

## 低信噪比时混沌信号降噪的微扰方法<sup>1</sup>

李春福 虞厥邦

(电子科技大学光电子技术系 成都 610054)

**摘 要** 该文提出一种新的混沌信号降噪方法——微扰法, 并且给出了微扰法的一个具体实例算法——梯度微扰法。该文还对用梯度微扰法进行混沌信号降噪的效果进行了实验研究, 实验结果表明, 梯度微扰法能够在低信噪比时得到很好的降噪效果。文中还对梯度微扰法的参数选择问题进行了实验研究。

**关键词** 混沌, 混沌信号, 降噪

**中图分类号** TN911.4

### 1 引 言

目前在许多工程领域中都涉及到混沌信号的应用研究, 而在应用中信号不可避免地要受到噪声的干扰, 因而研究混沌信号的降噪技术对混沌信号的应用研究有重要的意义<sup>[1]</sup>。

目前已有许多文献对混沌信号降噪问题进行了研究<sup>[1-6]</sup>。具体地, 就是设混沌信号由一已知的离散动力学系统产生, 可以用差分方程 (1) 式表示。

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (1)$$

其中  $x_n \in R^M$  是  $n$  时刻系统的状态, 而  $F: R^M \rightarrow R^M$  决定了系统的动力学结构。差分方程 (1) 式的一个解  $X_N = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  称为它的一条轨道,  $N$  为轨道长度, 研究的目的是在已知离散动力学系统结构  $F$  的情形下, 根据观测得到的被噪声干扰了的轨道  $Y_N = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ ,  $y_n = x_n + w_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  来得到真实轨道  $X_N = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  的估计  $\hat{X}_N = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$ , 从而进行混沌信号的降噪。

文献 [2] 对一类特定的一维离散混沌映射——Tent 映射所产生的混沌信号的降噪问题采用最大似然估计方法进行了研究, 并且给出了一种迭代求解方法, 这种方法与 Kalman 滤波有密切的联系。文献 [3] 也给出了类似的基于最大似然估计方法的混沌信号估计方法, 同时也给出了一种次优的分半估计方法, 指出这种分半估计方法是一种渐近无偏估计方法, 在高信噪比时能够达到 Cramer-Rao 估计方差下界。文献 [4] 基于文献 [3] 等文献所得出的后向迭代是取得好的混沌信号估计性能的结论, 提出了一种基于符号动力学系统的混沌信号平滑估计方法, 这种方法也是一种渐近无偏估计方法, 在高信噪比时也可以达到 Cramer-Rao 估计方差下界。

文献 [2-4] 所提出的方法实际上都属于参数估计的方法, 这些方法虽然计算简单, 但却有一些不足之处: 首先, 这些方法需要进行后向迭代, 从而要求得到  $F$  的原像<sup>[2,3]</sup>, 或者必须知道  $F$  的生成分割<sup>[4]</sup>; 其次, 这些方法仅在信噪比较高时 (一般大于 30dB) 才能有较好的估计效果。

另外的一类混沌信号降噪方法属于波形估计的方法。文献 [5] 利用 Lagrange 乘数法将问题转化为如下优化问题:  $\min_{\hat{x}, \Lambda} \left( \sum_{n=1}^N \|y_n - \hat{x}_n\|^2 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \Lambda_n^T [F(\hat{x}_n) - \hat{x}_{n+1}] \right)$ , 其中  $\Lambda_n$  为  $n$  时刻的 Lagrange 乘子。然而直接求解上述优化问题最终会涉及到一个很大的病态矩阵的求逆问题, 虽然可以通过流形分解和奇异值分解相结合的方法来求得估计轨道  $\hat{X}_N = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$ , 但求解运算太复杂了。文献 [1] 采用对代价函数迭代求极值的方法来估计波形, 具体来说就是对如下优化问题进行迭代求解:  $\min_{\hat{x}} (C = C_1 + C_2)$ , 其中  $C_1$  是对估计轨道与观测轨道之间距

<sup>1</sup> 2000-12-27 收到, 2001-08-02 定稿

离的衡量, 而  $C_2$  是对估计轨道满足系统动力学结构程度的衡量, 在文献 [1] 所举的例子中, 取  $C_1 = \sum_n \|y_n - \hat{x}_n\|^2$  或者  $C_1 = 1 - \frac{\sum_n \hat{x}_n^T y_n}{\sqrt{\sum_n \|\hat{x}_n\|^2} \sqrt{\sum_n \|y_n\|^2}}$ , 取  $C_2 = \sum_n \|F(\hat{x}_n) - \hat{x}_{n+1}\|^2$ .

