

电子在 α 磁镜系统中的运动

刘红秀

(中国科学院高能物理研究所,北京)

摘要 本文研究具有任意初始入射条件的电子在 α 磁镜系统中的运动。研究发现,在中心轨道确定之后,任何其它轨道可以区分为正常轨道或非正常轨道。在正常轨道上运动的电子接受动量选择狭缝的选择,而在非正常轨道上运动的电子不受动量选择狭缝的作用。文中给出了正常轨道上的任一微分弧元在中心轨道坐标系中的投影的计算方法,并且经大量的数值计算证明是可靠的。这一工作对于了解带电粒子束在通过 α 磁镜系统时的运动的详细过程有重要意义。

关键词 电子光学; α 磁镜; 标准粒子; 轨道投影

一、引言

在1986年,Stanford大学的Madedy小组研制成功了一台由射频直线加速器(MARK III)驱动的自由电子激光振荡器^[1]。由于在自由电子激光器中,激光束的亮度正比于电子束的亮度^[2],因此,要求具有高亮度的注入器。为此,Madedy小组成功地发展了工作于S波段的单腔微波电子枪作为电子源^[3],其中电子束团由能提供大发射电流密度的LaB₆热阴极产生,并且通过射频场加速拉出微波枪口。

由于在微波枪出口处电子束团的能量或动量分布在一个很宽的射频相位区间内(几十皮秒),且电子束团具有很大的能散,Madedy小组采用动量选择器在某个动量(能量)附近选出整个束团的一部分注入射频直线加速器进行加速,以得到较小的能散。这种动量选择器便是1963年由H. A. Enge提出的一种消色散磁镜系统,简称为 α 磁镜系统^[4]。Enge已对这种系统就任意磁场指数的情形作了分析,指出消色散的条件为带电粒子的轨道的形状不依赖于其动量并且以一合适的角度入射。他还定性地分析了这种 α 磁透镜的聚焦特性,用数值计算的方法考察了色散、聚焦长度、放大率以及积分传输矩阵等。文献[5]着重考察了束团通过 α 磁镜系统时的动量选择和相宽压缩等。

本文根据文献[6]的思想,进一步探讨电子通过 α 磁镜系统时的运动。主要考虑电子在 α 磁镜系统中经过一个微分弧元后的坐标在中心轨道坐标系上的投影。这对于象二极磁铁那样的系统是不必要的,因为这时的中心轨道和其它轨道的曲率半径都是固定不变的,但在 α 磁镜系统中则不然。

二、中心轨道

α 磁镜系统如图 1 所示, 可以由一四极磁透镜在其对称中平面上放置一磁短路板构成。图 1 中所示的坐标系是一直角坐标系, 其中 (u, v) 代表磁中平面上的坐标, w 代表垂

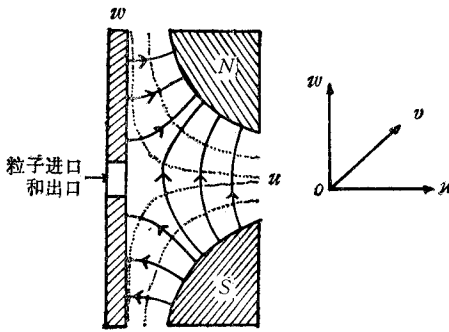


图 1 α 磁镜示意图及其坐标系

直方向上的坐标, (u, v, w) 只代表在 α 磁镜系统中的局部坐标, (x, y, z) 坐标系留给整个系统(从阴极到加速器出口)使用, 由此可避免混淆。

α 磁镜系统中的磁场可表示为

$$\mathbf{B} = \nabla B (u \mathbf{e}_w + w \mathbf{e}_u), \quad (u \geq 0) \quad (1)$$

其中 ∇B 表示磁场梯度 dB/du , 在此假设为常量; \mathbf{e}_u 和 \mathbf{e}_w 分别代表 u 和 w 方向的单位矢量。

关于电子在 α 磁镜磁中平面上的运动, 文献[5]已做了详尽的解析研究。结果表明, 只要电子的入射角等于 40.71° , 电子位于 (u, v) 平面的上半平面和下半平面的轨道是完全对称的, 因而是消色散的, 入射角为 40.71° 的具有一定动量的粒子的轨道定义为中心轨道或标准粒子的轨道。经分析可知, 一切满足消色散条件的粒子的轨道的几个特征量可表示为

$$\left. \begin{aligned} u_{\max} &= 1.818(m_0 c \gamma \beta_0 / q \nabla B)^{\frac{1}{2}} \\ v_{\max} &= u_{\max} / 3.06 \\ l_\alpha &= 2.54 u_{\max} \\ \tau_\alpha &= l_\alpha / (\beta_0 c) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 u_{\max} 代表轨道在 u 方向上的最远距离, v_{\max} 为 v 方向上的最远距离, l_α 和 τ_α 分别为由入射点到出射点所走过的路程和所花费的时间。 u_{\max} 表达式中的 $m_0 c \gamma \beta_0$ 和 q 分别为粒子的动量和电荷量。对于文献[5]中的“LAS”条件, $\beta_0 = 0.93$, $\nabla B = 184 \text{Gs/cm}$, 因此, $u_{\max} = 8.85 \text{cm}$, $v_{\max} = 2.89 \text{cm}$, $l_\alpha = 22.6 \text{cm}$, $\tau_\alpha = 805 \text{ps}$ 。

