

计算任意形状导体表面电流分布的 节点单元电流模型* **

戴世雄 鲁述

(武汉大学空间物理系, 武昌)

摘要 本文提出了计算任意形状导体表面上感应电流分布的一种新的电流模型——节点单元电流模型。这种模型摆脱了在建立电流模型时传统理论模式的局限, 显著地减少了计算电流分布所需未知量的个数。文中还给出了利用这种模型计算一些典型问题的结果, 它们和其它方法(包括严格解)得到的结果非常一致。

关键词 近场分析; 表面电流分布; 面片模拟; 节点单元电流模型

一、引言

复杂形状导体近场问题的理论及计算方法的研究是国内外学者普遍关注的前沿课题, 具有重要的理论意义和实用价值。近场问题中最基本的物理量是导体表面的感应电流。对于表面电流的计算, 目前最有代表性的是面块模型的方法^[1-3], 而建立电流模型是其计算方法中最关键的一环。由于传统的理论模式总是局限于在封闭的子域内定义电流基函数并用伽略金法求解, 很难使电流基函数准确地反映感应电流的真实分布。本文利用平面三角形面块作面元的表面近似下面电流的完备性展开, 建立了将离散型电流基函数与连续型检验基函数相结合的节点单元电流模型体系, 使电流模型更加准确地反映了感应电流的真实分布, 从而将在一定的电流计算精度要求下, 使所需的未知量数目减少到最小值。

二、节点单元电流模型体系

面块模型方法是将导体表面用一系列小面元构成的模拟面来近似, 将导体表面的感应电流电荷用模拟面上的电流电荷来近似, 在模拟面上建立子域基电流模型, 并运用EFIE/MM法求解模拟面上的电流电荷分布。为了得到导体表面感应电流的稳定数值解, 假定在模拟面上各处电流电荷均为有限值。本文采用平面三角形面块作为近似复杂形状导体表面的小面元, 利用表面电流的完备性展开将表面电流分解成一系列子域内电流加权分布的叠加。为了近似在子域内表面电流的加权分布, 用了一组正交矢量基函数, 并在此基础上根据电流基函数和检验基函数各自的特点, 确立了将离散型电流基函数与

* 1989年4月20日收到, 1989年12月18日修改定稿。

** 国家自然科学基金资助课题。

连续型检验基函数相结合的节点单元电流模型体系,使电流基函数和检验基函数在更准确地反映电流真实分布的基础上统一起来。

1. 模拟面上表面电流的完备性展开

假定在模拟面 S 上,平面三角形面块的数目为 N_T , 节点数目为 N_n . 设在任一节点 P_i 周围的三角形块数为 NP_i , 适当选择一起始三角形块,按逆时针方向计算,各三角形块的编号分别为 $1, 2, \dots, NP_i$ (图 1)。

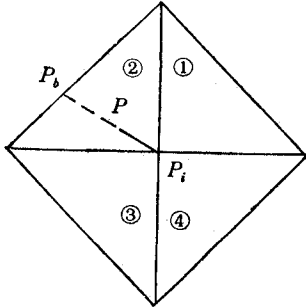


图 1 节点单元

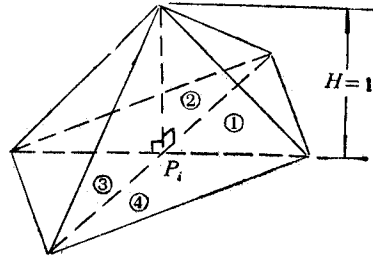


图 2 展开函数的几何意义

将这样一个以任一节点 P_i 为中心的 NP_i 个三角形面块构成的单元定义为一个节点单元,记为 $NU(NP_i, P_i)$; 将这 NP_i 个三角形面块闭域所构成的集合定义为 SCP_i ; 将相应的 NP_i 个三角形面块开域所构成的集合定义为 SOP_i 。

定义展开函数 $H(P, P_i)$: 假定 P 为 SCP_i 内任意一点,沿 P_iP 作延长线交 SCP_i 之边界于 P_b 点,定义

$$H(P, P_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|P_iP|}{|P_iP_b|} & P \in SCP_i \\ 0 & P \notin SCP_i \end{cases} \quad (1)$$

