

# $k$ 故障的 $\xi$ 可诊性\*

张志涌 杨祖樱

(福州大学自动化所 福州 350002)

**摘要** 本文利用摄动理论和流形距离,首次提出了容差电路 $k$ 故障可诊条件.该条件定量地描述了容差电路可诊性是如何依赖于电路标称数据和可测得信号的.文章还指出了该可诊条件为合理使用定位故障的极值法提供了理论基础.

**关键词** 故障诊断,可诊性,摄动分析,流形

## 1 引言

故障诊断理论的发展极不平衡.对标称电路而言,从 $k$ 故障可诊条件<sup>[1]</sup>, $T_f$ 等价类的确定<sup>[2]</sup>到具体诊断算法都已发展得十分完善.然而对容差电路来说,情况恰完全两样.

人们早从感性上认识到了容差电路的故障可诊性不仅与电路拓扑结构(关联阵 $A$ 、可及节点集 $S_{..}$ )有关,而且还严重地受元件参数(标称导纳阵 $Y_0$ 、偏差增量阵 $Y_d$ ),故障位置及大小(故障增阵 $Y_f$ ),和外施激励(阵 $J$ )的影响.但令人遗憾的是,关于容差电路故障可诊性的理性定量分析至今没有出现.

理论上的贫乏必然导致诊断算法上的盲目.以极值法为例,该法可抽象为以下描述形式

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \varphi(S_i | A, S_{..}, Y_0, Y_d, Y_f, J) \\ \hat{S}_f &= \text{Arg}\{\gamma_f = \text{extremum}(\gamma_i), \forall i\} \end{aligned}$$

在此, $\varphi$ 是准则函数, $\gamma_i$ 是非负实数, $S_i$ 是逐个尝试的支路子集, $\hat{S}_f$ 是估计出的故障支路子集.这极值法在文献中以各种形式出现并用来定位故障.然而,也不难发现,几乎所有的文献都有意或无意地回避了两个要害问题.其一是,真故障支路子集 $S_f$ 使 $\varphi(\cdot)$ 确取极值的条件是什么?其二是反问题,使 $\varphi(\cdot)$ 取极值的 $\hat{S}_f$ 恰是 $S_f$ 的条件又是什么?这正是本文将研究的 $k$ 故障可诊性问题.

## 2 容差问题的数学描述

对于正常参照是标称电路的第二类容差电路故障诊断问题,有如下模型:

$$\Delta U = U_f + U_d, \quad (1)$$

1993-10-18收到,1994-04-18定稿

\* 国家自然科学基金资助课题

张志涌 男,1944年生,副研究员,现从事系统辨识、故障诊断、神经网络的研究工作.

杨祖樱 女,1943年生,副教授,现从事网络分析、故障诊断的研究工作.

$$U_f = Z_m Y_f \bar{Z}_{k,m} J = Z_f Y_{kf} \bar{Z}_{k,m} J, \quad (2)$$

$$U_d = \bar{Z}_m Y_d \bar{Z}_{k,m} J, \quad (3)$$

式中  $\Delta U$  是可及点上测得的电压增量阵;  $U_f$  是故障信息阵(与容差无关);  $U_d$  是偏差干扰阵;  $J$  是充分激励阵(最简单情况,即取单位阵)。其余各量的意义请参考文献 [3,4]。

基于数学考虑,研究将从(1)式的如下能量形式进行,即

$$M = F - \Phi \quad (4)$$

式中  $M = \Delta U \cdot \Delta U^*$ ;  $F = U_f \cdot U_f^*$ ;  $-\Phi = U_f \cdot U_d^* + U_d \cdot U_f^* + U_d \cdot U_d^*$ 。并记  $M, F$  的酉分解为

$$M = [X_1 X_2] \text{Diag}(\Lambda_1 \Lambda_2) [X_1 X_2]^*, \quad (5)$$

$$F = [\tilde{X}_1 \tilde{X}_2] \text{Diag}(\tilde{\Lambda}_1 0) [\tilde{X}_1 \tilde{X}_2]^*, \quad (6)$$

