极大。

## 二、基本方程

考虑一个速度为  $v_0$  的电子束通过一个平行平板波导(图1),图1中  $a$  和  $b$  分别是轴

\* 1986年4月30日收到,1987年5月11日修改定稿

至束边界和波导壁的距离。在波导中我们加一个线性摆动器场和一个轴向磁场  $B_{\parallel}$ 。于是波导中的静磁场的三个分量是:

$$\left. \begin{aligned} B_x^0 &= B_w \operatorname{ch}(k_w x) \cos(k_w z) \\ B_y^0 &= 0 \\ B_z^0 &= B_{\parallel} - B_w \operatorname{sh}(k_w x) \sin(k_w z) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$B_w$  和  $k_w$  分别是摆动器场的振幅和波数。

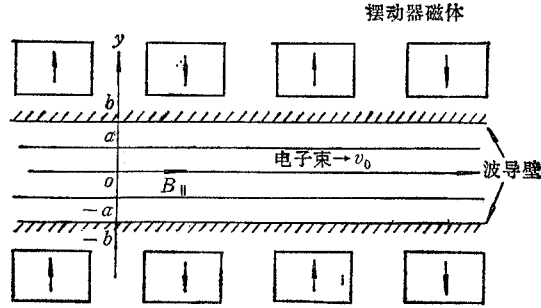


图1 自由电子激光器简图

进行分析的出发点是电子束的相对论性运动方程, 连续性方程和麦克斯韦方程组。

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{e}{m_0 \gamma_0} \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times (\mathbf{B} + \mathbf{B}^0) - \frac{\mathbf{V}}{c^2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}) \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot (N\mathbf{V}) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= -4\pi e (N - n_0) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

这里  $e$  和  $m_0$  是电子的电荷和静止质量,  $c$  是光速,  $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$ ,  $\beta_0 = v_0/c$ 。在  $v_x^0 \approx v_0$ ,  $B_z^0 \approx B_{\parallel}$  的条件下, 由 (2) 和 (3) 式可以得到不考虑辐射场时的电子零级轨道。

$$\left. \begin{aligned} v_x^0 &= v_1 \cos(k_w z) - v_1 \cos(\Omega_{\parallel} t) \\ v_y^0 &= v_2 \sin(k_w z) - v_1 \sin(\Omega_{\parallel} t) \\ v_z^0 &= v_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$v_1 = \frac{\Omega_w \Omega_{\parallel} v_0 \operatorname{ch}(k_w x)}{\Omega_{\parallel}^2 - k_w^2 v_0^2}, \quad v_2 = \frac{\Omega_w k_w v_0^2 \operatorname{ch}(k_w x)}{\Omega_{\parallel}^2 - k_w^2 v_0^2} \quad (6)$$

其中  $\Omega_{\parallel} = e B_{\parallel} / \gamma_0 m_0 c$ ,  $\Omega_w = e B_w / \gamma_0 m_0 c$ 。

将 (2)–(4) 式线性化  $\mathbf{V} = \mathbf{v}^0 + \mathbf{v}$ ,  $N = n_0 + n$ ,  $\mathbf{v}^0$  和  $n_0$  是零级速度和密度,  $\mathbf{v}$ ,  $n$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  是扰动的速度, 密度, 电场和磁场。略去与  $\Omega_w^2$  成比例的项, 经过一些运算可以得到:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{e}{m_0 \gamma_0} \left[ E_x + \frac{1}{c} B_{\parallel} v_y + \frac{1}{c} (v_y^0 B_x - v_x^0 B_y) - \frac{1}{c^2} v_0 v_x^0 E_z \right]$$

$$+ \frac{Q_{\parallel} \gamma_0^2}{v_0} v_y^0 v_x - v_x^0 \left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} + k_{\omega} \text{th}(k_{\omega} x) v_x \right] \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_y}{\partial z} = & - \frac{e}{m_0 \gamma_0} \left[ E_y - \frac{1}{c} v_x B_{\parallel} + \frac{1}{c} (v_0 B_x - v_x^0 B_z) - \frac{1}{c^2} v_0 E_x v_y^0 \right] \\ & + \frac{e \gamma_0}{m_0 c^3} v_0^2 v_z B_x^0 - \frac{Q_{\parallel} v_x^0}{v_0} v_z \gamma_0^2 - v_x^0 \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_x v_y^0 k_{\omega} \text{th}(k_{\omega} x) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} = & - \frac{e}{m_0 \gamma_0} \left[ E_z - \frac{1}{c} v_y B_x^0 + \frac{1}{c} (v_x^0 B_y - v_y^0 B_x) \right] \\ & - \frac{1}{c^2} (v_0 E_x v_x^0 + v_0 v_y^0 E_y + v_0^2 E_z) - v_x^0 \frac{\partial v_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathbf{j} = -en_0 \mathbf{v} - en \mathbf{v}^0 = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \mathbf{v} + n \mathbf{v}^0) = 0 \quad (11)$$

线性方程组(4)、(7)–(11)式就是本工作的出发点。

### 三、线性色散关系

考虑扰动沿  $z$  方向传播, 由于讨论的是二维问题, 所以所有的扰动有形式:

$$F = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x) \exp[i(k_n z - \omega t)] \quad (12)$$