需要指出的是, 在模拟一个电子束团通过 α 磁镜系统的运动时, 定义中心轨道是必须的。但这并不一定要求有一个标准粒子在中心轨道上运动。因此, 中心轨道更实际的意义在于为整个束团规定一个坐标系, 即中心轨道坐标系。

三、非标准粒子的轨道

标准粒子的特征为入射角等于 40.71° , 动量等于某个指定值, 入射点和出射点均为原点, 且其轨道完全位于磁中平面上。偏离上述条件的粒子称为非标准粒子, 其轨道称为非标准粒子的轨道。

首先, 由于在消色散的条件下, 粒子轨道的形状不依赖于粒子的动量, 因此, 与标准粒子相比, 在其它条件均相同, 仅仅动量不同时, 非标准粒子的轨道如图 2 所示, 仅仅是 u_{\max}

不同。由此可见,如果在水平轴上安放一狭缝,可对束团进行动量选择。另一方面,动量不同的粒子在穿过 α 磁镜时走过的路程不同,因此,所需的渡越时间也不同。根据(2)式,可以证明:

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\gamma} = \frac{\tau_\alpha}{\gamma\beta_0^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \quad (3)$$

因此,对于 $\gamma_{\min} > \sqrt{2}$ 的束团,粒子的能量愈高,所需的渡越时间愈长。由此,束团在受到动量选择的同时,相宽也得到压缩。其次,当粒子的入射角不等于 40.71° 时,粒子的出射点不再与入射点重合。若入射角小于 40.71° , 则粒子的出射点发生下移;若大于 40.71° , 则发生上移。

在更为一般的人射条件下,粒子的轨道必须通过数值求解才能求得。描述粒子轨道的微分方程组为

$$\left. \begin{aligned} d\beta_u/d\tau &= (a/c)u\beta_v \\ d\beta_v/d\tau &= -(a/c)(u\beta_u + w\beta_w) \\ d\beta_w/d\tau &= -(a/c)w\beta_v \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中以 $\tau = ct$ 为自变量, c 为光速; $\beta_i (i = u, v, w)$ 为归一化速度; $a = q\nabla B/m_0\gamma$ 。在数值求解中, $c\Delta t$ 可转换成 $(\lambda/360)\Delta\phi$, 其中 λ 为射频波长, $\Delta\phi = \omega\Delta t$, ω 为射频场角频率, $\Delta\phi$ 以度为单位。

给定任一组初始值 $(u_0, v_0, w_0, \beta_{u0}, \beta_{v0}, \beta_{w0})$, 通过求解方程组(4),即可求得相应的粒子的轨道。但这时的轨道是在 α 磁镜系统本身的局部坐标系中表示出的。作为射频直线加速器中的一个元件,粒子在 α 磁镜系统中的每一点上的坐标和速度还必须放在与相邻元件相一致的坐标系中来描述。换句话说,在 α 磁镜系统中还必须选定一个能与相邻元件衔接的坐标系,粒子的坐标和动量必须投影到这个坐标系上。这个坐标系就是中心轨道坐标系,其原点与 (u, v, w) 坐标系原点重合,其 x 方向为 (u, v) 平面上中心轨道的法线方向,其 y 方向为 (u, v, w) 坐标系的 w 方向,其 z 方向为中心轨道的切线方向。这样的坐标系也称作自然坐标系。本文将采取先在 (u, v, w) 坐标系中解出粒子在一微分弧元上的运动,然后投影到中心轨道坐标系上的方法,求得粒子在中心轨道坐标系中的运动。

四、电子在中心轨道坐标系中的运动

由于中心轨道坐标系的 y 轴与 α 磁镜系统坐标系的 w 轴相重合,我们仅在磁中平面上表示出两种坐标系,如图 3 所示。其中实线代表中心轨道,虚线代表一非标准粒子的轨道。为了考察非标准粒子在其轨道的任意一段微分弧元上的运动在中心轨道坐标系中的投影,假定粒子在 $t = t_0$ 时位于 A 点,经过 Δt 时间后,位于 A' 点。由 A 和 A' 两点分别向