文献 [1] 提出的迭代降噪方法在较低的信噪比时也能得到良好的降噪效果, 然而这种迭代降噪方法是基于向量观测轨道的, 而在应用中一般只能得到标量观测轨道, 因而它的适用性不好.

另外, 通常认为由于混沌信号具有宽谱特性, 因而经典的线性滤波方法不能用于混沌信号处理, 但文献 [6] 利用推广 Kalman 滤波方法对 Henon 映射混沌信号进行滤波研究, 却发现推广 Kalman 滤波方法可以在较低信噪比时得到良好的滤波效果, 结合文献 [2] 的研究结果, 可以认为在特定情形下 Kalman 滤波方法是一种混沌信号降噪的有效方法.

本文提出了一种新的基于标量观测轨道对真实轨道进行估计的微扰方法, 它的原理简单, 适用性好, 微扰方法的基本思想是通过在观测轨道  $Y_N = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  上施加一系列适当的微扰来逐步得到真实轨道  $X_N = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  的估计值  $\hat{X}_N = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$ . 在本文第 2 节中给出了微扰方法的基本原理以及它的一个具体实例算法——梯度微扰法, 在本文第 3 节中给出了利用梯度微扰法对 Henon 映射混沌信号进行降噪的实验研究结果, 本文的第 4 节是小结.

## 2 混沌信号降噪的标量观测轨道微扰方法

由于本文提出的微扰方法是基于标量观测轨道的, 故而这里将所研究的问题重述如下: 设产生混沌信号的差分方程如 (2) 式所示:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-M+1}), \quad n = M, M+1, \dots, N-1 \quad (2)$$

其中  $x_n \in R$  是  $n$  时刻系统的状态,  $x_1, x_2, \dots, x_M$  是系统的初始值,  $f: R^M \rightarrow R$  决定了系统的动力学结构.

研究的目的是在已知  $f$  的情形下, 根据观测得到的被噪声干扰了的轨道  $Y_N = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ ,  $y_n = x_n + w_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  来得到真实轨道  $X_N = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  的估计值  $\hat{X}_N = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$ , 从而进行混沌信号的降噪, 就提高信噪比而言, 降噪的目的就是使  $\|\hat{X}_N - X_N\|^2 = \sum_{n=1}^N (\hat{x}_n - x_n)^2$  尽可能地减小.

**命题 1** 设轨道  $X_N = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  的观测值为  $Y_N = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ ,  $y_n = x_n + w_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , 对任意小的  $\varepsilon < 0$ , 存在微扰序列  $\Delta X_N^{(k)} = (\Delta x_1^{(k)}, \Delta x_2^{(k)}, \dots, \Delta x_N^{(k)})$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , 使得  $\|Y_N + \sum_{k=1}^K \Delta x_N^{(k)} - X_N\|^2 < \varepsilon$ , 其中  $K$  称为微扰长度.

命题 1 显然是正确的, 它说明可以通过对观测轨道  $Y_N = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  施加一系列微扰的方法来逼近真实轨道, 如何选取适当的微扰序列  $\Delta X_N^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$  是微扰方法的关键问题, 本文给出一种选取微扰序列  $\Delta X_N^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$  的方法, 称为梯度微扰法, 在实例 1 中对梯度微扰法进行了详细地描述.

### 实例 1 梯度微扰法

定义  $E(\hat{X}_N) = \sum_{n=M}^N (f(\hat{x}_n, \hat{x}_{n-1}, \dots, \hat{x}_{n-M+1}) - \hat{x}_{n+1})^2$ , 沿  $E(\hat{X}_N)$  的负梯度方向取微扰序列, 即:  $\Delta X_N^{(k+1)} = -\mu \frac{\partial E(\hat{X}_N)}{\partial \hat{X}_N} \Big|_{\hat{X}_N = \hat{Y}_N + \sum_{i=1}^k \Delta X_N^{(i)}}$ ,  $k = 1, 2, \dots, K-1$ , 其中  $\Delta X_N^{(1)} = 0$

为微扰初始值,  $\mu$  为控制参数, 称这种沿  $E(\hat{X}_N)$  的负梯度方向取微扰序列的微扰方法为梯度微扰法, 梯度微扰法可以写成迭代算法的形式如算法 1 所示.