$k_n = k + nk_{\omega}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .  $\omega$  是辐射频率,  $k$  是辐射波数. 对于 TE 模, 电磁场可表为  $\mathbf{E} = E_y \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{x} + B_z \mathbf{z}$ . 将(12)式代入(4)、(8)–(11)式, 由于讨论线性色散关系, 令  $\Omega_{\omega} = 0$ , 可以得到  $B_{zn}$  满足的波动方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 B_{zn}}{\partial x^2} + K_{cn}^2 B_{zn} &= 0, \quad (0 \leq x \leq a) \\ \frac{\partial^2 B_{zn}}{\partial x^2} + H_{cn}^2 B_{zn} &= 0, \quad (a < x < b) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} K_{cn}^2 &= -k_n^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2 Q_n^2}{c^2(Q_n^2 - Q_{\parallel}^2)} \\ H_{cn}^2 &= -k_n^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中  $Q_n = \omega - k_n v_0$ ,  $\omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2 / m_0 \gamma_0$ . TE 模的其他场分量可以由  $B_{zn}$  来表示:

$$\frac{\partial E_{yn}}{\partial x} = \frac{i\omega}{c} B_{zn}, \quad \frac{\partial B_{zn}}{\partial x} = -ik_n B_{zn} \quad (15)$$

在电子束内(用上标(1)表示)(13)式有解:

$$B_{zn}^{(1)} = i \frac{K_{cn}}{\omega} A^{(1)} \sin \left( K_{cn} x - \nu \frac{\pi}{2} \right), \quad \nu = 0, 1 \quad (16)$$

$\nu = 0$  称奇对称模,  $\nu = 1$  称偶对称模. 在电子束外(用上标(2)表示)考虑到波导壁处

的边界条件 (13) 式有解:

$$B_{zn}^{(2)} = i \frac{H_{cn}}{\omega} A^{(2)} \cos [H_{cn}(b - x)] \quad (17)$$

由束表面的边界条件  $E_{yn}^{(1)} = E_{yn}^{(2)}$ ,  $B_{zn}^{(1)} = B_{zn}^{(2)}$  便可得到 TE 模的色散关系:

$$\text{tg} [H_{cn}(b - a)] \cdot \text{tg} \left[ K_{cn}a - \nu \frac{\pi}{2} \right] = \frac{H_{cn}}{K_{cn}} \quad (18)$$

下面我们将只讨论偶对称模。(18) 式的一个解  $H_{cn} = 0$ , 我们是不需要的, 因为在我们的问题中  $\frac{\partial}{\partial x} \neq 0$ 。(18) 式的一般解需要通过数值计算来找。但是当  $(K_{cn}a)^2/3 \ll 1$  时, 它可以化成很简单的形式:

$$\frac{\omega^4}{c^2} - k_n^2 - H_{ci}^2(a, b) = 0 \quad (19)$$

$H_{ci}(a, b)$  是下列方程的解:

$$\text{tg} [H_{cn}(b - a)] + aH_{cn} = 0 \quad (20)$$

对于每组  $a, b$ , (20) 式有无穷个解  $i = 1, 2, 3, \dots$ 。图 2 画出了它们的关系, 由 (14) 式和  $(K_{cn}a)^2/3 \ll 1$  条件知, 仅当  $H_{ci}$  较小时才有意义, 所以只画出了头三个解。可以看到当  $b$  充分大时  $H_{ci}$  的值与  $a$  的关系不大, 特别是  $i = 1$  情形。但是当  $b$  变小时, 曲线就分散开来, 即波导内 TE 模的场分布与束边界有很大关系。真空波导场  $E_y \propto \sin [H_m \cdot (b - a)]$ ,  $H_m = \frac{m\pi}{2b}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ 。  $H_1$  曲线几乎与图 2 中  $i = 1, a = 0.1$  的曲线重合。这一点可从 (20) 式中令  $a \rightarrow 0$  看到, 说明当束厚度很薄时用真空波导场是一个很好的近似。图 3 画出了  $\nu = 1$  时波导中 TE 模的电场分布。

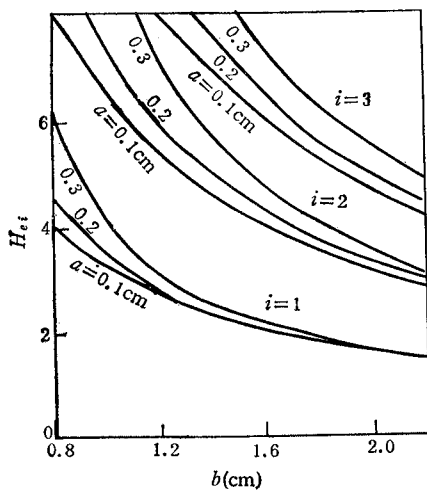


图 2  $H_{ci}$  与横向几何尺寸的关系

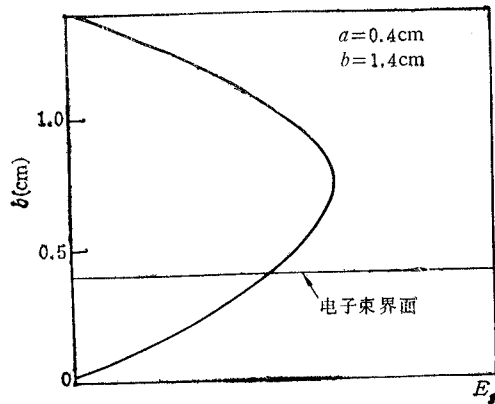


图 3  $\nu = 1$  时波导中 TE 模的电场分布

对于 TM 模电磁场可表为  $\mathbf{E} = E_x \mathbf{x} + E_z \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{B} = B_y \mathbf{y}$ 。  $E_{zn}$  满足的波动方程是

