第12卷 第5期
1990年9月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 12, No. 5
Sept., 1990

模拟神经网络稳定性研究*

曾黄麟　虞厥邦
(电子科技大学，成都)

摘要　本文提出了模拟神经网络稳定性分析的静态等效模型,通过推广特勒根定理,从等效模型导出了物理意义清晰的能量函数. 由一阶微分方程组求网络能量函数的方法普适于所有的一阶连续自治系统. 文章并利用能量平稳原理对点格神经网络的稳定性质进行了讨论，得到了一些对于网络的电路实现具有一定指导意义的结果.

关键词　模拟神经网络;连续自治系统;能量函数;渐近稳定性

1. 引言

神经网络在语音识别、人工智能、计算机视觉、图象处理等方面的应用价值使得人们对它产生了极大的兴趣. 自从 Hopfield[1] 在神经网络的研究中引入 Lyapunov 函数以来,使神经网络的稳定性研究有了明确的理论根据,从而推动了神经网络的研究和发展.

模拟神经网络是一个广泛互联的大规模非线性系统,在稳定性分析中求 Lyapunov 函数常常遇到困难,而且有时得到的表达式物理意义不甚明确. 本文利用电路分析中普遍应用的理论,提出了模拟神经网络稳态分析的静态等效模型,通过推广特勒根定理求解网络的稳态平衡点,得到物理意义明确的能量函数.

2. 模拟神经网络的稳定性分析

在由N个神经元构成的模拟神经网络中,一般状态方程可以写为

$$\dot{x}_i = F_i[x_1, x_2, \cdots, x_N, I], \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{1}$$

或

$$\dot{X} = -W(t)X(t) + A(t)g(X(t)) + I \tag{2}$$

式中，$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_N(t))^T \in R^N$，$x_i(t)$ 表示第 i 个神经元的活化状态. $g(X(t)) = (g_1(x_1(t)), g_2(x_2(t)), \cdots, g_N(x_N(t)))^T$，$g_i(x_i(t))$ 是一个非线性函数，它代表了第 i 个神经元触发的短期效应. $I = (I_1, I_2, \cdots, I_N)^T \in R^N$，是神经网络的$N$个外部定常输入. W和A是$N \times N$阶矩阵. 若网络具有自适应学习功能,在学习过程中W和A不是常数,当网络稳定后则为定常实矩阵.

模拟神经网络可以由电容、电阻和运放组成的单元电子线路通过广泛互联构成[2]. 对于一个由(1)式描述的连续自治系统,其动态特性由该模拟电子线路网络确定. 在动态电路中,当过渡过程结束,电路达到稳态. 这时稳态特性分析可以将电路中所有的动态元件去掉,即模拟神经网络中的电容支路等效为开路而保留其端口电压,因而模拟神经网络的

* 1989年12月18日收到，1990年3月22日修改定稿.

稳定性质可由它的静态等效电路分析.

根据特勒根定理[3]，由静态等效电路，按基尔霍夫定律并标定方向，则有

$$\sum_i V_{xi}\cdot I_{xi}=0,\quad i=1,2,\cdots,N \tag{3}$$

式中，V_{xi} 表示第 i 个神经元静态等效电路的状态电压，I_{xi} 为第 i 个神经元静态等效电路的支路电流. 模拟神经网络的稳态解就由(3)式求出.

根据静态等效电路可以得到物理意义清晰的能量函数

$$G(V)=\sum_i V_{xi}\cdot I_{xi},\quad i=1,2,\cdots,N \tag{4}$$

对于由(1)式表达的一般连续自治网络，我们可写出

$$\frac{dx_i}{dx_j}=\frac{F_i(x_1,x_2,\cdots,x_N,I)}{F_j(x_1,x_2,\cdots,x_N,I)},\quad (j>i) \tag{5}$$

即
$$F_j(x_1,x_2,\cdots x_N,I)dx_i=F_i(x_1,x_2,\cdots,x_N,I)dx_j \tag{6}$$

再用适当的代换和加法，将(6)式写为

$$W_1(x_1,x_2,\cdots,x_N,I)dx_1+\cdots+W_N(x_1,x_2,\cdots,x_N,I)dx_N=0 \tag{7}$$

式中 $W_1,W_2,\cdots,W_N$ 由比较方程组(6)与(7)式中 dx_i 项决定.

一般能量函数可表达为

$$G(x)=\int_0^{x_1}W_1(x_1,0,\cdots,0,I)dx_1+\int_0^{x_2}W_2(x_1,x_2,0,\cdots,0,I)dx_2+\cdots$$
$$+\int_0^{x_N}W_N(x_1,x_2,\cdots,x_N,I)dx_N \tag{8}$$

(8)式中令 $G(x)=0$，便得到推广的特勒根定理.