### 算法 1 梯度微扰法

(1)  $k = 1$ ,  $\Delta X_N = 0$ ,  $\hat{X}_N = Y_N + \Delta X_N$ .

$$(2) \text{ 根据 } \frac{\partial E(\hat{X}_N)}{\partial \hat{x}_n} = \begin{cases} 2 \sum_{i=M}^{M+n-1} (f(\hat{x}_i, \hat{x}_{i-1}, \dots, \hat{x}_{i-M+1}) - \hat{x}_{i+1}) \frac{\partial f(\hat{x}_i, \hat{x}_{i-1}, \dots, \hat{x}_{i-M+1})}{\partial \hat{x}_n}, & n \leq M \\ 2 \sum_{i=n}^{M+n-1} (f(\hat{x}_i, \hat{x}_{i-1}, \dots, \hat{x}_{i-M+1}) - \hat{x}_{i+1}) \frac{\partial f(\hat{x}_i, \hat{x}_{i-1}, \dots, \hat{x}_{i-M+1})}{\partial \hat{x}_n} \\ \quad - 2f(\hat{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-2}, \dots, \hat{x}_{n-M}) - \hat{x}_n, & M+1 \leq n \leq N-M \\ 2 \sum_{i=n}^{N-1} (f(\hat{x}_i, \hat{x}_{i-1}, \dots, \hat{x}_{i-M+1}) - \hat{x}_{i+1}) \frac{\partial f(\hat{x}_i, \hat{x}_{i-1}, \dots, \hat{x}_{i-M+1})}{\partial \hat{x}_n} \\ \quad - 2f(\hat{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-2}, \dots, \hat{x}_{n-M}) - \hat{x}_n, & N-M+1 \leq n \leq N-1 \\ -2f(\hat{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-2}, \dots, \hat{x}_{n-M}) - \hat{x}_n, & n = N \end{cases}$$

求出  $\frac{\partial E(\hat{X}_N)}{\partial \hat{x}_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , 进而得到  $\Delta X_N = \hat{X}_N - \mu \frac{\partial E(\hat{X}_N)}{\partial \hat{X}_N}$ .

$$(3) \hat{X}_N = \hat{X}_N + \Delta X_N.$$

(4)  $k = k + 1$ , 如果  $k = K$ , 运算结束, 否则转到 (2) 继续运算.

显然, 在梯度微扰法中有三个参数分别是轨道长度  $N$ , 微扰长度  $K$  和控制参数  $\mu$ . 在本文第 3 节中, 将通过实验对梯度微扰法及其三个参数的选择进行研究.

值得一提的是, 当混沌映射为一维 ( $M = 1$ ) 时, 梯度微扰法与文献 [1] 中的方法得出的迭代降噪公式是一致的, 但两种方法的基本原理是不同的, 而且在应用于多维混沌映射 ( $M > 1$ ) 时, 文献 [1] 中的方法需要得到混沌信号的向量观测序列, 而在梯度微扰法中只需要得到混沌信号的标量观测序列, 显然梯度微扰法的适用性更好一些.

### 3 梯度微扰法进行混沌信号降噪的实验研究

**例 1** 混沌信号由 Henon 映射 ( $M = 2$ ) 产生, 其差分方程如 (3) 式所示.

$$x_{n+1} = 1 - 1.4x_n^2 - 0.3x_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots, N-1 \quad (3)$$

观测轨道为  $Y_N = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ ,  $y_n = x_n + w_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , 估计轨道为  $\hat{X}_N = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$ . 干扰噪声  $w_n$  为服从  $(0, \sigma^2)$  分布的高斯白噪声, 在本文的实验中, 取  $\sigma = 0.34$ , 此时降噪前 Henon 映射混沌信号与加性高斯白噪声的信噪比为 7dB, 利用梯度微扰法对观测轨道降噪得到的典型结果如图 1 所示, 图 1 展示了当选择  $N = 200$ ,  $K = 100$ ,  $\mu = 0.04$  时, 降噪前的高斯白噪声  $w_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  与降噪后的残余噪声  $e_n = \hat{x}_n - x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  的比较, 得到的信噪比增益为 6dB.

图 2 给出了取一定轨道长度 ( $N = 200$ ) 时, 梯度微扰法降噪所得到的信噪比增益与微扰长度  $K$  和控制参数  $\mu$  的关系. 从图 2 可以看出, 随着微扰长度的增大, 得到的信噪比增益会增大, 直到信噪比增益达到一个最佳值, 但微扰长度并不是越大越好, 过大的微扰长度反而会使得到的信噪比增益小于最佳值; 同时可以看出, 在收敛范围以内取较大的  $\mu$  会使算法较快地达到信噪比增益的最佳值.