图 2 表示 $H(P, P_i)$ 的几何意义。

若 P 点正好落在 $NU(NP_i, P_i)$ 内的 ΔP_iAB 上,如图 3 所示,则容易证明:

$$H(P, P_i) = \frac{S_{\Delta PAB}}{S_{\Delta P_iAB}} \quad (2)$$

对于 S 上任一点 P , 它与 S 上三角形块的相对位置关系只有下列三种情形: (1) P 为 S 上某 ΔABC 的内点,用 P_1 表示; (2) P 为 S 上某 ΔABC 的边界点,用 P_2 表示; (3) P 为 S 上某 ΔABC 的顶点,用 P_3 表示。如图 4 所示。

假设由所有 $H(P, P_i), i = 1, 2, \dots, N_n$, 构成的集合为 U_H ,

$$U_H = \{H(P, P_i) | i=1, 2, \dots, N_n\}.$$

对于情形(1), U_H 中的非零元素有 $H(P, A), H(P, B), H(P, C)$, 由(2)式易得:

$$H(P, A) + H(P, B) + H(P, C) = \frac{S_{\Delta PBC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta PCA}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta PAB}}{S_{\Delta ABC}} = 1 \quad (3a)$$

对于情形(2), U_H 中有非零值的元素只有 $H(P, B), H(P, C)$, 由(2)式易得:

$$H(P, B) + H(P, C) = 1 \quad (3b)$$

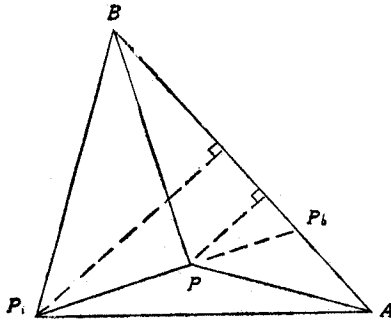


图 3 展开函数的面积坐标表达式

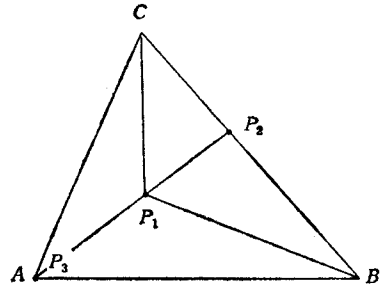


图 4 模拟面上的点与模拟面上三角形块的位置关系

对于情形(3), U_H 中只有 $H(P, A)$ 为非零元素, 且

$$H(P, A) = 1 \quad (3c)$$

由 (3a)–(3c) 式可得, 对于 S 上任一点 P 恒有:

$$\sum_{i=1}^{N_n} H(P, P_i) = 1 \quad (4)$$

(4) 式左右两边同乘以 J_i , 可得

$$J_i = \sum_{i=1}^{N_n} J_i^i(P) \quad (5)$$

其中, J_i 为模拟面上的表面电流,

$$J_i^i(P) = J_i H(P, P_i) \quad (6)$$

至此, 我们完成了模拟面上表面电流的完备性展开. 通过分析 $H(P, P_i)$ 的几何意义可知, $J_i^i(P)$ 为 J_i 在 $NU(NP_i, P_i)$ 内的加权分布, 主要反映在 P_i 邻域内的电流分布. 为了近似 $J_i^i(P)$, 在点单元内以 P_i 为中心建立正交矢量场 $\hat{X}(P, P_i), \hat{Y}(P, P_i)$, 并相应地定义正交矢量基函数 $T_{P_i}^x(P), T_{P_i}^y(P)$.

$$T_{P_i}^x(P) = \hat{X}(P, P_i) H(P, P_i) \quad (7a)$$

$$T_{P_i}^y(P) = \hat{Y}(P, P_i) H(P, P_i) \quad (7b)$$

利用 $T_{P_i}^x(P), T_{P_i}^y(P)$ 的线性叠加作为 $J_i^i(P)$ 的近似分布.

$$J_i^i(P) = C_{P_i}^x T_{P_i}^x(P) + C_{P_i}^y T_{P_i}^y(P) \quad (8)$$

式中 $C_{P_i}^x, C_{P_i}^y$ 为待定常数.

2. 正交矢量场

在 $NU(NP_0, P_0)$ 内, 以 P_0 为中心建立正交矢量场. 这里, P_0 是任一节点. 下面根据 P_0 的不同类型分别进行讨论.

