

磁化环形等离子体填充波导中注-波相互作用的研究¹

李 伟 魏彦玉 鄢 扬 刘盛纲

(电子科技大学高能电子学研究所 成都 610054)

摘 要 该文利用线性理论,对相对论环形电子注与环形等离子体相互作用产生微波辐射进行了研究.在考虑有限磁场的基础上,利用“匹配场法”求得色散方程,重点分析了等离子体密度、厚度,外加磁场对等离子体切伦可夫脉塞注-波相互作用的影响,并计算了各参量变化时的波增长率以及色散关系.

关键词 环形等离子体, 环形电子注, 有限磁场, 色散方程, 增长率

中图分类号 TN129

1 引 言

在相对论微波器件中,为了提高器件的输出功率,往往靠加大相对论电子束的电流来实现;但束流的增加必将受空间电荷限制流的限制,这使得电子注电流的增加本身遇到了难以克服的困难.为了克服这一困难,人们利用在器件中填充一定密度的等离子体来提高器件的空间电荷限制流,从而提高电子束流,而达到提高器件输出功率的目的;可以说这是开展这一研究的人们最初动机.但随着实验^[1]的深入开展,发现在相对论微波器件中填充适当密度的背景等离子体,不仅可以提高器件的输出功率,而且更重要的是可有效大幅度地提高器件的相互作用效率^[2,3].在有限磁场的作用下,磁化等离子体波导内将不存在单独的 TE 模和 TM 模,而是耦合的 HE 模和 EH 模,磁化等离子体的填充与在真空中或虽有等离子体填充但无磁场相比,情况大不一样^[4,5].磁化等离子体填充情况下有各种各样的传输波^[2,3].这些因素极大地影响注-波的相互作用.该文利用“匹配场法”,推导了有限磁场下填充圆环状等离子体的圆柱波导的色散方程;通过数值计算得出对实际有用的分析结果.

2 磁化环形等离子体填充波导中的色散方程

磁化等离子体的电介质张量为^[2]

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & 0 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

其中 $\varepsilon_1 = 1 - \frac{\xi^2(1-j\delta)}{(1-j\delta)^2 - \tau^2}$, $\varepsilon_2 = \frac{j\tau\xi^2}{(1-j\delta)^2 - \tau^2}$, $\varepsilon_3 = 1 - \frac{\xi^2}{1-j\delta}$, $\tau = \frac{\omega_c}{\omega}$, $\delta = \frac{\gamma_{\text{eff}}}{\omega}$. ω_p , ω_c , γ_{eff} 分别为等离子体频率,电子回旋频率和电子有效碰撞频率, j 为单位虚数, ω 为电磁波的角频率.电磁波在等离子体介质中的传播满足麦克斯韦方程:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0 \mathbf{D} + \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \mathbf{D} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

¹ 2001-02-11 收到, 2001-07-11 定稿

假定等离子体波导中波的传播因子为 $\exp\{j\omega t - \gamma z + jm\theta\}$, 将上面方程在圆柱坐标系中分解, 并且用纵向场分量 E_z 和 H_z 表示横向场分量, 可得下面注-波相互作用方程:

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + aE_z = bH_z + j\omega\mu_0 J_z - \frac{jk_z}{\varepsilon_0\varepsilon_1} \rho \quad (1)$$

$$\nabla_{\perp}^2 H_z + cH_z = dE_z - (\nabla \times \mathbf{J})_z - \frac{\omega\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \rho \quad (2)$$

其中 $a = (\gamma^2 + k^2\varepsilon_1)\varepsilon_3/\varepsilon_1$, $b = j\omega\mu_0\gamma\varepsilon_2/\varepsilon_1$, $c = \gamma^2 + k^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)/\varepsilon_1$, $d = -j\omega\varepsilon_0\gamma\varepsilon_2\varepsilon_3/\varepsilon_1$, $k^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0 = \omega^2/c^2$, $\nabla_{\perp}^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\gamma = jk_z$.