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{zn}}{\partial x^2} - K_{mn}^2 E_{zn} &= 0, \quad (0 \leq x \leq a) \\ \frac{\partial^2 E_{zn}}{\partial x^2} - H_{mn}^2 E_{zn} &= 0, \quad (a < x < b) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中

$$K_{mn}^2 = k_n^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \left[ 1 - \frac{\Omega_{\parallel}^2 \beta_0^2 \left( \omega - \frac{c^2}{v_0} k_n \right) \left( \frac{k_n}{v_0} c^2 - \Omega_n \gamma_0^2 \right)}{\Omega_n^2 \gamma_0^2 (\Omega_n^2 - \Omega_{\parallel}^2 - \omega_p^2 / \gamma_0^2)} \right] \quad (22)$$

$$H_{mn}^2 = k_n^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$$

(21) 式有解:

$$\left. \begin{aligned} E_{zn}^{(1)} &= D^{(1)} \text{ch}(K_{mn} x), & \text{偶对称解} \\ E_{zn}^{(1)} &= D^{(1)} \text{sh}(K_{mn} x), & \text{奇对称解} \\ E_{zn}^{(2)} &= D^{(2)} \text{sh}[H_{mn}(b-x)] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

由束表面场的连接条件:  $E_{zn}^{(1)} = E_{zn}^{(2)}$ ,  $E_{zn}^{(2)} - E_{zn}^{(1)} = 4\pi\sigma_n$ ,  $B_{yn}^{(2)} - B_{yn}^{(1)} = \frac{4\pi}{c} \sigma_n v_0$ ,  $\sigma_n$  是面电荷密度, 可以得到 TM 模的色散关系:

$$\left. \begin{aligned} \text{th}(K_{mn} a) \text{th}[H_{mn}(b-a)] &= -\frac{K_{mn}}{H_{mn}} \frac{\Omega_n^2}{\Omega_n^2 - \omega_p^2 / \gamma_0^2}, & \text{偶对称} \\ \text{cth}(K_{mn} a) \text{th}[H_{mn}(b-a)] &= -\frac{K_{mn}}{H_{mn}} \frac{\Omega_n^2}{\Omega_n^2 - \omega_p^2 / \gamma_0^2}, & \text{奇对称} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

TM 模的其他场量可以通过麦克斯韦方程由  $E_{zn}$  表示:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_{zn}}{\partial x} &= -i \left\{ k_n - \frac{\omega_p^2 v_0}{\Omega_n c^2} + \frac{\omega_p^2 \Omega_{\parallel}^2 \left( \frac{k_n}{\Omega_n} c^2 - v_0 \gamma_0^2 \right)}{(\Omega_n^2 - \Omega_{\parallel}^2 - \omega_p^2 / \gamma_0^2) \Omega_n \gamma_0^2 c^2} \right\} E_{zn} \equiv \theta_1 E_{zn} \\ \frac{\partial B_{yn}}{\partial x} &= i \left\{ \frac{\omega_p^2 - \omega \Omega_n}{\Omega_n c} - \frac{\omega_p^2 \Omega_{\parallel}^2 (k_n c^2 / \Omega_n - v_0 \gamma_0^2) v_0}{(\Omega_n^2 - \Omega_{\parallel}^2 - \omega_p^2 / \gamma_0^2) \Omega_n \gamma_0^2 c^3} \right\} E_{zn} \equiv \theta_2 E_{zn}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

令 (25) 式中  $\omega_p = 0$  便是电子束外的 TM 模的各场量的关系.

讨论偶对称解, 将 (24) 式重新写成

$$\Omega_n^2 = \frac{\omega_p^2}{\gamma_0^2} \frac{\text{th}(K_{mn} a) \text{th}[H_{mn}(b-a)] H_{mn}}{\text{th}(K_{mn} a) \text{th}[H_{mn}(b-a)] H_{mn} + K_{mn}} \equiv A^2 \frac{\omega_p^2}{\gamma_0^2} \quad (26)$$

可得

$$\omega = (k + nk_w) v_0 \pm A \frac{\omega_p}{\gamma_0} \quad (27)$$

它们相当于通常的快、慢空间电荷波, 只是现在包括了几何效应.

自由电子激光不稳定性发生在 TE 模和 TM 模两条曲线的交点处, 对 TE 模取  $n=0$ , 对 TM 模取  $n=1$ . 由 (19) 和 (27) 式可解得

$$\omega = \left( k_w v_0 \pm A \frac{\omega_p}{\gamma_0} \right) \gamma_0^2 + \gamma_0 \left[ \left( k_w v_0 \pm A \frac{\omega_p}{\gamma_0} \right)^2 (\gamma_0^2 - 1) - H_{ci}^2 v_0^2 \right]^{1/2} \quad (28)$$

由于  $k_w v_0 \gg \frac{\omega_p}{\gamma_0}$ ,  $A$  又小于 1, 所以  $A$  中的  $\omega$  和  $k$  可以用 (28) 的近似式代入, 得

$$\left. \begin{aligned} \omega &= k_w v_0 \gamma_0^2 + v_0 \gamma_0 [k_w^2 (\gamma_0^2 - 1) - H_{ci}^2]^{1/2} \\ k &= \frac{\omega}{v_0} - k_w \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

(29) 式中略去  $H_{ci}^2$ , 便得  $\omega \approx (1 + \beta_0) \gamma_0^2 k_w v_0$ , 它就是通常所用的自由电子激光辐射频率公式. 图 4 画出了辐射频率与波导壁距离  $b$  的关系, 可以看到随着  $b$  变小辐射频率也稍稍变低.

