

月形波导和加片圆波导的解析分析

张黎阳 汪文秉

(西安交通大学电波教研室, 西安 710049)

摘要 采用模匹配方法分析了月形波导和加片圆波导的截止频率。波导中的场采用半阶 Bessel 函数展开并令其满足边界条件, 从而获得截止频率的特征方程。根据本文所给公式可求解任意尺寸的月形波导、倒月形波导和加片圆波导的截止频率, 并获得稳定的、具有高精度的解。

关键词 月形波导; 截止频率; 柱谐展开; 加法定理、边界条件

一、前言

偏心圆环波导曾得到人们普遍的关注^[1,2]。该波导具有两个相互嵌套、离心的圆柱导体。当该偏心圆波导的内外壁由导体联接时, 就称为月形波导 (Lunar Waveguide) 或倒月形波导 (Inverted Lunar Waveguide)。月形波导是 1959 年由波音飞机公司推出的新型波导, 其特点是: 比同样尺寸的同轴波导和圆波导具有更低的主模频率, 且具有低阻抗和宽频带特性, 使其可能用作传输线、滤波器、谐振腔以及阵列天线的馈线等。以往对月形波导的分析多采用数值方法, 计算量较大, 且精度往往不高。Kuttler^[3] 采用保角变换结合中间法 (Intermediate Method) 的方法获得了月形波导各模式截止频率的上、下限。它是目前有关月形波导的最好结果。本文从解析方法入手, 基于 Bessel 函数的加法定理, 获得一个由解析函数表达的方程, 用于求解月形波导和倒月形波导的截止频率。大量数据结果表明, 该公式具有准确、高效、稳定收敛等特点, 适用于各种相对尺寸。本文将倒月形波导和加片圆波导作为月形波导的变例进行分析, 获得同样的效果。

二、理论公式

月形波导如图 1 所示。圆柱坐标原点位于内导体圆心 O , 且连接内外导体的金属片对应 $\phi = 0$, 并假设波导中任意模式波函数可表示为

$$\text{TE 模} \quad \psi(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_{m/2} J_{m/2}(kr) + B_{m/2} Y_{m/2}(kr)] \cos(m\phi/2) \quad (1a)$$

$$\text{TM 模} \quad \psi(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_{m/2} J_{m/2}(kr) + B_{m/2} Y_{m/2}(kr)] \sin(m\phi/2) \quad (1b)$$

TE 模式和 TM 模式的波函数分别代表 $H_z(r, \phi)$ 和 $E_z(r, \phi)$. (1a) 和 (1b) 式在 $\phi = 0$ 处已分别满足 Neumann 边界条件和 Dirichlet 边界条件, 即 $\phi = 0$ 时, $\partial H_z / \partial \phi = 0$ 或 $E_z = 0$.

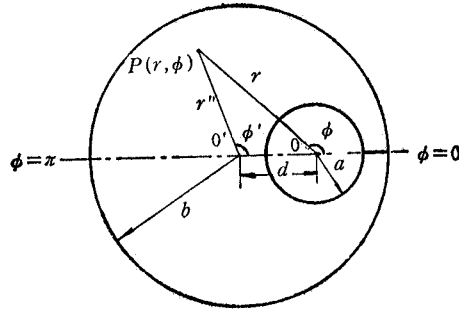


图 1 月形波导

由于该几何形状关于两圆心 O, O' 的连线对称(即 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi$), 为分析方便, 不妨将其模式分为奇模和偶模(见表 1). 由此, (1a) 和 (1b) 式可改写为

TE 模

$$\phi = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} [A_m J_m(kr) + B_m Y_m(kr)] \cos(m\phi), & \text{奇模} \\ \sum_{m=0}^{\infty} [A_m J_{m+1/2}(kr) + B_m Y_{m+1/2}(kr)] \cos[(m+1/2)\phi], & \text{偶模} \end{cases} \quad (1c)$$

TM 模

$$\phi = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} [A_m J_m(kr) + B_m Y_m(kr)] \sin(m\phi), & \text{奇模} \\ \sum_{m=0}^{\infty} [A_m J_{m+1/2}(kr) + B_m Y_{m+1/2}(kr)] \sin[(m+1/2)\phi], & \text{偶模} \end{cases} \quad (1d)$$