(1) 内点单元的正交矢量场

假若 P_0 是内节点, 在 SCP_0 边界上任取一节点 P_1 , 以 P_0P_1 为极轴, 按逆时针方向建立广义极坐标系 (ρ, θ) . 定义极径 ρ 为 SCP_0 内任一点 P 到 P_0 的距离, 极角 θ 为沿 SCP_0 表面按逆时针方向从 P_0P_1 转到 P_0P 时所转过的角度(图5). 对 SCP_0 上任一点

P 相应地确定正交方向矢量 $(\hat{\rho}, \hat{\theta})$ 。假设从 P_0P_1 出发沿 SCP_0 表面旋转一周所转过的角度为 θ_T 。定义:

$$f_x(P, P_0) = \frac{\theta_T - 2\pi\theta}{\theta_T} + \pi - \theta \tag{9a}$$

$$f_y(P, P_0) = \frac{\theta_T - 2\pi}{\theta_T} \theta + \frac{3}{2} \pi - \theta \tag{9b}$$

$$\hat{X}(P, P_0) = \cos [f_x(P, P_0)] \hat{\rho} + \sin [f_x(P, P_0)] \hat{\theta} \tag{10a}$$

$$\hat{Y}(P, P_0) = \cos [f_y(P, P_0)] \hat{\rho} + \sin [f_y(P, P_0)] \hat{\theta} \tag{10b}$$

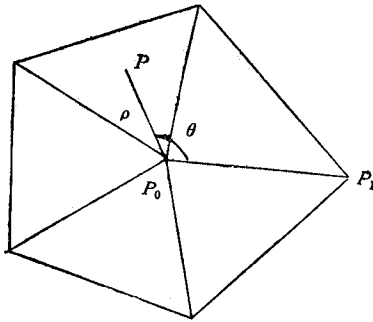


图 5 点单元内定义的广义极坐标

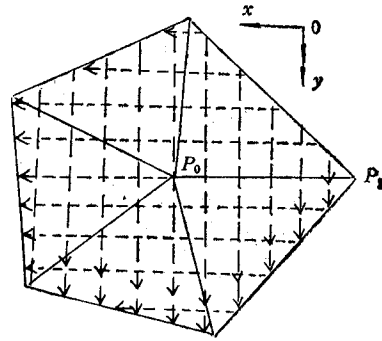


图 6 内点单元的正交矢量场 (I)

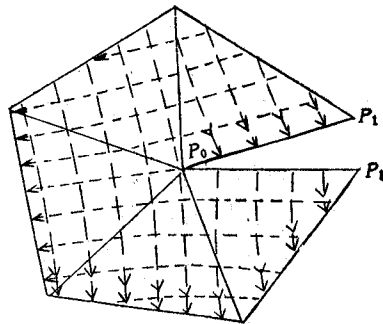


图 7 内点单元的正交矢量场 (II)

$$\therefore f_y(P, P_0) - f_x(P, P_0) \equiv \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \hat{X}(P, P_0) \cdot \hat{Y}(P, P_0) \equiv 0 \quad P \in SCP_0 \tag{11}$$

$\hat{X}(P, P_0), \hat{Y}(P, P_0)$ 即为定义的正交矢量场。图 6 和图 7 分别为当 $\theta_T = 2\pi$ 和 $\theta_T \neq 2\pi$ 时将 $NU(NP_0, P_0)$ 展放到平面上以后所看到的正交矢量场。

(2) 边界点单元的正交矢量场

若 P_0 是边界节点, 由于 J 在 S 之边界法向上的分量恒为零, 所以只须选择与边界切向一致的基函数, 与内点单元类似, 可得:

$$f_x(P, P_0) = \frac{\theta_T - \pi}{\theta_T} \theta + \pi - \theta \tag{12}$$

$$X(P, P_0) = \cos [f_x(P, P_0)] \rho + \sin [f_x(P, P_0)] \theta \quad (13)$$

式中, θ_T 为 $NU(NP_0, P_0)$ 内各三角形块对 P_0 所张的中心角之和。

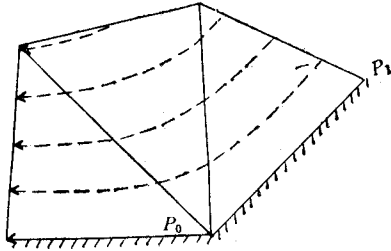


图 8 边界点单元的矢量场 (I)