在此,  $\Lambda_1, \tilde{\Lambda}_1$  都是由  $k$  个非零元构成的对角阵。于是,  $\Delta U$  的  $k$  维最大能量子空间<sup>[4]</sup>可表述为

$$S(\Delta U, k) = \text{Span}_{\text{coi}}(X_1).$$

另外,为分析需要,人为地构造  $G$ , 且

$$G = [Q_1 Q_2] \text{Diag}(\Lambda_1 0) [Q_1 Q_2]^*, \quad (7)$$

$$\text{Span}_{\text{coi}}(Q_1) = \text{Span}_{\text{coi}}(Z_i),$$

$$Z_i = Z_f \Leftrightarrow G = F.$$

顺便指出,  $\Lambda_2$  无需关心, 注意的只是  $Q_1, Q_2$ 。为在流形中研究  $S(Q_1) \triangleq \text{Span}_{\text{coi}}(Q_1)$  与  $S(\Delta U, k)$  之间的距离, 令  $R \triangleq GX_1 - X_1 \Lambda_1$ 。再据(5), (6), (7)式, 可得

$$R = \begin{cases} \Phi X_1, & Z_i = Z_f; \\ (G - F + \Phi) X_1, & Z_i \neq Z_f. \end{cases} \quad (8)$$

又由于  $Q_2^* R = -Q_2^* X_1 \Lambda_1$ , 据  $\|\sin \Theta(\cdot, \cdot)\|$  定义<sup>[5,6]</sup>可得

$$\begin{aligned} \|\sin \Theta(X_1, Z_i)\| &= \|\sin \Theta(X_1, Q_1)\| = \|Q_2^* X_1\| \\ &= \begin{cases} \|\tilde{X}_2^* \Phi X_1 \Lambda_1^{-1}\|, & Z_i = Z_f; \\ \|Q_2^* (F - \Phi) X_1 \Lambda_1^{-1}\|, & Z_i \neq Z_f. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

该式的意义在于, 它从距离测度上描述了  $S(\Delta U, k)$  与各  $Z_i$  列向量所张子空间  $S(Q_i)$  之间的位置关系, 从而为定量分析容差电路可诊性奠定了基础。

### 3 故障形态与容差的关系

#### 3.1 无容差情况

无容差即  $\Phi = 0$ 。此时  $M = F$ ,  $Q_2^* F X_1 \Lambda_1^{-1} = Q_2^* X_1$ , 于是(9)式蜕化为

$$\|\sin \Theta(X_1, Z_i)\| = \begin{cases} 0, & Z_i = Z_f; \\ \|Q_2^* X_1\|, & Z_i \neq Z_f. \end{cases} \quad (10)$$

此式清楚表明: (1)由故障子阵  $Z_f$  引起的可测数据的  $S(\Delta U, k)$  与  $S(Z_f)$  的距离一定取最小值 0。(2)假若  $S(Z_i) \neq S(Z_f)$  成立, 那么保证了  $S(\Delta U, k)$  与所有  $S(Z_i)$  ( $i \neq f$ ) 的距离一定大于 0。这意味着, 离散的支路子集全体与作为特征模板的  $S(Z_i)$  子空间全

体之间存在内射的映照关系。这种情况下,运用极值法定位故障可保证定位的唯一性、准确性。(3)若  $i \neq f$  时,有别的  $S(Z_i) = S(Z_f)$  存在,则定位只能在  $T_f$  等价类意义上保证唯一和准确。

### 3.2 可理想白化的容差情况

这是指经理想的白化处理后所得(4)式中可保证  $E\{U_f \cdot U_f^*\} = 0, E\{U_d \cdot U_d^*\} = I$ 。在此时,对(9)式求数学期望可得

$$E\{\|\sin \Theta(X_1, Z_i)\|\} = \begin{cases} 0, & Z_i = Z_f; \\ \|\mathcal{Q}_i^*(F - I)X_1 A_1^{-1}\|, & Z_i \neq Z_f. \end{cases} \quad (11)$$

由该式可以看到:在理想白化时,  $S(\Delta U, k)$  与  $S(Z_i)$  之间距离的数学期望性质与无容差情况相似。这的确是十分诱人的。但必须记住,这仅是在理想白化下的数学期望性质。在故障诊断情况下,通常测量数据的数目十分有限。因此,所能进行的白化将是相当粗糙的。这就是说,利用  $E\{\|\sin \Theta(X_1, Z_i)\|\}$  来观察  $\|\sin \Theta(X_1, Z_i)\|$  的能力十分有限。