表 1 奇偶模划分

模 式		ψ 关于 $\phi = \pi$	ϕ 向谱函数	$\phi = 0, 2\pi$ 处场
TE	偶	奇	$\cos[(m+1/2)\phi]$	不连续
	奇	偶	$\cos(m\phi)$	连 续
TM	偶	偶	$\sin[(m+1/2)\phi]$	不连续
	奇	奇	$\sin(m\phi)$	连 续

其中 $0 < \phi < 2\pi$. 对于奇模式, 场在 $\phi = 0, (2\pi)$ 处连续, 此时月形波导等同于偏心圆波导, 其截止频率可由偏心圆波导公式^[2]给出

TE 模 $\det[P_{nm}^o] = 0$

TM 模 $\det[Q_{nm}^o] = 0$

其中

$$\phi(r, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m J_{m+1/2}(kr) + B_m Y_{m+1/2}(kr)] \sin [(m+1/2)\phi]$$

TM 模

$$\phi(r, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m J_{m+1/2}(kr) + B_m Y_{m+1/2}(kr)] \cos [(m+1/2)\phi]$$

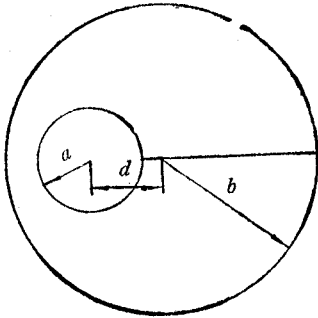


图2 倒月形波导

其中 $-\pi < \phi < \pi$ 。因而其偶模截止频率可由

$$\text{TE 模} \quad \det[P_{nm}^{ie}] = 0 \quad (6a)$$

$$\text{TM 模} \quad \det[Q_{nm}^{ie}] = 0 \quad (6b)$$

给出,其中

$$\begin{aligned} P_{nm}^{ie} &= [Y'_{m+1/2}(ka)J'_{n+1/2}(kb) \\ &\quad - J'_{m+1/2}(ka)Y'_{n+1/2}(kb)]J_{n-m}(kd) \\ &\quad + (-1)^{m+1}[Y'_{m+1/2}(ka)Y'_{n+1/2}(kb) \\ &\quad - J'_{m+1/2}(ka)J'_{n+1/2}(kb)]J_{n+m+1}(kd) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{nm}^{ie} &= [Y_{m+1/2}(ka)J_{n+1/2}(kb) \\ &\quad - J_{m+1/2}(ka)Y_{n+1/2}(kb)]J_{n-m}(kd) \end{aligned}$$

$$+ (-1)^m [Y_{m+1/2}(ka)Y_{n+1/2}(kb) - J_{m+1/2}(ka)J_{n+1/2}(kb)]J_{n+m+1}(kd)$$

且可证明(6)式给出的解等同于将 $-d$ 直接代入(5)式的解。另一半模式(奇模)截止频率仍由偏心圆波导公式给出。

2. 加片圆波导

该结构可视为月形波导内导体半径 $a = 0$ 的特例,其偶模波函数可设为

$$\text{TE 模} \quad \phi(r, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_{m+1/2}(kr) \cos [(m+1/2)\phi]$$

$$\text{TM 模} \quad \phi(r, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_{m+1/2}(kr) \sin [(m+1/2)\phi]$$

其中径向函数变化仅含第一类 Bessel 函数是因为 $r = 0$ 点场的能量有限。重复上述推导过程,其偶模截止频率可由(7)式给出。

$$\text{TE 模} \quad \det[P_{nm}^{ec}] = 0 \quad (7a)$$

$$\text{TM 模} \quad \det[Q_{nm}^{ec}] = 0 \quad (7b)$$

其中

$$P_{nm}^{ec} = J'_{n+1/2}(kb)J_{n-m}(kd) + (-1)^m Y'_{n+1/2}(kb)J_{n+m+1}(kd)$$

$$Q_{nm}^{ec} = J_{n+1/2}(kb)J_{n-m}(kd) + (-1)^{m+1} Y_{n+1/2}(kb)J_{n+m+1}(kd)$$