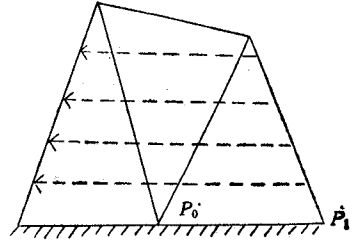


图 9 边界点单元的矢量场 (II)

图 8 和图 9 分别为当 $\theta_T \approx \pi$ 和 $\theta_T = \pi$ 时将点单元 $NU(NP_0, P_0)$ 展放到平面上以后所看到的正交矢量场。

3. 节点单元电流模型

通过上面的讨论,完整地定义了正交矢量基函数。下面根据电流基函数和检验基函数的特点,提出将离散型电流基函数与连续型检验基函数相结合的节点单元电流模型。

可以证明,前面所建立的正交矢量基函数在 SCP_0 内连续,在边界上为零,在 $NU(NP_0, P_0)$ 内任一三角形块开域内,所有偏导数皆连续。因为该正交矢量基函数能很好地反映 P_0 邻域内的电流分布,所以它本身就是一个很好的连续型检验基函数。但是若将它作为电流基函数则还须作些近似,否则所需的积分计算量太大。

前面,我们曾假定模拟面上各处的电流电荷 J, σ , 皆为有限值。在 SOP_0 内定义函数 $H'(P, P_0)$, 使得 $H'(P, P_0) = H(P, P_0)$, $P \in SOP_0$ 。

可以证明:

$$\begin{aligned} \iint_{SCP_0} J_i H(P, P_0) \frac{e^{-ikR}}{R} ds &= \iint_{SOP_0} J_i H'(P, P_0) \frac{e^{-ikR}}{R} ds \\ \iint_{SCP_0} \sigma_i H(P, P_0) \frac{e^{-ikR}}{R} ds &= \iint_{SOP_0} \sigma_i H'(P, P_0) \frac{e^{-ikR}}{R} ds \end{aligned}$$

因此,可以以近似 $J_{p_0}^i(P)$ 在各三角形块开域内的电流及电荷分布为目标,将正交矢量基函数在各三角形块开域内相应的电流电荷分布进行等效,建立既便于积分计算,又能够比较准确地反映真实电流电荷分布的离散型电流基函数。

将 $T_{p_0}^x(P), T_{p_0}^y(P)$ 一般性地写为

$$T_{p_0}^y(P) = \hat{V}(P, P_0) H(P, P_0) \quad P \in SCP_0 \quad (14)$$

$$\text{式中,} \quad \hat{V}(P, P_0) = \cos [f_y(P, P_0)] \hat{\rho} + \sin [f_y(P, P_0)] \hat{\theta} \quad (15)$$

其相应的电荷密度 $\sigma_{p_0}^i(P)$ 可写为

$$\sigma_{p_0}^i(P) = \frac{j}{\omega} \nabla \cdot T_{p_0}^y(P) \quad (16)$$

将 SOP_0 的第 i 个三角形块开域 $S_{p_0}^i$ 内的电流电荷分布等效为 $J_{p_0}^i(P), \sigma_{p_0}^i(P)$ 。

$$J_{p_0}^i(P) = H'(P, P_0) \frac{\iint_{S_{p_0}^i} T_{p_0}^v(P') ds'}{\iint_{S_{p_0}^i} H(P', P_0) ds'} \quad (17a)$$

$$\sigma_{p_0}^i(P) = \frac{\iint_{S_{p_0}^i} \sigma_{p_0}^v(P') ds'}{\iint_{S_{p_0}^i} ds} \quad (17b)$$

可以证明:

$$\iint_{S_{p_0}^i} J_{p_0}^i(P) ds = \iint_{S_{p_0}^i} T_{p_0}^v(P) ds \quad (18a)$$

$$\iint_{S_{p_0}^i} \sigma_{p_0}^i(P) ds = \iint_{S_{p_0}^i} \sigma_{p_0}^v(P) ds \quad (18b)$$

因此, $J_{p_0}^i(P)$, $\sigma_{p_0}^i(P)$ 即可作为 $T_{p_0}^v(P)$ 在 $S_{p_0}^i$ 内的等效电流和等效电荷. 将 $J_{p_0}^i(P)$, $\sigma_{p_0}^i(P)$ 所构成的整体定义为离散型电流基函数.