在此种波导中电磁波不能独立的分为 TE 波和 TM 波, 而是互相耦合的混杂电磁波模式. 求解上述波动方程经过复杂的推导可得色散方程:

$$\varepsilon_3(k_z^2 - k_{z0}^2)P_E + j\omega\mu_0\varepsilon_2(k_z - k_{z0})P_{HE} = \frac{\omega_b^2(\varepsilon_1 k^2 - k_z^2)}{\omega - k_z v_z} P_E \quad (3)$$

其中参数 $P_{HE} = \iint H_{z0} \cdot E_{z0}^* ds$, $P_E = \iint E_{z0} \cdot E_{z0}^* ds$. (3) 式是一个关于 $k_z R_c$ 的复数方程, 而 $k_z R_c$ 又与 k_{z0} , ω , P_E 和 P_{HE} 有关, 求解该复数方程, 即可得到电磁波传播常数的复数解的虚部 $\text{Im}(k_z R_c)$, 也就是波的增长率.

图 1 是填充环形等离子体和加载环形电子注的圆柱波导截面示意图, 其中区域 I 是指环形等离子体与波导壁之间 (即 $R_{pb} < r < R_c$) 的区域, 区域 II 是指环形等离子体里面 (即 $R_{ps} < r < R_{pb}$) 的区域, 区域 III 是指环形等离子体包围的内部 (即 $0 < r < R_{ps}$) 的区域. 图 2 是无环形电子注, 只有环形等离子体的波导截面示意图.

为了求解 k_{z0} , P_E 和 P_{HE} , 首先考虑在无电子注情况下的“冷”色散方程 (如图 2). 那么各区域的场表达式可写出如下 (假定碰撞效应被忽略):

在环形等离子体与波导壁的区域 II: ($R_{pb} \leq r \leq R_c$)

$$E_z^I = A_1 J_m(k_c r) + A_2 N_m(k_c r), \quad H_z^I = B_1 J_m(k_c r) + B_2 N_m(k_c r). \quad \text{其中 } k_c^2 = k^2 - k_z^2.$$

在环形等离子体里面即区域 II: ($R_{ps} \leq r \leq R_{pb}$)

$$E_z^{II} = A_3 J_m(p_1 r) + A_4 N_m(p_1 r) + A_5 J_m(p_2 r) + A_6 N_m(p_2 r), \quad H_z^{II} = A_3 h_1 J_m(p_1 r) + A_4 h_1 N_m(p_1 r) - A_5 h_2 J_m(p_2 r) + A_6 h_2 N_m(p_2 r). \quad \text{其中 } h_{1,2} = \left[(\gamma^2 + k^2\varepsilon_1) \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} - P_{1,2}^2 \right] / \left(j\omega\mu_0\gamma \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right). \quad P_{1,2}^2 = \frac{1}{2\varepsilon_1} [\gamma^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + k^2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)] \pm \frac{1}{2\varepsilon_1} \cdot \{ [\gamma^2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) + k^2(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)]^2 + 4k^2\gamma^2\varepsilon_2^2\varepsilon_3 \}^{1/2}.$$