### 3.3 有容差时的一般情况

容差的存在使故障的表现形态发生了根本的变化。研究(9)式,可归纳出以下几点:

(1)  $\|\sin \Theta(X_1, Z_f)\| \approx 0, E\{\|\sin \Theta(X_1, Z_f)\|\} \approx 0$ 。而且它们严重地依赖于  $A, S_{..}, Y_0, Y_d, Y_f$  及  $J$ 。

(2)  $A_1$  反映了测量数据  $\Delta U$  的  $k$  维最大能量子空间  $S(\Delta U, k)$  中故障信息的强弱。 $A_1$  愈大,  $\|\sin \Theta(X_1, Z)\|$  就愈小,  $S(\Delta U, k)$  和  $S(Z_f)$  就靠得愈近。反之,则两个子空间的夹角就愈大,且

$$E\{\|\sin \Theta(X_1, Z_f)\|\} \xrightarrow{Y_f \rightarrow 0} (1 - \delta),$$

在此  $\delta$  是相当靠近 0 的小正数。图 1 取自本文仿真实例,它典型地反映了  $E\{\|\sin \Theta(X_1, Z_f)\|\}$  随故障导纳相对增量变化的趋势。

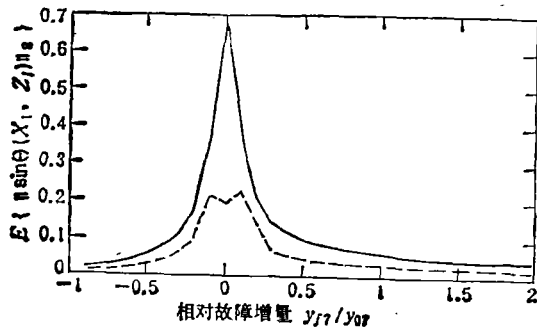


图 1  $\|\sin \Theta(X_1, Z_f)\|$  统计均值及标准差曲线  
“实线”是均值 “虚线”是标准差

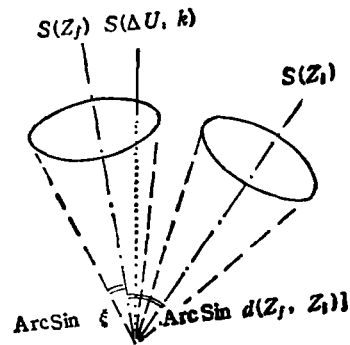


图 2 流形中的故障锥

(3) 据范数性质,由(9)式可得

$$\|\sin \Theta(X_1, Z_f)\| \leq \|\tilde{X}_2^* \Phi X_1\|_2 / \lambda_k \leq \|\Phi\|_2 / \lambda_k \leq \xi, \quad (12)$$

在此  $\xi \triangleq \text{Sup} \|\Phi\|_2 / \lambda_k$ , 称谓扰偏率。 $\lambda_k$  是  $A_1$  的最小对角元,它是  $\Delta U$  的  $k$  维最大能量子空间中的最小方向能量<sup>[4]</sup>。而(12)式的几何物理意义在于:故障  $Y_f$  对应的  $S(\Delta U, k)$

一定落在以  $S(Z_f)$  为轴,  $(2\text{arc sin } \xi)$  为顶角的圆锥  $C(Z_f, \xi)$  内, 见图 2 示意。这里  $C(Z_f, \xi)$  称为故障锥。

从以上分析可知, 容差的存在, 使有限的、离散故障支路集全体映射出一个无限的、密集的且相互交迭的  $S(\Delta U, k)$  全体。因此, 作为其逆映射的诊断将必然是困难的。

#### 4 充分激励下的 $k$ 故障 $\xi$ 可诊条件

上节研究了测量子空间  $S(\Delta U, k)$  与各特征模板子空间  $S(Z_i)$  的关系。然而, 影响可诊性的另一个重要因素是各特征子空间之间的相互位置关系。 $S(Z_i)$  与  $S(Z_j)$  之间的距离定义如下:

$$d(Z_i, Z_j) \triangleq \|\sin \Theta(Z_i, Z_j)\|_2 = \sqrt{1 - \sigma_{\min}^2(\tilde{X}_i^* \tilde{X}_j)}, \quad i \neq j.$$