另一半模式(奇模)截止频率与圆波导相同。

四、数值结果和讨论

表 2(a) 和 2(b) 分别列出尺寸为 $a = 0.66$, $b = 1$, $d = 0.22317$ 的月形波导的

$$P_{nm}^o = [Y'_m(ka)J'_n(kb) - J'_m(ka)Y'_n(kb)][J_{n-m}(kd) + (-1)^m J_{n+m}(kd)]$$

$$Q_{nm}^o = [Y_m(ka)J_n(kb) - J_m(ka)Y_n(kb)][J_{n-m}(kd) + (-1)^{m+1} J_{n+m}(kd)]$$

对于诸多的相对尺寸,我们已有精确的计算^[3],这里不再赘述。

对于偶模, TE 模式和 TM 模式在 $r = a$ 处需分别满足 Neumann 边界条件和 Dirichlet 边界条件,即

$$\text{TE 模} \quad \partial\phi/\partial r|_{r=a} = 0$$

$$\text{TM 模} \quad \phi|_{r=a} = 0$$

考虑到 $\cos[(m+1/2)\phi]$ 和 $\sin[(m+1/2)\phi]$ 对不同的 m 在 $[0, 2\pi]$ 区间内的正交性,则(1)式可写为

TE 模

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} C_m [Y'_{m+1/2}(ka)J_{m+1/2}(kr) - J'_{m+1/2}(ka)Y_{m+1/2}(kr)] \cos[(m+1/2)\phi] \quad (2a)$$

TM 模

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} C_m [Y_{m+1/2}(ka)J_{m+1/2}(kr) - J_{m+1/2}(ka)Y_{m+1/2}(kr)] \sin[(m+1/2)\phi] \quad (2b)$$

在 $r' = b$ 处的 Neumann 边界条件和 Dirichlet 边界条件可分别写为

$$\text{TE 模} \quad \left. \frac{\partial\phi}{\partial r'} \right|_{r'=b} = 0 \quad (3a)$$

$$\text{TM 模} \quad \phi|_{r'=b} = 0 \quad (3b)$$

利用半阶 Bessel 函数的加法定理

$$Z_{m+1/2}(kr) \exp[j(m+1/2)(\phi - \phi')] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} Z_{m+1/2+l}(kr') J_l(kd) \exp(jl\phi') \quad (4)$$

将(2)和(4)式代入(3)式,则偶模的截止频率由下式给出(见附录)

$$\text{TE 模} \quad \det[P_{nm}^e] = 0 \quad (5a)$$

$$\text{TM 模} \quad \det[Q_{nm}^e] = 0 \quad (5b)$$

其中

$$P_{nm}^e = [Y'_{m+1/2}(ka)J'_{n+1/2}(kb) - J'_{m+1/2}(ka)Y'_{n+1/2}(kb)]J_{n-m}(kd) \\ + (-1)^m [Y'_{m+1/2}(ka)Y'_{n+1/2}(kb) - J'_{m+1/2}(ka)J'_{n+1/2}(kb)]J_{n+m+1}(kd)$$

$$Q_{nm}^e = [Y_{m+1/2}(ka)J_{n+1/2}(kb) - J_{m+1/2}(ka)Y_{n+1/2}(kb)]J_{n-m}(kd) \\ + (-1)^{m+1} [Y_{m+1/2}(ka)Y_{n+1/2}(kb) - J_{m+1/2}(ka)J_{n+1/2}(kb)]J_{n+m+1}(kd)$$

三、几种变例

1. 倒月形波导

倒月形波导的波函数可设为

TE 模

$$\phi(r, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m J_{m+1/2}(kr) + B_m Y_{m+1/2}(kr)] \sin [(m+1/2)\phi]$$

TM 模

$$\phi(r, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m J_{m+1/2}(kr) + B_m Y_{m+1/2}(kr)] \cos [(m+1/2)\phi]$$