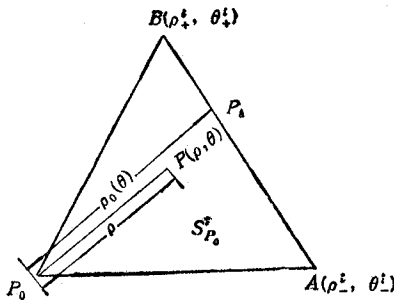


图 10 $NU(NP_0, P_0)$ 内第 i 个三角形块上各点的广义极坐标

假定 $S_{p_0}^i$ 对应于 ΔP_0AB (图 10), A, B 两点所对应的广义极坐标为 (ρ_i^-, θ_i^-) , (ρ_i^+, θ_i^+) . (ρ, θ) 为 $S_{p_0}^i$ 内任一点 P 的广义极坐标, 延长 P_0P 交 AB 于 P_b 点, 令 $|P_0P_b| = \rho_0(\theta)$, 由 (1) 式得:

$$H(P, P_0) = 1 - \frac{\rho}{\rho_0(\theta)} \quad (19a)$$

由(9)、(10)、(12)–(15)式可知 $\hat{V}(P, P_0)$ 可以写成:

$$\hat{V}(P, P_0) = \hat{V}(\theta) \quad (19b)$$

采用广义极坐标系的面积元为

$$ds = \rho d\rho d\theta \quad (19c)$$

将(19)式代入(17)式, 可得

$$\begin{aligned} \iint_{S_{p_0}^i} T_{p_0}^v(P) ds &= \iint_{S_{p_0}^i} H(P, P_0) \hat{V}(P, P_0) ds \\ &= \int_{\theta_i^-}^{\theta_i^+} \int_0^{\rho_0(\theta)} \left[1 - \frac{\rho}{\rho_0(\theta)} \right] \hat{V}(\theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{\theta_i^-}^{\theta_i^+} \frac{1}{6} \rho_0^3(\theta) \hat{V}(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (20a)$$

类似地可推得

$$\iint_{S_{P_0}^i} H(P, P_0) ds = \frac{1}{6} \int_{\theta_i}^{\theta_i^+} \rho_0^i(\theta) d\theta \quad (20b)$$

$$\iint_{S_{P_0}^i} ds = \frac{1}{2} \int_{\theta_i}^{\theta_i^+} \rho_0^i(\theta) d\theta \quad (20c)$$

$$\iint_{S_{P_0}^i} V(P, P_0) ds = \int_{\theta_i}^{\theta_i^+} \frac{1}{2} \rho_0^i(\theta) V(\theta) d\theta \quad (20d)$$

设 $S_{P_0}^i$ 的面积为 $\Delta_{P_0}^i$, 将(20)式代入(17)式得:

$$J_{P_0}^i(P) = H'(P, P_0) \frac{1}{\Delta_{P_0}^i} \iint_{S_{P_0}^i} V(P, P_0) ds \quad (21a)$$

$$\sigma_{P_0}^i(P) = \frac{j}{\omega} \frac{1}{\Delta_{P_0}^i} \iint_{S_{P_0}^i} \nabla \cdot T_{P_0}^i(P) ds \quad (21b)$$

设 $C_{P_0}^i$ 是 $\Delta P_0 AB$ 的重心. 由(21)式可将 $J_{P_0}^i(P)$ 及 $\sigma_{P_0}^i(P)$ 近似为:

$$J_{P_0}^i(P) = V_{P_0}^i H'(P, P_0) \quad (22a)$$

$$\sigma_{P_0}^i(P) = \frac{1}{\omega} F_{P_0}^i \quad (22b)$$

$$\text{式中, } V_{P_0}^i = V(C_{P_0}^i, P_0) \cos^2 \left\{ \frac{1}{4} [f_v(B, P_0) + \theta_i^+ - f_v(A, P_0) - \theta_i^-] \right\} \quad (22c)$$

$$F_{P_0}^i = \frac{1}{\Delta_{P_0}^i} \left\{ \frac{\rho_0^i}{2} \sin [f_v(B, P_0)] - \frac{\rho_0^i}{2} \sin [f_v(A, P_0)] \right\} \quad (22d)$$

三、结 果

在近场问题中导体表面感应电流是最基本的物理量, 因而对导体表面电流分布的精确计算将是对电流模型体系最有力的验证. 利用上述点电流模型计算了导体球和正方块在平面波垂直照射下的表面电流分布, 并和其它方法的计算结果(包括精确解)进行了比较, 如图 11 和图 12 所示, 结果是令人满意的.