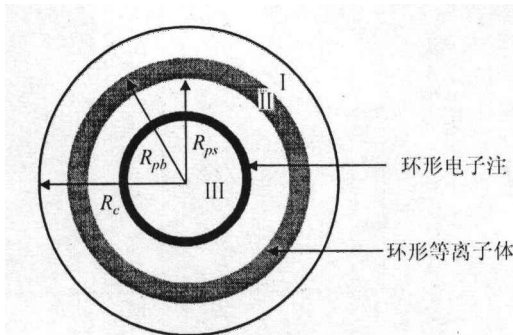


图 1 填充环形等离子体波导截面示意图

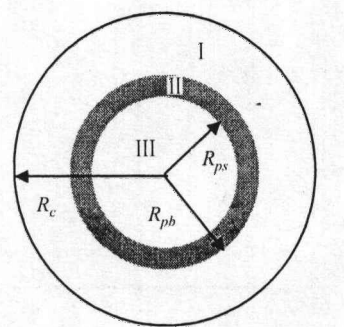


图 2 无环形电子注时波导的截面示意图

在环形等离子体包围区域 III 内: $(0 \leq r \leq R_{ps})$

$$H_z^{III} = A_8 J_m(k_c r), \quad E_z^{III} = A_7 J_m(k_c r).$$

根据边界条件: 在 $r = R_c$ 界面: $E_z^I = 0, E_\theta^I = 0;$

$$\text{在 } r = R_{pb} \text{ 处: } E_z^I = E_z^{II}, E_\theta^I = E_\theta^{II}; H_z^I = H_z^{II}, H_\theta^I = H_\theta^{II}.$$

在 $r = R_{ps}$ 处: $E_z^{II} = E_z^{III}, E_\theta^{II} = E_\theta^{III}; H_z^{II} = H_z^{III}, H_\theta^{II} = H_\theta^{III}$. 把各场分量代入上面的边界条件, 进行数学简化后可用矩阵形式表示为一系数矩阵和 $A_1, A_2 \cdots A_{10}$ 矩阵乘形式. 即如下的表示:

$$[D] \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{10} \end{bmatrix} = 0 \quad [D] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,10} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{10,1} & a_{10,2} & \cdots & a_{10,10} \end{bmatrix}$$

$[D]$ 为一系数矩阵, 要使方程组有非零解, 须系数行列式为零, 而系数中每项包含有频率 ω 和波数 k_{z0} . 因此可得色散方程为

$$|D| = 0 \tag{4}$$

利用上式可求得 $k_{z0}, H_{z0}, E_{z0}, P_E, P_{HE}$. 从而得利用 (3) 式可得有电子注时的色散方程, 以及波的增长率. 为

$$G_e = \text{Im}(k_z R_c) \tag{5}$$

3 数值计算

首先讨论等离子体密度对注波互作用的影响, 为方便起见, 用下面的参数进行了计算, $R_{ps}/R_c = 0.42, R_{pb}/R_c = 0.472$, 等离子体密度分别为 $n_p = 2 \times 10^{13} / \text{cm}^3, n_p = 4 \times 10^{13} / \text{cm}^3, n_p = 6 \times 10^{13} / \text{cm}^3, n_p = 8 \times 10^{13} / \text{cm}^3, n_p = 1 \times 10^{14} / \text{cm}^3$, 磁场为 $B_0 = 2\text{T}$. 图 3 是无电子注时的色散方程, 随着等离子体密度增加, 电磁波的频率增大. 由于是归一化坐标, 所以图中是 $\omega R_c/c$ 和 $k_z R_c$ 的关系 (无单位). 图 4 是不同等离子体密度下波的增长率, 从中我们可以看出波的增长率随等离子体密度增大而增加.

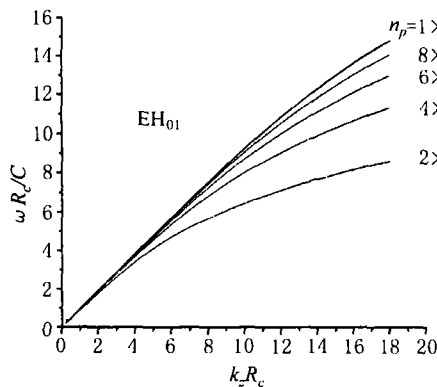


图 3 无电子注时的色散关系

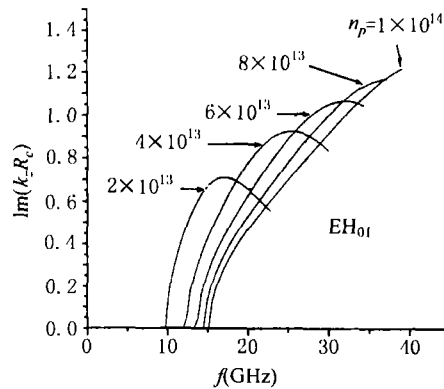


图 4 不同等离子体密度下波的增长率

其次, 讨论了环形电子注在不同引导磁场强度时对相互作用的影响, 图 5 是不同磁场强度下的色散关系, 随磁场强度的增加, 电磁波的频率也升高。从图 6 中我们清楚看到磁场强度愈大, 注波相互作用就愈强, 波的增长率就愈高。