图 3 给出了取一定微扰长度 ( $K = 100$ ) 和一定控制参数 ( $\mu = 0.04$ ) 时, 梯度微扰法所得到的信噪比增益与轨道长度的关系. 显然, 随着轨道长度的增大, 所得到的信噪比增益也在增大, 但它会趋于一个极限值, 这种现象被称为“台阶”效应<sup>[4]</sup>.

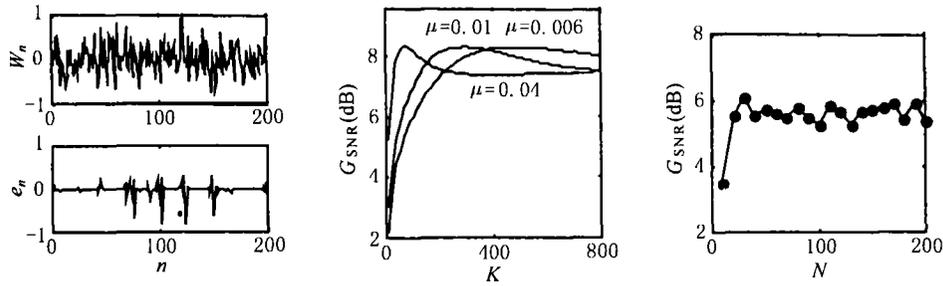


图1 梯度微扰法的典型降噪效果 图2 信噪比增益与  $K$  和  $\mu$  的关系 图3 信噪比增益与  $N$  的关系

例2 混沌信号由 Logistic 映射 ( $M=1$ ) 产生, 其差分方程如 (4) 式所示。

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4)$$

观测轨道为  $Y_N = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ ,  $y_n = x_n + w_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , 估计轨道为  $\hat{X}_N = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$ 。

干扰噪声  $w_n$  为服从  $(0, \sigma^2)$  分布的高斯白噪声, 在此实验中, 取适当的  $\sigma$  值, 可以得到不同的输入信噪比, 这里对文献 [4] 提出的符号动力学系统方法 (SD 方法)、文献 [1] 中建议的两种迭代降噪方法 (PI 方法和 PII 方法) 以及本文提出的梯度微扰法 (GD) 方法在不同输入信噪比时的降噪效果进行了比较研究, 实验结果如表 1 所示。实验中取轨道长度  $N = 20000$ 。在 SD 方法中, 取用于估计的符号序列长度  $L = 10$ , 这个长度足够使 SD 方法达到其极限信噪比增益<sup>[4]</sup>; 在 PII 方法中, 权常数和迭代总次数 (类似于梯度微扰法中的控制收敛参数和微扰总次数, 因而也用字符  $\mu$  和  $K$  表示) 的取值在表中随相应的信噪比增益值给出; 对于一维映射, PI 方法和 GD 方法得到的迭代公式是一致的, 在 PI 方法中, 取迭代总次数  $K = 40$ , 权常数  $\mu$  的值在表 1 中随相应的信噪比增益值给出; 在 GD 方法中, 控制收敛参数  $\mu$  和微扰总次数的值在表 1 中随相应的信噪比增益值给出。

表1 各种降噪方法对 Logistic 混沌信号的降噪结果的比较

输入信噪比 (dB)	PII 方法得到的信噪比增益 (dB)	SD 方法得到的信噪比增益 (dB)	GD 方法和 PI 方法得到的信噪比增益 (dB)
3	3.7 ( $\mu = 1 \times 10^{-2}$ )	2.9	3.8 ( $\mu = 3 \times 10^{-3}, K = 40$ )
5	3.3 ( $\mu = 1 \times 10^{-2}$ )	2.1	3.5 ( $\mu = 3 \times 10^{-3}, K = 40$ )
7	3.1 ( $\mu = 7 \times 10^{-3}$ )	2.4	3.9 ( $\mu = 7 \times 10^{-3}, K = 40$ )
10	3.4 ( $\mu = 7 \times 10^{-3}$ )	3.8	5.1 ( $\mu = 7 \times 10^{-3}, K = 40$ )
15	3.0 ( $\mu = 7 \times 10^{-3}$ )	7.1	8.1 ( $\mu = 3 \times 10^{-2}, K = 40$ )
20	2.0 ( $\mu = 3 \times 10^{-3}$ )	10.0	11.0 ( $\mu = 7 \times 10^{-2}, K = 100$ )
25	1.0 ( $\mu = 1 \times 10^{-3}$ )	11.9	13.4 ( $\mu = 7 \times 10^{-2}, K = 200$ )
30	0.5 ( $\mu = 1 \times 10^{-3}$ )	15.2	15.4 ( $\mu = 7 \times 10^{-2}, K = 200$ )
35	0.0 ( $\mu = 3 \times 10^{-4}$ )	16.5	15.0 ( $\mu = 7 \times 10^{-2}, K = 200$ )
40	0.0 ( $\mu = 1 \times 10^{-4}$ )	18.5	15.0 ( $\mu = 7 \times 10^{-2}, K = 200$ )
45	0.0 ( $\mu = 3 \times 10^{-5}$ )	17.5	15.1 ( $\mu = 7 \times 10^{-2}, K = 200$ )