由电路分析中能量平稳原理[4]可知，如果连续自治网络的解是有界的，且函数 $G(x)$ 是衰减的，则该网络是渐近稳定的. 由于神经网络中 x 受电路参数的限制，对于具体的网络易证明它是有界的，因而网络能否达到稳定平衡状态，只需要证明存在 $dG(x)/dt\leqslant 0$ 即可.

下面以静态等效电路分析法来讨论点格神经网络[5]的稳定性质.

3. 点格神经网络稳定性质讨论

类似于点格自动机[6]的点格神经网络是一个广泛互联的二维非线性网络，其特点是采取最相邻元之间的互联，并定义神经元 $C(i,j)$ 的 r 相邻为

$$N_r(i,j)=\{C(k,l)\,|\max\{|k-i|,|l-j|\}\leqslant r,\quad k\neq i,l\neq j,$$
$$1\leqslant k\leqslant M,\quad 1\leqslant l\leqslant N\} \tag{9}$$

例如 $r=1$ 表示 3×3 的点格神经网络. 其神经元的模拟电子电路如图 1 所示. 其中线性电容 $C>0$，线性电阻 $R_x>0$，$R_y>0$，E_{ij} 为独立电压源，I 为独立电流源，压控电流源分别定义为

$$\left.\begin{aligned}I_{xu}(i,j;k,l)&=B(i,j;k,l)V_{ukl} &(10a)\\ I_{xy}(i,j;k,l)&=A(i,j;k,l)V_{ykl} &(10b)\end{aligned}\right\}C(k,l)\in N_r(i,j)$$

$$I_{yx}=g(V_{xij})/R_y=V_{yij}/R_y \tag{10c}$$

输出特性为分段线性曲线，如图 2 所示.

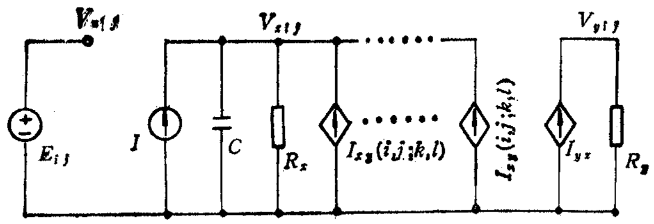

图 1　神经元模拟电子电路

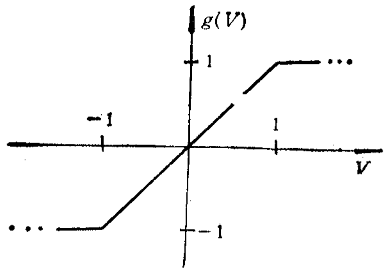

图 2　非线性受控源输出特性

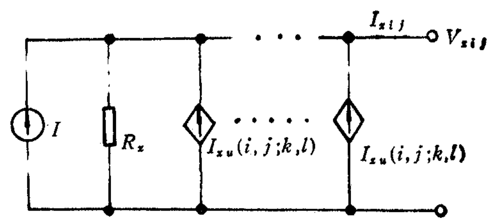

图 3　神经元稳态等效电路

根据图 1 可得点格神经网络的状态方程

$$C\frac{dV_{xij}(t)}{dt}=-\frac{1}{R_x}V_{xij}(t)+\sum_{C(k,l)\in N_r(i,j)}A(i,j;k,l)V_{ykl}(t)$$

$$+\sum_{C(k,l)\in N_r(i,j)}B(i,j;k,l)V_{ukl}+I \tag{11}$$

这里设初始偏置 $V_{uij}=E_{ij}$ 为定常参量，不考虑时变，且 $|V_{uij}|\leqslant 1$，$|V_{xij}(0)|\leqslant 1$，$1\leqslant i\leqslant M$，$1\leqslant j\leqslant N$. 由此点格神经网络的神经元模拟电路，稳态时可以等效为图 3 所示静态等效电路.

按图 3 标定方向，网络的稳定平衡点可由下式解出

$$\sum_{C(i,j)\in N_r(i,j)}V_{xij}\cdot I_{xij}=0,\quad 1\leqslant i\leqslant M,\ 1\leqslant j\leqslant N \tag{12}$$