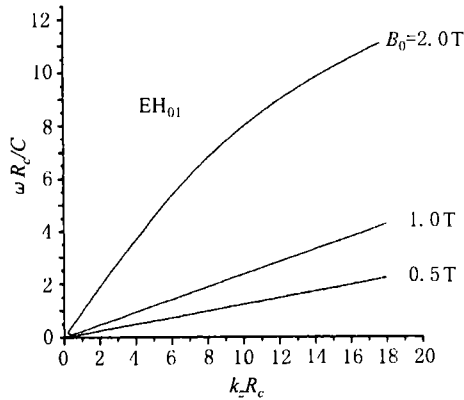


图 5 不同磁场情况下的色散关系

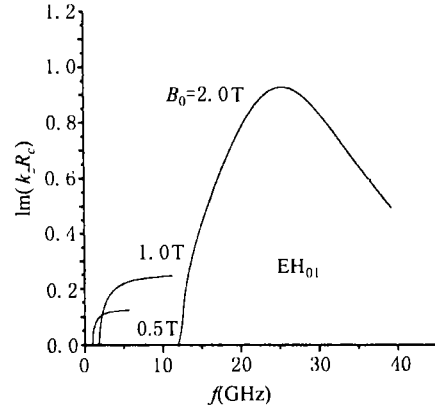


图 6 不同磁场强度下的波增长率

最后讨论了等离子体厚度的改变对色散关系的影响, 如图 7 所示, 有结论: 当电磁波频率给定且较高时, $k_z R_c$ 随等离子体的厚度的增加而减小, 电磁波频率越高, 等离子体厚度的影响就越强烈。图 8 显示环形等离子体厚度对波增长率的影响, 可以看出, 波增长率与等离子体厚度有密切关系, 图中是当等离子体密度 $n_p = 4 \times 10^{13}/\text{cm}^3$, $B_0 = 2.0\text{T}$, 环形等离子体的内半径 $R_{ps} = 7.5\text{mm}$, 外半径 R_{pb} 逐渐增大, 导致等离子体厚度从 1mm 逐渐增大到 10mm 时的波增长率变化曲线。从中我们看到在本实验的条件下, 对应等离子体厚度为 5mm 时得到最大波增长率。(图中为了区分出最大的波的波增长率, 因比例关系未画出等离子体厚度为: 6mm, 7mm, 4mm, 3mm, 8mm, 2mm, 10mm 对应的波增长率, 但它们对应的波增长率依次减小)。因此, 当等离子体厚度较小时, 厚度增大, 波增长率升高到一最大值, 当等离子体厚度较大时, 波增长率却随厚度增大而减小。这一结论与文献 [6] 的结论一致。