根据表 1 所示的研究结果可知: (1) 对于一维 Logistic 映射来说, 本文提出的梯度微扰法的降噪信噪比增益不低于文献 [1] 建议的方法 (包括低信噪比的情形); (2) 本文提出的梯度微扰法在低信噪比时降噪信噪比增益大于文献 [4] 提出的符号动力学系统方法, 而在高信噪比时小于文献 [4] 提出的符号动力学系统方法。

另外, 本文提出的梯度微扰法的应用范围要比文献 [1] 和文献 [4] 中给出的方法广泛。

综上所述可知本文提出的梯度微扰法在用于低信噪比时混沌信号降噪的问题中具有较大的优点。

#### 4 小 结

本文提出一种混沌信号降噪的微扰方法, 它的原理非常简单, 关键在于如何选取一个适当的微扰序列, 文中给出了一个选取微扰序列的实例算法, 并把得到的微扰方法称为梯度微扰法, 实验表明, 梯度微扰法能够在低信噪比时得到很好的降噪效果, 文中还对梯度微扰法的参数选择问题进行了实验研究。当然, 梯度微扰方法也有一些缺点: 首先, 当轨道长度  $N$  较大时, 算法的计算量很大; 其次, 噪声的统计信息并没有加以利用, 这在一定意义上增强了梯度微扰法的适用性, 但同时也表明算法没有对先验知识进行充分地利用; 还有, 在某些情况下, 混沌映射方程不能被当成已知条件, 这时微扰方法是不能适用的, 在这种情形下, 文献 [7] 提出的基于局部几何投影的方法将是一种很好的方法。

#### 参 考 文 献

- [1] Chungyong Lee, D. B. Williams, Generalized iterative methods for enhancing contaminated chaotic signals, *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I*, 1997, CAS-I-44(6), 501-512.
- [2] H. C. Papadopoulos, G. W. Wornell, Maximum-likelihood estimation of a class of chaotic signals, *IEEE Trans. on Information Theory*, 1995, IT-41(1), 312-317.
- [3] S. Kay, V. Nagesha, Methods for chaotic signal estimation, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, SP-43(8), 2013-2016.
- [4] Ling Cong, Wu Xiaofu, Sun Songgeng, A general efficient method for chaotic signal estimation, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1999, IP-47(5), 1424-1428.
- [5] J. D. Farmer, J. Sidorowich, Optimal shadowing and noise reduction, *Physica D*, 1991, 47(3), 373-392.
- [6] C. Myers, S. Kay, M. Richard, Signal separation for nonlinear dynamical systems, *IEEE ICASSP*, Minneapolis, Minnesota, 1992, IV, 129-132.
- [7] R. Cawley, G. H. Hsu, Local-geometric-projection method for noise reduction in chaotic maps and flows, *Physical Review A*, 1992, 46(6), 3057-3082.

### DISTURBING METHOD FOR NOISE REDUCTION OF CHAOTIC SIGNAL WITH LOW SIGNAL-TO-NOISE-RATIO

Li Chunfu    Yu Juebang

(Dept. Opto-Electron. & Tech., UEST of China, Chengdu 610054, China)

**Abstract** A new disturbing method for noise reduction of chaotic signal is presented, and a realizing example of this method—gradient disturbing method, is proposed. The noise-reduction capability of the gradient disturbing method for chaotic signal is experimentally studied, it is shown that the gradient disturbing method can obtain fairly good noise-reduction result for chaotic signal even if the signal-to-noise-ratio is low. How to choose the parameters used in the gradient disturbing method is also experimentally studied in this paper.

**Key words** Chaos, Chaotic signal, Noise reduction

李春福: 男, 1973 年生, 博士生, 研究方向为混沌通信。

虞厥邦: 男, 1932 年生, 博士生导师, 研究方向为非线性电路。