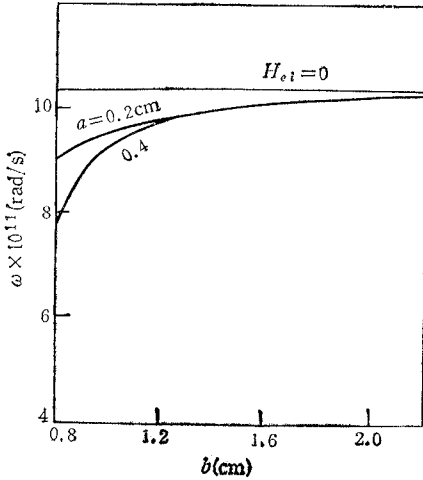


图 4 辐射频率与横向几何尺寸的关系.

对于 TE 模, (7) 和 (8) 式右端的摆动器场与扰动场的耦合项是:

$$\left. \begin{aligned} NL_x^c &\equiv \frac{e v_0}{m_0 \gamma_0 c^2} v_x^0 E_z^m + \frac{Q_{||} \gamma_0^2}{v_0} v_y^0 v_z^m - v_x^0 \left[ \frac{\partial v_x^m}{\partial x} + k_w \text{th}(k_w x) v_x^m \right] \\ NL_y^c &\equiv \frac{e v_0}{m_0 \gamma_0 c^2} v_y^0 E_z^m + \frac{e \gamma_0 v_0^2}{m_0 c^3} B_x^0 v_z^m - \frac{Q_{||} \gamma_0^2}{v_0} v_x^0 v_z^m - v_x^0 \frac{\partial v_y^m}{\partial x} \\ &\quad - k_w \text{th}(k_w x) v_y^0 v_z^m \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

角标“ $e$ ”, “ $m$ ”分别表示与 TE 模和 TM 模相联系的量, 在 (29) 式中没有考虑摆动器场与模本身的耦合项如  $\frac{1}{c} v_y^0 B_x^c$  等, 它们表示的是 TE 模各个谐波之间的相互作用, 不在

本文的研究范围内. 保留 (30) 式解 (7) 和 (8) 式可得到前节所没有考虑的非线性电流:

$$j_{yn}^{NLc} = -e n_n \left[ \frac{Q_{||} (NL_x^c)_n}{\Omega_n^2 - \Omega_{||}^2} + \frac{i Q_n (NL_y^c)_n}{\Omega_n^2 - \Omega_{||}^2} \right] - e n_n^m v_y^0 \quad (31)$$

$n_n^m$  为与 TM 模相联系的线性密度, 它和  $v_x^m$  等都可用  $E_{zn}^m$  来表示. 本文只对  $n = 0$  的 TE 模和  $n = 1$  的 TM 模感兴趣, 由 (31) 式可以得到与 (13) 式相应的非线性波动方程:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{c0}^2 \right) B_{z0}^c = \frac{4\pi}{c} (F k_w + G) \text{sh}(k_w x) E_{z1}^m + \frac{4\pi}{c} F \text{ch}(k_w x) \frac{\partial E_{z1}^m}{\partial x} + \frac{4\pi}{c} G k_w \text{ch}(k_w x) \int E_{z1}^m dx \quad (32)$$

式中

$$F = \frac{\Omega_w \omega_p^2}{8\pi} \left\{ \frac{k_w v_0^3}{(\Omega_{||}^2 - k_w^2 v_0^2) \Omega_1 c^2} \left[ 1 - \frac{\Omega_{||}^2 \left( \frac{k_1}{v_0} c^2 - \Omega_1 r_0^2 \right)}{(\Omega_1^2 - \Omega_{||}^2 - \omega_p^2 / r_0^2) \Omega_1 r_0^2} \right] \right. \\ - \frac{v_0^2 (\Omega_{||}^2 - k_w v_0 \Omega_0)}{(\Omega_0^2 - \Omega_{||}^2) (\Omega_{||}^2 - k_w^2 v_0^2) c^2} - \frac{\Omega_{||}^2 (k_w v_0 - \Omega_0)}{(\Omega_0^2 - \Omega_{||}^2) (\Omega_{||}^2 - k_w^2 v_0^2) r_0^2 \Omega_1} \\ - \frac{\Omega_0 v_0^2}{(\Omega_0^2 - \Omega_{||}^2) c^2 \Omega_1} + \frac{(\Omega_0 - \Omega_1) \Omega_{||}^2 v_0 (\omega v_0 - k_1 c^2)}{(\Omega_0^2 - \Omega_{||}^2) (\Omega_{||}^2 - k_w^2 v_0^2) (\Omega_1^2 - \Omega_{||}^2) c^2} \\ \left. \cdot \left[ 1 - \frac{\omega_p^2 \Omega_{||}^2 \left( \frac{k_1}{\Omega_1} c^2 - v_0 r_0^2 \right)}{(\omega v_0 - k_1 c^2) (\Omega_1^2 - \Omega_{||}^2 - \omega_p^2 / r_0^2) \Omega_1 r_0^2} \right] \right\} \quad (33)$$

$$G = \frac{\Omega_w \omega_p^2 v_0 (\Omega_{||}^2 - k_w v_0 \Omega_0) \Omega_1 (\omega v_0 - k_1 c^2) k_w}{8\pi (\Omega_0^2 - \Omega_{||}^2) (\Omega_{||}^2 - k_w^2 v_0^2) (\Omega_1^2 - \Omega_{||}^2) c^2} \quad (34)$$