式中  $Z_i, Z_j$  是  $Z_{m,k}$  的  $(m \times k)$  子阵;  $\tilde{X}_i, \tilde{X}_j$  分别是  $S(Z_i), S(Z_j)$  的西基阵;  $\sigma_{\min}(\cdot)$  是括号内阵的最小奇异值。据此定义一定有  $0 \leq d(Z_i, Z_j) \leq 1$ 。 $S(Z_i)$  与  $S(Z_j)$  重合时,  $d(Z_i, Z_j)$  取 0;  $S(Z_i)$  与  $S(Z_j)$  之间只要一维正交,  $d(Z_i, Z_j)$  就是 1。又令

$$d_k \triangleq \text{Min} \left\{ d(Z_i, Z_j) \mid i \neq j; i, j \in \left[ 1, \binom{b}{k} \right] \right\}$$

为  $Z_{m,k}$  的  $k$  阶距离。于是可写出如下定理。

**定理 1** 在充分激励下, 容差电路  $k$  故障可诊的必要条件是  $d_k > 0$ , 充分条件是  $d_k > 2\xi$ 。

**证明** 必要条件是显然的。若  $d_k = 0$ , 那么至多只能在  $T_f$  意义上准确定位故障。充分条件可利用距离不等式推演而得。因为

$$\begin{aligned} \|\sin \Theta(X_1, Z_i)\|_2 &\geq \|\sin \Theta(Z_f, Z_i)\|_2 - \|\sin \Theta(X_1, Z_f)\|_2 \\ &> 2\xi - \|\sin \Theta(X_1, Z_f)\|_2 \\ &> 2\xi - \xi = \xi, \end{aligned}$$

而  $\|\sin \Theta(X_1, Z_f)\|_2 \leq \xi$ , 所以一定有

$$\|\sin \Theta(X_1, Z_i)\|_2 > \|\sin \Theta(X_1, Z_f)\|_2, \quad i \neq f. \quad \text{证毕}$$

围绕该定理作如下说明:

- (1) 无容差时,  $\xi = 0$ 。因此该定理即蜕化为标称电路  $k$  故障可诊的充要条件。
- (2)  $\xi$  可诊充分条件的内涵思想是十分朴素的, 即只要各特征故障锥  $C(Z_i, \xi)$  各不相同, 那么  $S(\Delta U, k)$  全体与故障支路集全体的内射映照便能建立。
- (3) 该  $\xi$  充分条件保证了

$$\|\sin \Theta(X_1, Z_f)\|_2 = \text{Min} \left\{ \|\sin \Theta(X_1, Z_i)\|_2 \mid i \in \left[ 1, \binom{b}{k} \right] \right\}.$$

这意味着, 在充分条件满足时, 运用极值法可唯一、准确地定位故障。

(4) 元件标称值直接影响  $d(Z_i, Z_j)$ , 即  $S(Z_i), S(Z_j)$  在流形中的相对位置, 从而也影响故障的可诊性。因此, 对于容差电路来说, 为改善故障的可诊性, 应选择适当的可及节点使  $d_k$  尽可能大。

## 5 单激励下的 $k$ 故障 $\xi$ 可诊条件

在单激励下,测得的  $\Delta U$  不过是根向量,记为  $\Delta u$ .且记它在  $S(Z_i)$  上的投影为  $u_i = P_i \cdot \Delta u$ ,在此  $P_i$  是  $S(Z_i)$  的正交投影算子.于是

$$\|\sin \Theta(\Delta u, Z_i)\|_2 = |\sin \theta(\Delta u, u_i)|,$$

并可利用距离不等式写出

$$|\sin \theta(\Delta u, u_i)| \geq ||\sin \theta(u_f, u_i)| - |\sin \theta(\Delta u, u_f)|| \quad (13)$$

又因为  $u_f, u_i$  分别是  $S(Z_f), S(Z_i)$  中的向量,所以直接由  $\|\sin \Theta(Z_f, Z_i)\|_2$  的定义可写出

$$\alpha(Z_f, Z_i) \leq |\sin \theta(u_f, u_i)| \leq d(Z_f, Z_i). \quad (14)$$

式中  $\alpha(Z_f, Z_i)$  称为  $S(Z_f)$  和  $S(Z_i)$  的分离度.它定义如下

$$\alpha(Z_f, Z_i) \triangleq \sqrt{1 - \sigma_{\max}^2(\tilde{X}_f^* \tilde{X}_i)}, \quad i \neq f.$$