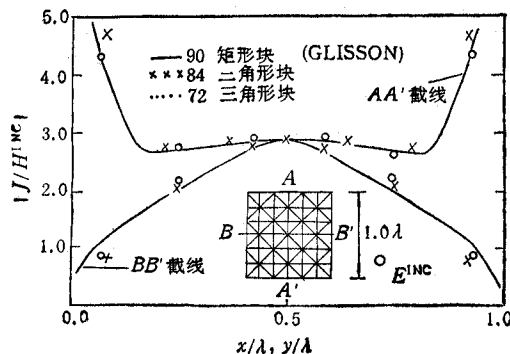


图 11 平面波垂直入射到边长为 1.0λ 的正方块时, 正方块表面上的感应电流分布

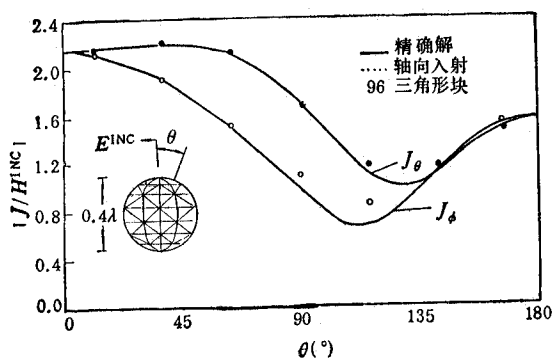


图 12 平面波沿轴向照射到半径为 0.2λ 的导电球时,在球的两个主截面上的感应电流分布

像面块模型的一般方法一样,本文是在假定用来近似导体表面电流电荷分布的模拟面上的电流电荷皆为有限值这一前提下进行表面电流计算的,而像边缘棱角及表面尖端等地方电流电荷的影响是否需要表现,如何表现和计算,是有待进一步研究的问题。

由于点单元电流模型中的电流基函数并未为传统的理论模式所局限,因而它能更好地反映模拟面上表面电流电荷的真实分布,从而使得节点单元电流模型体系在计算精度、未知量数目、积分计算量等三方面具有如下特点:

(1) 计算精度 在模拟面上任一三角形块内表面电流的一阶近似可以写成与其三顶点相对应的电流基函数的适当的线性叠加。

(2) 未知量数目 对于封闭的导体表面 $N_I = N_T + 4$; 对于有 n 个开口的导体表面 $N_I = N_T + 4 - 2n$

(3) 积分计算量 与棱单元电流模型^[5]的积分计算量相同,均为 $N_I = 3N_T$ 。

有关这些问题的详细讨论以及利用点电流模型确定任意形状导体表面电流分布的计算方法将在另外的文章中详细讨论。

参 考 文 献

- [1] N. N. Wang, J. H. Richmond, M. C. Gilreath, *IEEE Trans. on AP*, **AP-23**(1975)3, 376—382.
- [2] J. J. H. Wang, *Radio Sci.*, **13**(1978)6, 947—952.
- [3] J. Singh, A. T. Adams, *IEEE Trans. on AP*, **AP-27**(1979)4, 531—535.
- [4] A. W. Glisson, D. R. Wilton, *IEEE Trans. on AP*, **AP-28**(1980)5, 593—603.
- [5] S. M. Rao, D. R. Wilton, A. W. Glisson, *IEEE Trans. on AP*, **AP-30**(1982)3, 409—418.

NODE UNIT CURRENT MODEL FOR CALCULATING SURFACE CURRENT DISTRIBUTION ON ARBITRARY SHAPE CONDUCTORS

Dai Shixiong Lu Shu

(Dept. of space physics, Wuhan University, Wuhan)

Abstract A new type of current model, defined as node unit current model, for calculating current distribution on arbitrary shape conductors is presented. By using this model, the number of unknowns necessary for MM solution of current distribution is decreased greatly. The current solutions for typical problems are given. They are in agreement with those obtained by exact formulas and other approaches.

Key words Near field analysis; Surface current distribution; Surface patch modeling; Node unit current model