取 TM 模为偶对称解  $E_{z1}^m = C^m \text{ch}(K_{m1}x)$ , 代入 (32) 式后解非齐次方程便得到考虑了耦合项后的 TE 模的解:

$$\left. \begin{aligned} B_{z0}^c &= C^c \cos K_{e0}x + C^m Q_1(x) \\ Q_1(x) &= \frac{P_1 \text{sh}(k_w + K_{m1})x}{(k_w + K_{m1})^2 + K_{c0}^2} + \frac{P_2 \text{sh}(k_w - K_{m1})x}{(k_w - K_{m1})^2 + K_{c0}^2} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{2\pi}{c} (F k_w + G + F K_{m1} + G k_w / K_{m1}) \\ P_2 &= \frac{2\pi}{c} (F k_w + G - F K_{m1} - G k_w / K_{m1}) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

(35) 式中第一项是齐次方程的通解, 只保留了偶对称解. 第二项来自泵浦场所引起的非线性耦合.

对于 TM 模由 (7) 和 (8) 式知摆动器场与扰动场的耦合项是

$$\left. \begin{aligned} NL_x^m &= \frac{-e}{m_0 r_0 c} v_y^0 B_z^c - v_x^0 \left[ \frac{\partial v_x^c}{\partial x} + k_w \text{th}(k_w x) v_x^c \right] \\ NL_y^m &= \frac{e}{m_0 r_0 c} v_x^0 B_z^c - v_x^0 \frac{\partial v_y^c}{\partial x} - k_w \text{th}(k_w x) v_y^0 v_x^c \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

它们所产生的非线性密度扰动是

$$n_n^{NLm} = \frac{n_0 \frac{\partial}{\partial x} (NL_x^m)_n}{\Omega_n^2 - \Omega_{||}^2 - \omega_p^2 / r_0^2} - i \frac{\Omega_{||} n_0 \frac{\partial}{\partial x} (NL_y^m)_n}{\Omega_n (\Omega_n^2 - \Omega_{||}^2 - \omega_p^2 / r_0^2)} \quad (38)$$

于是得到考虑了耦合项贡献的 TM 模方程:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - K_{m1}^2 \right) E_{z1}^m = (H k_w + J) \text{sh}(k_w x) B_{z0}^c + H \text{ch}(k_w x) \frac{\partial B_{z0}^c}{\partial x} \\ + J k_w \text{ch}(k_w x) \int B_{z0}^c dx \quad (39)$$

式中

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{-\omega_p^2 \beta_0^2 \left( \omega - \frac{c^2}{v_0} k_1 \right) \Omega_\omega}{2c (\Omega_1^2 - \Omega_\parallel^2 - \omega_p^2 / \gamma_0^2) (\Omega_\parallel^2 - k_\omega^2 v_0^2)} \\
 &\quad \cdot \left\{ k_\omega v_0 + \frac{\Omega_0 \Omega_\parallel^2}{\Omega_0^2 - \Omega_\parallel^2} + \frac{\Omega_\parallel^4}{\Omega_1 (\Omega_0^2 - \Omega_\parallel^2)} \right\} \\
 J &= \frac{-\omega_p^2 \beta_0^2 \left( \omega - \frac{c^2}{v_0} k_1 \right) \Omega_\parallel^2 k_\omega \Omega_\omega}{2c \Omega_1 (1 - \Omega_\parallel^2 / \Omega_0^2) (\Omega_\parallel^2 - k_\omega^2 v_0^2) (\Omega_1^2 - \Omega_\parallel^2 - \omega_p^2 / \gamma_0^2)}
 \end{aligned} \tag{40}$$

将偶对称解  $B_{z_0}^c = C^c \cos K_{c_0} x$  代入 (39) 式, 解非齐次方程便可得到包括非线性贡献的场:

$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned} E_{x1}^m &= C^m \operatorname{ch}(K_{m1} x) + C^c Q_2(x) \\ Q_2(x) &\equiv R_1 \operatorname{sh} k_\omega x \cos K_{c_0} x + R_2 \operatorname{ch} k_\omega x \sin K_{c_0} x \end{aligned} \right\} \tag{41} \\
 R_1 &= - \frac{H k_\omega (K_{m1}^2 - K_{c_0}^2 - k_\omega^2) + J (K_{c_0}^2 + K_{m1}^2 + k_\omega^2)}{(K_{c_0}^2 + K_{m1}^2 - k_\omega^2)^2 + 4K_{c_0}^2 k_\omega^2} \\
 R_2 &= \frac{H K_{c_0} (k_\omega^2 + K_{c_0}^2 + K_{m1}^2) + \frac{J k_\omega}{K_{c_0}} (K_{c_0}^2 - K_{m1}^2 + k_\omega^2)}{(K_{c_0}^2 + K_{m1}^2 - k_\omega^2)^2 + 4K_{c_0}^2 k_\omega^2}
 \end{aligned} \tag{42}$$