从而我们得到能量函数

$$G(V)=\sum_{C(i,j)\in N_r(i,j)}V_{xij}\cdot I_{xij}=-\sum_{i,j}IV_{xij}(t)$$

$$+\frac{1}{2R_x}\sum_{(i,j)}V_{xij}^2(t)-\sum_{(i,j)}\sum_{(k,l)}B(i,j;k,l)V_{ukl}V_{xij}(t)$$

$$-\sum_{(i,j)}\sum_{(k,l)}A(i,j;k,l)g(V_{xkl})V_{xij}(t) \tag{13}$$

当 $|V_{xij}(t)|\leqslant 1$ 时，$g(V_{xkl})=V_{ykl}=V_{xkl}$；若存在 $A(i,j;k,l)=A(k,l;i,j)$，$1\leqslant i,k\leqslant M$，$1\leqslant j,l\leqslant N$，即点格神经网络中反馈联接矩阵 A 对称时，则

$$\frac{dG(V)}{dt}=-\sum_{(i,j)}\frac{dV_{xij}(t)}{dt}\left[I-\frac{1}{R_x}V_{xij}(t)\right.$$
$$\left.+\sum_{(k,l)}B(i,j;k,l)V_{ukl}+\sum_{(k,l)}A(i,j;k,l)V_{ykl}\right] \tag{14}$$

将(11)式代入上式右端方括号内，则

$$dG(V)/dt=-C\sum_{(i,j)}(dV_{xij}(t)/dt)^2\leqslant 0 \tag{15}$$

当 $|V_{xij}(t)|>1$ 时,将 $g(V_{xkl})=V_{ykl}=\pm 1$ 代入(13)式及 $dG(V)/dt$，同样可得 $dG(V)/dt\leqslant 0$。

综合上述两种情况可见,由此构造的点格神经网络的能量函数 $G(V)$ 是衰减的，因而该网络收敛于(12)式所解稳定点. 从上述稳定性分析还可得到以下结果:

(1) 当 $|V_{xij}(t)|\leqslant 1$ 时,网络是有条件稳定的,稳定条件是反馈联接矩阵必须是对称的. 且 $1/R_x>A(i,j;i,j)$，$V_{yij}(t)$ 才有稳定平衡点（这一点可直接由 (11) 式 $dV_{xij}(t)/dt=0$ 得到)，否则稳定性不能得到保证.这时网络输出 $V_{yij}(t)=V_{xij}(t)$ 是连续值。

(2) 当 $|V_{xij}(t)|>1$ 时,网络对反馈矩阵无对称要求. 且 $1/R_x<A(i,j;i,j)$，$V_{yij}(t)$ 有稳定平衡点，$V_{yij}(t)=\pm 1$，即离散二值输出. 这种输出形式有利于数字图像处理,模式识别等应用. 因而在电路实现中适当的设计电路偏置，使 $|V_{xij}(\infty)|>1$ 以保证输出 $V_{yij}(\infty)=\pm 1$ 是很重要的.

(3) 由(11)式可见,当 $B(i,j;k,l)=0$ 时,点格神经网络类似于 Hopfield 的 CAM 模型[7],只不过 CAM 模型输出特性为 S 型函数.当要求输出离散值时,则要求 S 函数的斜率趋于 ∞. 当模拟量输出时,点格神经网络稳定要求 $A(i,j;k,l)$ 是对称的,这与CAM 中要求 $T_{ij}=T_{ji}$ 是一致的. 所以点格神经网络是 CAM 的一种发展.

4. 结束语

本文从模拟神经网络的静态等效电路模型出发,分析网络的稳态特性;从等效电路模型推出的能量函数物理意义清晰. 而且由一阶非线性微分方程组得到连续自治网络的能量函数的方法还可以推广到一般神经网络中求 Lyapunov 函数的问题. 从而为神经网络的稳定性分析提供了一个有效的方法.

参 考 文 献

[1] J.J. Hopfield, *Proc. Natl. Acad. Sci.* U.S.A., **79**(1982), 2554.
[2] J.J.Hopfield, D.W. Tank, Science, **233**(1986),625.
[3] A. Desoer, S. Kuh, Basic circuit theory, McGraw-Hill, N.Y., (1969).
[4] L.O. Chua, J. Frankin Inst., **296**(1973)2,9.
[5] L.O. Chua, Lin Yang, *IEEE, Trans. on CAS*, **CAS-35**(1988)10,1257.
[6] K. Preston, Jr. M.J.B. Daff, Modern Cellular automata: theory and Application, New York. Plenum, (1984).
[7] J.J. Hopfield, *Proc. Natl. Acad. Sci.* U.S.A., **81**(1984), 3088.

RESEARCHES ON THE STABILITIES OF ANALOG ELECTRONIC NEURAL NETWORKS

Zeng Huanglin　Yu Juebang

(University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu)

Abstract　A new method for analysing the stabilities of analog electronic neural networks is presented. The energy functions with clear and definite physical meaning are derived by introducing the static equivalent circuit models, which has expanded the Tellegen Theorem for application on circuit analysis. The method used to derive the energy functions of nets from first order differential equations is valid for all first order continuous autonomous systems. The stability analysis of cellular neural networks is made by the use of stationary cocontent theorem. Some results are instructive for the network implementation on circuits.

Key words　Analog electronic neural network; Continuous autonomous system; Dynamical characteristic; Energy function; Asymptotical stability