式中  $\tilde{X}_f, \tilde{X}_i$  定义如前;  $\sigma_{\max}(\cdot)$  是括号内阵的最大奇异值.再记  $Z_m$  的  $k$  阶分离度为

$$\alpha_k \triangleq \text{Min} \left\{ \alpha(Z_f, Z_i) \mid f \neq i; f, i \in \left[ 1, \left( \frac{b}{k} \right) \right] \right\},$$

于是可直接写出如下定理.

**定理 2** 在单激励下,容差电路  $k$  故障可诊的必要条件是  $d_k > 0$ ,充分条件是  $\alpha_k > 2\xi$ .

该定理中  $\xi$  的算法与前相同,不过可以更明确地记述为  $\xi \triangleq \text{Sup} \|\Phi\|_2 / (\Delta u^* \Delta u)$ .当然,这里的  $\Phi$  也是在单激励下定义的.

该定理形式与多激励情况相似,但实质上其充分条件更苛刻.这是因为  $d_k$  反映的是两子空间的最大主夹角,而  $\alpha_k$  反映的却是最小主夹角.有关主夹角概念,参见文献[6].

还应指出:由于  $m$  维环境中,两个  $k$  维子空间至少有  $\text{Max}\{0, 2k - m\}$  个主夹角为零,因此在利用单激励诊断  $k$  故障时,应使可及点数  $m \geq 2k$ .这明显不同于无容差时,  $m \geq k + 1$  的条件.原因是无容差时,测量得的  $\Delta u$  恰好落在两个子空间交的概率为 0.

从以上分析可知,用单激励去定位  $k$  故障要特别谨慎.

## 6 仿真情况

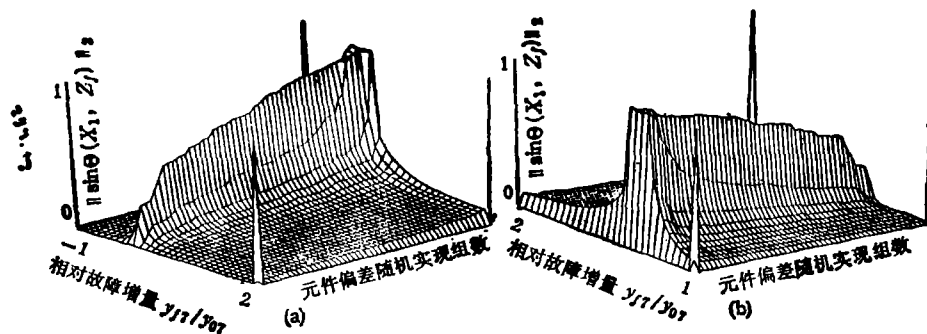
仿真用的网络,节点和支路编号,可及点的设置都与文献[3,4]相同.且设 7 号支路故障,激励采用最简单的单位阵.元件标称值与文献[3,4]一样由随机生成,不同的是,在以下仿真中,取定的标称值保持不变.

研究  $\|\sin \Theta(X_1, Z_f)\|_2$  的仿真在 1500 个“实现”构成的总体上进行.具体地说,令相对故障增量

$$y_{j1}/y_{01} = 0.1j - 1, \quad j = 1, \dots, 30.$$

在每个故障取值下,在 5% 相对容差限内生成 50 组不同的随机元件偏差“实现”.

在这总体上算得的  $\|\sin \Theta(X_1, Z_f)\|_2$  形象地表示为网面图 3a 和 3b.这两个网面图

图3  $\|\sin \theta(X_1, Z_j)\|_2$  的样本网面图

注: 图3b由图3a旋转180°而得

互为旋转180°。网面图的最外周边是人为设置  $\|\sin \theta(X_1, Z_j)\|_2 = 0$  而生成的基准面; 网面图四周角上有人为设置  $\|\sin \theta(X_1, Z_j)\|_2 = 1$  而生成的标高符号。