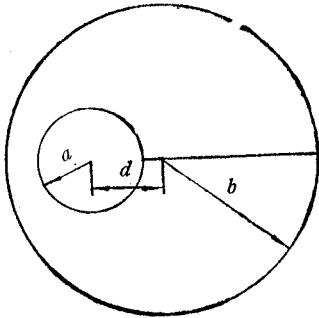


图2 倒月形波导

其中 $-\pi < \phi < \pi$ 。因而其偶模截止频率可由

$$\text{TE 模} \quad \det[P_{nm}^{ie}] = 0 \quad (6a)$$

$$\text{TM 模} \quad \det[Q_{nm}^{ie}] = 0 \quad (6b)$$

给出,其中

$$\begin{aligned} P_{nm}^{ie} = & [Y'_{m+1/2}(ka)J'_{n+1/2}(kb) \\ & - J'_{m+1/2}(ka)Y'_{n+1/2}(kb)]J_{n-m}(kd) \\ & + (-1)^{m+1}[Y'_{m+1/2}(ka)Y'_{n+1/2}(kb) \\ & - J'_{m+1/2}(ka)J'_{n+1/2}(kb)]J_{n+m+1}(kd) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{nm}^{ie} = & [Y_{m+1/2}(ka)J_{n+1/2}(kb) \\ & - J_{m+1/2}(ka)Y_{n+1/2}(kb)]J_{n-m}(kd) \end{aligned}$$

$$+ (-1)^m [Y_{m+1/2}(ka)Y_{n+1/2}(kb) - J_{m+1/2}(ka)J_{n+1/2}(kb)]J_{n+m+1}(kd)$$

且可证明(6)式给出的解等同于将 $-d$ 直接代入(5)式的解。另一半模式(奇模)截止频率仍由偏心圆波导公式给出。

2. 加片圆波导

该结构可视为月形波导内导体半径 $a = 0$ 的特例,其偶模波函数可设为

$$\text{TE 模} \quad \phi(r, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_{m+1/2}(kr) \cos [(m+1/2)\phi]$$

$$\text{TM 模} \quad \phi(r, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_{m+1/2}(kr) \sin [(m+1/2)\phi]$$

其中径向函数变化仅含第一类 Bessel 函数是因为 $r = 0$ 点场的能量有限。重复上述推导过程,其偶模截止频率可由(7)式给出。

$$\text{TE 模} \quad \det[P_{nm}^{ee}] = 0 \quad (7a)$$

$$\text{TM 模} \quad \det[Q_{nm}^{ee}] = 0 \quad (7b)$$

其中

$$P_{nm}^{ee} = J'_{n+1/2}(kb)J_{n-m}(kd) + (-1)^m Y'_{n+1/2}(kb)J_{n+m+1}(kd)$$

$$Q_{nm}^{ee} = J_{n+1/2}(kb)J_{n-m}(kd) + (-1)^{m+1} Y_{n+1/2}(kb)J_{n+m+1}(kd)$$

另一半模式(奇模)截止频率与圆波导相同。

四、数值结果和讨论

表 2(a) 和 2(b) 分别列出尺寸为 $a = 0.66$, $b = 1$, $d = 0.22317$ 的月形波导的

截止频率和 Kuttler^[1] 的上、下限。结果证实所有 TE 模式结果均落在限内，且非常靠近其上限(本文中 TE 偶模和 TM 偶模分别对应文献[1]中的 TE 反对称模和 TM 对称模)，文献 [1] 中未给出该尺寸月形波导 TM 模式的数据。用本文公式计算，分别取 $N = 12$ 和 $N = 16$ ，诸模式的前 5 位有效数字均相同，证明公式所给出的解是收敛的。收敛曲线见图 3。

表 3(a) 和表 3(b) 分别列出尺寸为 $b = 1, a = 0.572, d = 0.318$ 的月形波导 TE 和 TM 模式截止频率和相应的上、下限。所有结果均在 Kuttler 的限内，且更靠近其上限。

因为 Kuttler 的上、下限分别用 Ritz 方法和中间法计算获得，由此我们推断，对于月形波导，Ritz 方法有足够精确的结果，而中间法精度稍差。

表 4 列出 $d = 0.5$ 的加片圆波导的诸模式截止频率。其中，奇模式截止频率可与 $J'_n(x)$ 和 $J_n(x)$ 的零点对比，以检验计算精度。比较结果亦说明计算结果具有高精度(4~5 位有效数字)。须注意，加片圆波导 TM 模截止频率不含 $J_0(x)$ 零点。这是因为圆波导的 TM_{0i} 模仅有偶模形式，不能满足片状导体处的边界条件；TE 模则不同，截止频率包含 $J_0(x)$ 的零点。