考虑了摆动器场以后电子束内 TE 模和 TM 模的其他场分量可以由麦克斯韦方程组得到:

$$\begin{aligned}
 E_{y_0}^c &= \frac{i\omega}{c K_{c_0}} \sin K_{c_0} x C^c + i Q_3(x) C^m \\
 E_{x1}^m &= \frac{\theta_1}{K_{m1}} \operatorname{sh} K_{m1} x C^m + i Q_4(x) C^c \\
 B_{y1}^m &= \frac{\theta_2}{K_{m1}} \operatorname{sh} K_{m1} x C^m + i Q_5(x) C^c
 \end{aligned} \tag{43}$$

式中

$$\begin{aligned}
 Q_3(x) &= \frac{\omega}{c} \left\{ \frac{P_1 \operatorname{ch}(k_\omega + K_{m1}) x}{(k_\omega + K_{m1}) [(k_\omega + K_{m1})^2 + K_{c_0}^2]} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{P_2 \operatorname{ch}(k_\omega - K_{m1}) x}{(k_\omega - K_{m1}) [(k_\omega - K_{m1})^2 + K_{c_0}^2]} \right\} \\
 Q_4(x) &= \left[ -k_1 R_1 + \frac{c^2 (H k_\omega + J)}{v_0 \left( \omega - \frac{c^2}{v_0} k_1 \right)} \right] \\
 &\quad \cdot \frac{k_\omega \operatorname{ch} k_\omega x \cdot \cos K_{c_0} x + K_{c_0} \operatorname{sh} k_\omega x \sin K_{c_0} x}{K_{c_0}^2 + k_\omega^2} \\
 &\quad + \left[ -k_1 R_2 + \frac{c^2 (-K_{c_0} H + J k_\omega / K_{c_0})}{v_0 \left( \omega - \frac{c^2}{v_0} k_1 \right)} \right]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \cdot \frac{k_w \operatorname{sh} k_w x \sin K_{e0} x - K_{e0} \operatorname{ch} k_w x \cos K_{e0} x}{K_{e0}^2 + k_w^2} \\
 Q_5(x) = & \left[ -\frac{\omega R_1}{c} + \frac{c(Hk_w + J)}{\left(\omega - \frac{c^2}{v_0} k_1\right)} \right] \frac{k_w \operatorname{ch} k_w x \cos K_{e0} x + K_{e0} \operatorname{sh} k_w x \sin K_{e0} x}{K_{e0}^2 + k_w^2} \\
 & + \left\{ -\frac{\omega R_2}{c} + \frac{c(-HK_{e0} + Jk_w/K_{e0})}{\omega - \frac{c^2}{v_0} k_1} \right. \\
 & \left. - \frac{\Omega_w \omega_0^2 \left[ \Omega_0^2 / (\Omega_0^2 - \Omega_{||}^2) + k_w v_0^2 \left( \frac{v_0 \omega}{c^2} - k_0 \right) / (\Omega_{||}^2 - k_w^2 v_0^2) \right]}{2c^2 \Omega_0 K_{e0}} \right\} \\
 & \cdot \frac{k_w \operatorname{sh} k_w x \sin K_{e0} x - K_{e0} \operatorname{ch} k_w x \cos K_{e0} x}{K_{e0}^2 + k_w^2}
 \end{aligned}$$

电子束内外的电磁场在束表面  $x = a$  处必须满足边界条件:

$$\left. \begin{aligned}
 E_{y0}^{(1)e} &= E_{y0}^{(2)e}, \quad B_{z0}^{(2)e} - B_{z0}^{(1)e} = -\frac{4\pi}{c} j_{y0}^{ie} \\
 E_{x1}^{(1)m} &= E_{x1}^{(2)m}, \quad E_{x1}^{(2)m} - E_{x1}^{(1)m} = 4\pi\sigma_1^m \\
 B_{y1}^{(2)m} - B_{y1}^{(1)m} &= \frac{4\pi}{c} j_{x1}^{im},
 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

式中角标“s”表示是面电流, 现在面电流和面电荷都包括了泵浦场所产生的非线性贡献。

注意  $j_{y0}^{ie} = \frac{i}{2} v_2 \sigma_1^m$ ,  $j_{x1}^{im} = v_0 \sigma_1^m$ . 将 (35)、(41)、(43) 式代入 (44) 式, 消去  $\sigma_1^m$ , 便可得到一个包含四个未知数  $A^{(2)}$ 、 $D^{(2)}$ 、 $C^e$ 、 $C^m$  的齐次方程组. 有解的必要条件是它的系数行列式为零. 将行列式展开后得