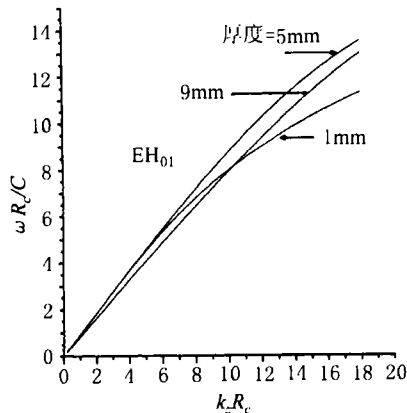


图 7 环形等离子体不同厚度时的色散曲线

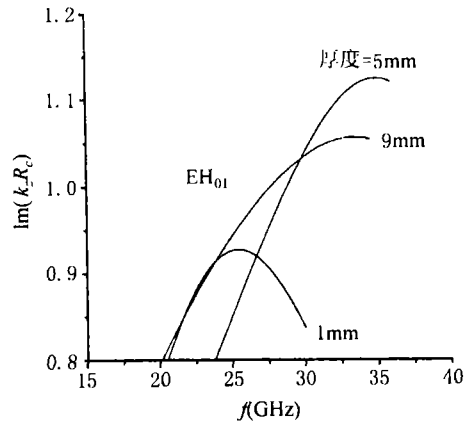


图 8 环形等离子体不同厚度时的波增长率

4 结 论

通过本文分析讨论得出, 注-波相互作用的波的增长率与等离子体密度、厚度、引导磁场的大小等有密切的关系。等离子体密度愈大, 磁场愈强对应波的增长率也愈高, 等离子体的厚度在等离子体密度比较大时有较大的影响。对应最大的波增长率有一最佳等离子体厚度 (本例中为: 环形等离子体内半径与波导半径之比为: $R_{ps}/R_c = 0.42$, 环形等离子体外半径与波导半径之比为: $R_{pb}/R_c = 0.7$); 本文的分析对开展的实验有一定的指导作用。

参 考 文 献

- [1] D. K. Abe, Carmel, S. M. Miller, *et al.*, Experimental studies of overmoded relativistic backward-wave oscillators, IEEE Trans. on Plasma Science, 1998, PS-26(3), 591-603.
- [2] 刘盛纲, J. K. Lee, 祝大军, 郗扬, 宋立群, 等离子体波导中电磁波传输理论, 中国科学, 1996, 26(4), 348-363.
- [3] JianQiang Wu, Cerenkov radiation excited by a thin annular relativistic electron beam in a slow-wave structure consisting of an annular-plasma-filled cylindrical waveguide with a dielectric lining, Int. J. Electronics., 1998, 84(5), 539-548.
- [4] B. Shokri, H. Ghomi, H. Latifi, Dielectric Cherenkov maser with a magnetically confined plasma column in a dielectric lined slow-wave waveguide, Physics of Plasmas, 2000, 7(6), 2671-2676.
- [5] 吴坚强, 刘盛纲, 填充环形等离子体的介质切伦可夫脉塞, 电子科学学刊, 1998, 20(5), 682-688.
- [6] 宫玉彬, 王文祥, 等离子体圆柱波导慢电磁波的激励, 电子科学学刊, 1996, 18(3), 298-303.

STUDY OF THE BEAM-WAVE INTERACTIONS IN
CYLINDRICAL WAVEGUIDE FILLED WITH
A MAGNETIC PLASMA

Li Wei Wei Yanyu Yan Yang Liu Shenggang

(*University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China*)

Abstract Considering the effect of the longitudinal uniform magnetic field, the microwave radiation produced by the interaction of a relativistic electron beam with an annular plasma is examined by use of the linear theory. In this paper the "applied field" approach is used to derive the dispersion relationship. Analyzed the different plasma density, position, thickness, and field intensity influence to the beam-wave interactions in plasma Cerenkov maser. Finally, the curves and dispersion relationships about every parameter to influence the increase rates of linear space are given out.

Key words Annular plasma, Annular electron beam, Longitudinal magnetic field, Dispersion equation

李 伟: 男, 1966 年生, 博士生, 主要从事微波等离子体电子学和高功率微波的研究。

魏彦玉: 男, 1971 年生, 博士后, 主要从事微波等离子体电子学和高功率微波的研究。

郗 扬: 男, 1965 年生, 副教授, 主要从事微波等离子体电子学、相对论电子学和自由电子激光等相关领域的研究工作。

刘盛纲: 男, 1933 年生, 中科院院士, 主要从事电磁场理论、等离子体、相对论电子学和自由电子激光等相关领域的研究工作。