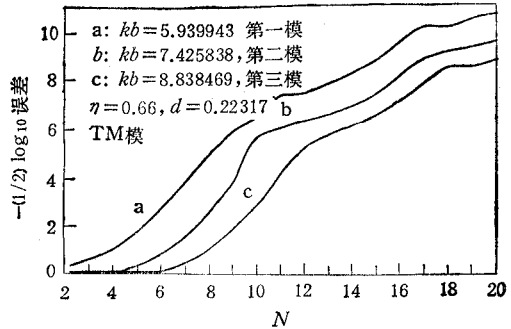


图 3 收敛性曲线

$$\left(\text{误差} = \int_c |E_x(R)|^2 ds, R = \sqrt{b^2 - d^2 \sin^2 \phi} - d \cos \phi \right)$$

(图中 η 应为 a, b 应为 b , 加一项 $b = 1$)

五、结 论

本文给出的有关月形波导和加片圆波导的截止频率的计算公式是可靠的。计算结果表明精度较高。

表 2(a) 月形波导的截止频率(偶模)

$a = 0.66, b = 1, d = 0.22317$

序 号	本 文 结 果		Kuttler 的上、下限 ^[1]	
	TE	TM	TE	
			下 限	上 限
1	0.8538	5.9399	0.8521	0.8538
2	1.8951	7.4258	1.8916	1.8952
3	3.0518	8.8385	3.0458	3.0519
4	4.2235		4.2138	4.2238
5	5.3768		5.359	5.378
6	6.5075		6.465	6.510
7	6.8793		6.843	6.883
8	7.6210		7.502	7.627
9	8.4749		8.35	8.49

表 2(b) 月形波导的截止频率(奇模)
 $a = 0.66, b = 1, d = 0.22317$

序 号	本 文 结 果		Kuttler 的上、下限 ^[1]	
	TE	TM	TE	
			下 限	上 限
1	1.3569	6.6933	1.3545	1.3570
2	2.4665	8.1402	2.4619	2.4666
3	3.6390	9.5220	3.6314	3.6392
4	4.8030		4.7901	4.8034
5	5.9444		5.916	5.946
6	7.0661		6.984	7.070
7	7.6858		7.62	7.693
8	8.1727		7.97	8.19
9	9.2353		8.63	9.25

表 3(a) 月形波导的截止频率(偶模)
 $a = 0.572, b = 1, d = 0.318$

序 号	本 文 结 果		Kuttler 的上、下限 ^[1]			
	TE	TM	TE		TM	
			下 限	上 限	下 限	上 限
1	0.9620	4.6061	0.9567	0.9621	4.5962	4.6097
2	2.0570	6.2341	2.0446	2.0571	6.2097	6.2383
3	3.2185	7.7412	3.195	3.219	7.663	7.749
4	4.3728	8.8619	4.324	4.375	8.401	8.883
5	5.5012	9.1591	5.362	5.506		
6	5.7836		5.633	5.793		
7	6.6171		6.15	6.64		
8	7.5830					
9	7.7432					

表 3(b) 月形波导的截止频率(奇模)
 $a = 0.572, b = 1, d = 0.318$

序 号	本 文 结 果		Kuttler 的上、下限 ^[1]			
	TE	TM	TE		TM	
			下 限	上 限	下 限	上 限
1	1.5025	5.4384	1.4981	1.5026	5.4217	5.4433
2	2.6317	7.0004	2.619	2.632	6.9475	7.0064
3	3.7988	8.4598	3.771	3.799	8.118	8.469
4	4.8003	9.7588	4.745	4.803		
5	4.9428	9.8431	4.882	4.944		
6	6.0609		5.912	6.064		
7	6.7126		6.48	6.72		
8	7.1725					
9	8.2405					