$$F^e \cdot F^m = RC^v + RC^s \quad (45)$$

式中

$$F^e = \cos(K_{e0}a) \sin[H_{ei}(b-a)] + \frac{H_{ei}}{K_{e0}} \cos[H_{ei}(b-a)] \sin(K_{e0}a) \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
 F^m = & \left( \frac{\omega_p^2}{\gamma_0^2} - \Omega_1^2 \right) \operatorname{sh}[H_{m1}(b-a)] \operatorname{sh}(K_{m1}a) / \Omega_1^2 K_{m1} \\
 & - \frac{1}{H_{m1}} \operatorname{ch}(K_{m1}a) \operatorname{ch}[H_{m1}(b-a)] \quad (47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 RC^v = & \left\{ \frac{Q_5}{Q_1} \operatorname{sh}[H_{m1}(b-a)] - \frac{Q_2 \operatorname{ch}[H_{m1}(b-a)]}{cH_{m1}} \right\} \\
 & \cdot \{ c^2 H_{ei} \cos[H_{ei}(b-a)] Q_3 / \omega + c Q_1 \sin[H_{ei}(b-a)] \} \quad (48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 RC^s = & -\frac{v_0 Q_4}{Q_1} \operatorname{sh}[H_{m1}(b-a)] \cdot \{ c H_{ei} \cos[H_{ei}(b-a)] Q_3 / \omega \\
 & + Q_1 \sin[H_{ei}(b-a)] \} + \frac{v_2 k_1 \operatorname{ch}[H_{m1}(b-a)] \sin[H_{ei}(b-a)]}{2cH_{m1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \frac{c \left( Q_3 - \frac{v_0}{c} Q_4 \right) \text{ch}(K_{m1}a)}{\Omega_1} - \frac{Q_2(\omega_p^2/\gamma_0^2 - \Omega_1^2) \text{sh}(K_{m1}a)}{K_{m1}\Omega_1^2} \right\} \\ & + \frac{i \sin [H_{e1}(b-a)] v_2 \theta_1}{2cK_{m1}} \cdot \left\{ c \left( Q_3 - \frac{v_0}{c} Q_4 \right) \text{sh}(K_{m1}a) \right. \\ & \cdot \left. \text{sh}[H_{m1}(b-a)]/\Omega_1 - Q_2 \text{ch}[H_{m1}(b-a)] \text{sh}(K_{m1}a)/H_{m1} \right\} \quad (49) \end{aligned}$$

(45) 式具有熟悉的耦合模的非线性色散关系的形式。耦合项分两部分，一部分是体耦合的贡献  $RC^v$ ，另一部分是面耦合的贡献  $RC^s$ ，这从后者显含  $v_0$  或  $v_2$  可以看出，它们是通过边界条件中的面电流引入的。两者的大小都正比于  $|\Omega_w|^2$ ，所以当泵浦场强趋于零时，我们很容易从 (45) 式得到 TE 模和 TM 模的线性色散关系  $F^e = 0$  和  $F^m = 0$ 。泵浦的存在会使这两个模发生耦合，频率  $\omega$  会产生一个非线性移动  $\Delta\omega$ 。为了求它，我们将  $F^e$  和  $F^m$  在  $F^e = 0$  和  $F^m = 0$  的交点  $(\omega^*, k^*)$  处作泰勒展开，于是有

$$\Delta\omega^3 = \left[ (RC^v + RC^s) / \left( \frac{\partial F^e}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial F^m}{\partial \omega} \right) \right]_{k^*, \omega^*} \quad (50)$$

当右端小于零时便可得到波的不稳定增长。

## 五、数值结果和讨论

在这一节我们将通过对 (50) 式的数值计算来研究波导壁和束边界对自由电子激光不稳定性的影响。计算参数是轴向磁场  $B_{||} = 3.0\text{kG}$ ，电子束的相对论性因子  $\gamma_0 = 3.0$ ，等离子体频率  $\omega_p = (4\pi n_0 e^2 / m\gamma_0)^{1/2} = 2.93 \cdot 10^{10}\text{rad/s}$ ，摆动器场振幅  $B_w = 0.5\text{kG}$ ，波矢