由网面图3可以清楚看到相对故障值和不同偏差“实现”对  $\|\sin \theta(X_1, Z_j)\|_2$  的影响: (1)  $|y_{17}/y_{07}|$  变小, 使  $\|\sin \theta(X_1, Z_j)\|_2$  有向1变大的趋势。(2) 同一个  $y_{17}/y_{07}$  取值下, 不同元件偏差实现, 所得的  $\|\sin \theta(X_1, Z_j)\|_2$  也不同。这种差异, 在  $|y_{17}/y_{07}|$  较小时, 表现得更突出。(3) 在  $|y_{17}/y_{07}|$  较大时,  $\|\sin \theta(X_1, Z_j)\|_2$  比较小, 受偏差影响也小, 利于故障定位。第3节的图1就反映了这种统计趋势。

$\|\sin \theta(X_1, Z_j)\|_2$  网面图的等高线如图4所示。其中0.18等高线是在

$$\|\sin \theta(X_1, Z_j)\|_2 = \frac{1}{2} \text{Min}\{d(Z_7, Z_i) | i \neq 7, i = 1, \dots, 20\}$$

时而得的。它反映了7号支路取不同故障值时, 可准确定位的概率。从该图可以看出当  $y_{17}/y_{07} < -0.6$  或  $y_{17}/y_{07} > 0.7$  时, 定位将以概率1是准确的。

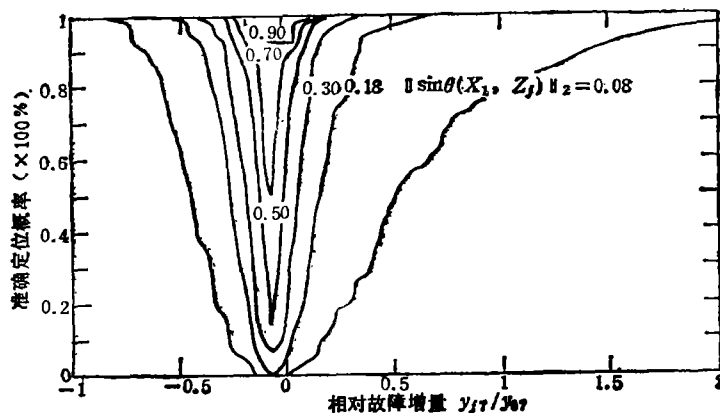


图4 等高线和准确定位概率

## 7 结 束 语

本文建立的容差电路故障可诊条件除其自身的理论意义外, 还为重新审视以往文献

概念和算法提供了新的支点。比如诊断问题的分类,可及点的选择,最佳激励的确定都与可诊条件密切相关。

当然,流形中除  $\|\sin \Theta(\cdot, \cdot)\|_2$  度量外,还有其他距离,如  $\|\sin \Theta(\cdot, \cdot)\|_F$ 。至于哪种度量能引出更弱的可诊条件有待进一步研究。

### 参 考 文 献

- [1] Liu R W. A Circuit Theoretic Approach to Analog Fault Diagnosis. in *Testing and Diagnosis of Analog Circuits and Systems*. ed. by Liu R W. New York: Van Nostrand Reinhold, 1991, 1—35.
- [2] Togara Y, Matsumoto T, Arai H. IEEE Trans. on CAS, 1986, CAS-33(10): 992—1009.
- [3] 张志涌,杨祖樱,电子科学学刊,1994,16(1): 18—25.
- [4] 张志涌,杨祖樱,通信学报,1993,14(3): 5—10.
- [5] Davis C, Kahan W M. SIAM J. Numer. Anal., 1970, 7(1): 1—46.
- [6] Golub G, Van Loan C F. *Matrix Computations*. Baltimore: Johns Hopkins Univ. Press, 1983. 428—431.

## $\xi$ -TESTABILITY FOR $k$ -FAULTS DIAGNOSIS

Zhang Zhiyong    Yang Zuying

(Institute of Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350002)

**Abstract**    Using perturbation theories and a distance in manifolds, this paper initiates a testability condition for  $k$ -faults diagnosis in analog circuits with tolerance. In this condition, this paper mathematically elaborates how testability of a circuit with tolerance depends on both nominal data and measurable signals of the circuit. In addition, it is shown that this condition provides a theoretical basis for reasonably application of extreme methods to locate faults.

**Key words**    Fault diagnosis, Testability, Perturbation analysis, Manifold