表 4 加片圆波导的截止频率
 $d = 0.5, b = 1, (k < 8)$

序 号	偶 模		奇 模			
	本 文 结 果				$J'_m(x) = 0$	$J_m(x) = 0$
	TE	TM	TE	TM	TE	TM($m \neq 0$)
1	1.6536	2.5775	1.8412	3.8317	1.84116	3.83171
2	2.6220	4.2043	3.0543	5.1356	3.05424	5.13562
3	3.6773	5.4070	3.8317	6.3802	3.83171	6.38016
4	4.7735	5.7477	4.2012	7.0156	4.20119	7.01559
5	5.3233	6.8183	5.3176	7.5883	5.31755	7.58834
6	5.8722	7.1799	5.3314		5.33144	
7	6.9623		6.4156		6.41562	
8	7.8314		6.7061		6.70613	

附 录

以 TM 偶模为例,由 Bessel 函数的加法定理:

$$\exp[j(m+1/2)(\phi-\phi')]Z_{m+1/2}(kr) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(kd)Z_{m+1/2+l}(kr')\exp(jl\phi')$$

由此,当 $r' = b$ 时有

$$Z_{m+1/2}(kr)\sin[(m+1/2)\phi]|_{r'=b} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(kd)Z_{m+1/2+l}(kb)\sin[(l+m+1/2)\phi']$$

代入(3)式有

$$\begin{aligned} \phi(r, \phi)|_{r'=b} &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(kd)[Y_{m+1/2}(ka)J_{m+1/2+l}(kb) \\ &\quad - J_{m+1/2}(ka)Y_{m+1/2+l}(kb)]\sin[(l+m+1/2)\phi'] \end{aligned}$$

令 $l+m+1/2 = n+1/2$, 则 $l+m = n, l = n-m$.

$$\begin{aligned} \phi(r, \phi)|_{r'=b} &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(kd)[Y_{m+1/2}(ka)J_{n+1/2}(kb) \\ &\quad - J_{m+1/2}(ka)Y_{n+1/2}(kb)]\sin[(n+1/2)\phi'] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m \sum_{n=0}^{\infty} \{J_{n-m}(kd)[Y_{m+1/2}(ka)J_{n+1/2}(kb) - J_{m+1/2}(ka)Y_{n+1/2}(kb)] \\ &\quad - J_{-n-1-m}(kd)[Y_{m+1/2}(ka)J_{-n-1/2}(kb) \\ &\quad - J_{m+1/2}(ka)Y_{-n-1/2}(kb)]\}\sin[(n+1/2)\phi'] \end{aligned}$$

两端同乘 $\sin[(n+1/2)\phi']$, 关于 ϕ' 从 0 至 2π 积分

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \{J_{n-m}(kd)[Y_{m+1/2}(ka)J_{n+1/2}(kb) - J_{m+1/2}(ka)Y_{n+1/2}(kb)]$$

$$- J_{-n-m-1}(kd)[Y_{m+1/2}(ka)J_{-n-1/2}(kb) - J_{n+1/2}(ka)Y_{-n-1/2}(kb)] = 0$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

注意到

$$J_{-n-1/2}(x) = (-1)^{n-1}Y_{n+1/2}(x)$$

$$Y_{-n-1/2}(x) = (-1)^n J_{n+1/2}(x)$$

$$J_{-m-n-1}(x) = (-1)^{n+m+1}J_{n+m+1}(x)$$

代入上式,使其获非零解的充要条件即为(5)式.

参 考 文 献

- [1] J. R. Kuttler, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-32**(1984)4, 348—354.
- [2] J. A. Roumliotis et al., *Radio Sci.* **15**(1980)5, 923—937.
- [3] Zhang Liyang et al., *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-39**(1991)8, 1416—1420.

ANALYSIS OF LUNAR WAVEGUIDES AND VAINED CIRCULAR WAVEGUIDES

Zhang Liyang Wang Wenbing
(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract The Lunar waveguides and vained circular waveguides are analyzed by using the mode matching method. The fields in the waveguides are expressed by cylindrical harmonic expansions in which Bessel functions with half orders are involved and the boundary conditions are imposed. Characteristic equations for cutoff wave numbers for both TE and TM modes are obtained. Several waveguides of different relative dimension are calculated, and the results show high accuracy and are considerably steady.

Key words Lunar waveguide; Cutoff wave number; Cylindrical harmonic expansion; Addition theorem; Boundary condition