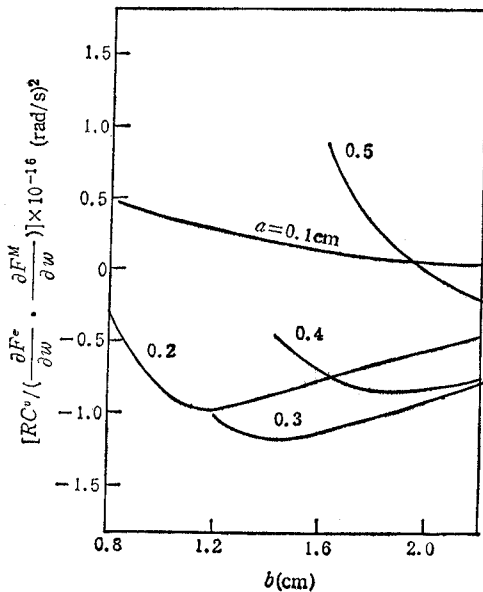


图5 体耦合与横向几何尺寸间的关系

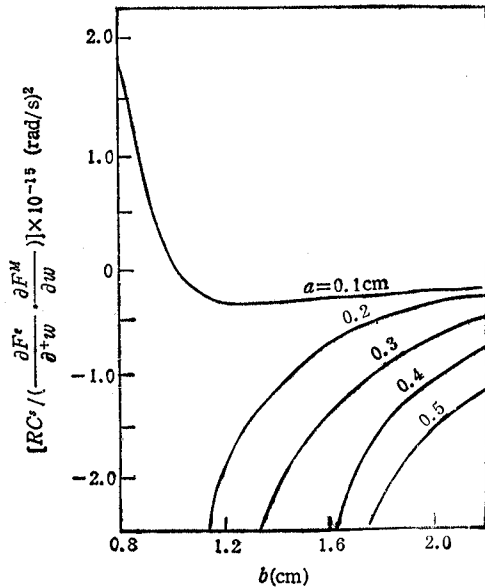


图6 面耦合与横向几何尺寸间的关系

$k_w = 2.094\text{cm}^{-1}$ . 在计算中 (27) 式右端取“—”号, 相当于慢空间电荷波情形.  $H_{ei}$  取第一个根即  $i = 1$ . 图 5 和图 6 画出了体耦合贡献和面耦合贡献与几何尺寸的关系. 总的来说, 面耦合的贡献比体耦合的贡献大约要小一个量级. 在束厚度  $a = 0.1\text{cm}$  时无论是面耦合还是体耦合都很小, 甚至还是正的, 这时将没有不稳定解. 其物理原因是辐射波 (TE 模) 的电场在波导中心处趋于零 (见图 3), 结果使得 (39) 式右端的非线性耦合项为零, 从而场  $E_{z1}^m$  的非线性部分  $Q_2$  也为零, 于是得到如图的结果. 在图中有的曲线未画到头 这是因为我们只取了满足  $(K_{en}a)^2/3 \ll 1$  的部分.

图 7 画出了增长率曲线, 其中一个特点是当波导壁距离  $b$  增加时,  $a$  固定的增长率曲线缓缓下降, 其原因与上面所说的类似, 只是现在是辐射场的电场在束表面按  $\sin [H_{ei} \times (b - a)]$  随  $b$  增加而下降. 第二个特点是随着束厚度的变厚整个增长率曲线下降. 其原因是场  $B_{z1}^m$  的非线性部分  $Q_2$  随  $a$  增大而单调下降 (图 8).  $Q_2$  是通过非线性传导电流和位移电流在  $x$  方向上积分而得到的.  $a = 0.2\text{cm}$  的曲线在下面的原因是此时厚度太

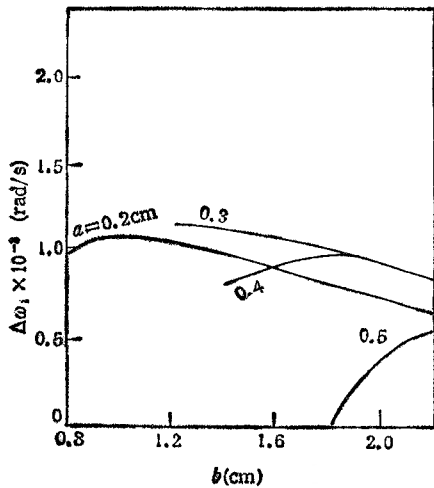


图 7 辐射波增长率与横向几何尺寸之间的关系

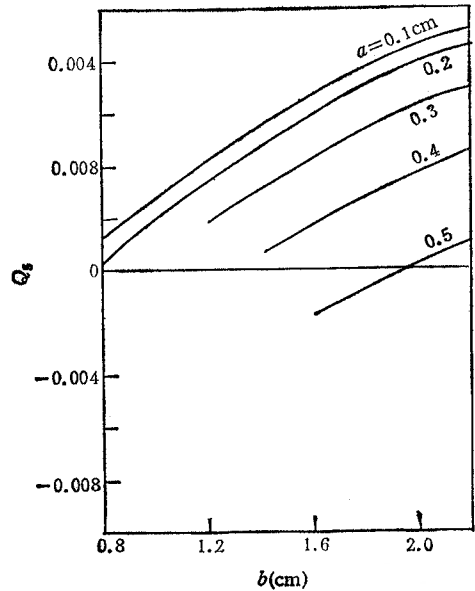


图 8  $Q_2$  与横向几何尺寸的关系

薄, 以至场  $E_{z1}^m$  的非线性部分  $Q_2$  很小的缘故. 总之当束厚度很小时电场在波导中心处很小, 故增长率为零; 当厚度变大时由于非线性电流横向积分变小而增长率变小, 因此存在一个增长率为极大的最佳厚度.

作者衷心感谢与尹元昭同志的讨论.

### 参 考 文 献

- [1] S. H. Gold, W. M. Black, H. P. Freund, V. L. Granatstein, R. H. Jackson, P. C. Efthimion, and A. K. Kinkead, *Phys. Fluids*, 26(1983), 2683.
- [2] H. S. Uhm and R. C. Davidson, *ibid.*, 24(1981), 1541.
- [3] H. S. Uhm and R. C. Davidson, *ibid.*, 24(1981), 2348.

- [ 4 ] H. S. Uhm and R. C. Davidson, *ibid.*, 26(1983), 288.  
[ 5 ] T. Shiozawa and T. Nakashima, *J. Appl. Phys.*, 55(1984), 637.  
[ 6 ] T. Shiozawa and H. Nakano, *IEEE J. of QE*, QE-21(1985), 931.  
[ 7 ] Y. Z. Yin and G. Bekefi, *J. Appl. Phys.*, 55(1984), 33.

## THE TRANSVERSE GEOMETRIC EFFECTS IN A FREE ELECTRON LASER

Ying Runjie

(*Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing*)

**ABSTRACT** The effects of the beam thickness and the conducting wall in a free electron laser with a linearly polarized wiggler magnetic field and an axial magnetic field are investigated within the framework of fluid-Maxwell equations. The growth rate of free electron laser instability is obtained, in which the nonlinear volume and surface current density are simultaneously considered. The numerical calculations indicate that the volume coupling is dominant. There is a particular value of the beam thickness and the separation between the conducting wall and the beam for which the growth rate becomes maximum.

**KEY WORDS** Free electron laser; Transverse geometric effect; stability