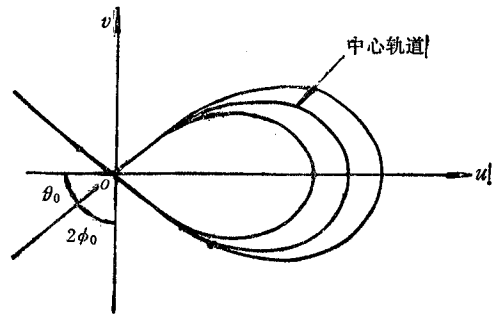


图 2 消色散条件下粒子的轨道

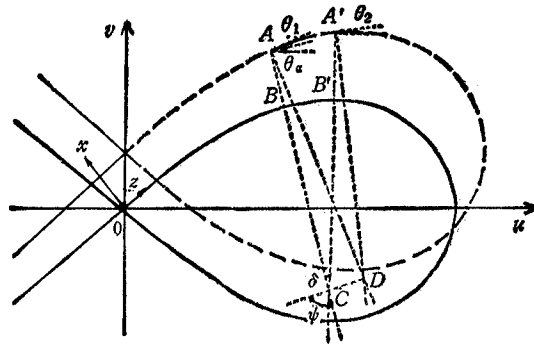


图3 非标准粒子轨道在中心坐标系中的投影

中心轨道引垂直线。与中心轨道分别交于 B 和 B' ，并且最终交于 C 点， C 点为弧 $\widehat{BB'}$ 的曲率中心，对应的曲率半径 CB 或 CB' 以 ρ_r 表示。设弧 $\widehat{AA'}$ 的曲率中心为 D ，对应的曲率半径以 ρ_a 表示。两段微分弧元的曲率中心相距 \overline{CD} 。粒子在 A 和 A' 处相对于中心轨道的方位角分别为 θ_1 和 θ_2 ， \overline{DC} 和 \overline{AC} 的延长线的交角为 ϕ ，弧 $\widehat{BB'}$ 的对应扇形角为 δ 。粒子在 A 点处相对于 α 磁镜坐标系的方位角为 $\tan\theta_a = V_v/V_u$ 。

这样，只要分别将正弦定理应用于 $\triangle ACD$ 和 $\triangle A'CD$ 即可得到^[6]：

$$\left. \begin{aligned} \frac{CD}{\sin\theta_1} &= \frac{\rho_r + x_1}{\sin(\phi + \theta_1)} = \frac{\rho_a}{\sin\phi} \\ \frac{CD}{\sin\theta_2} &= \frac{\rho_r + x_2}{\sin(\phi - \delta + \theta_2)} = \frac{\rho_a}{\sin(\phi - \delta)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 x_1 和 x_2 分别表示粒子在 A 点和 A' 点处投影到中心轨道坐标系的 x 坐标。

根据关系式

$$\left. \begin{aligned} CD \sin\phi &= \rho_a \sin\theta_1 \\ CD \cos\phi &= (x_1 + \rho_r) - \rho_a \cos\theta_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

可以得到

$$\left. \begin{aligned} \sin\theta_2 &= \sin(\delta + \theta_1) - \frac{x_1 + \rho_r \sin\delta}{\rho_a} \\ x_2 + \rho_r &= (x_1 + \rho_r) \cos\delta + \rho_a(\cos\theta_2 - \cos(\theta_1 + \delta)) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

对于 α 磁镜系统，粒子轨道的曲率半径与粒子所在位置有关。假设粒子在磁中平面上的某点处的轨道曲率半径为 ρ ，速度为 V ，磁场强度为 B ，则有

$$qVB = m_0\gamma V^2/\rho \quad (8)$$

因此，对于 α 磁镜系统有

$$\rho = \gamma\beta(m_0c/q\nabla B)/u \quad (9)$$

(9)式对于标准粒子和非标准粒子均适用。由此可见，要求得粒子在某一点处的曲率半径，必须知道带电粒子在这一点处的 u 坐标。

考察非标准粒子在某一微分弧元上的运动时，关心的是其坐标与动量在中心轨道上的投影。对于一般的人射条件，通过求解方程组(4)式可以求出粒子的 u 坐标以及曲率半

径 ρ_s 。同时,根据(7)式还必须求出 ρ_r , 亦即对应的 u_r 。 u_r 与 u 之间的关系为

$$u_r = u + x_1 \sin(\theta_s - \theta_1). \tag{10}$$

因此, 粒子在其轨道的一段微分弧元上的运动在中心轨道坐标系上的投影的计算可总结为

$$\left. \begin{aligned} \Delta s &= \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2} \\ \delta &= \Delta s \cos \theta_1 / (x_1 + \rho_r) \\ \Delta z &= \rho_r \delta \\ \sin \theta_2 &= \sin(\theta_1 + \delta) - (\rho_r + x_1) \sin \delta / \rho_s \\ x_2 &= -\rho_r + (\rho_r + x_1) \cos \delta + \rho_s (\cos \theta_2 - \cos(\delta + \theta_1)) \\ z_2 &= z_1 + \Delta z \\ y_2 &= w \\ x'_2 &= \tan \theta_2 \\ y'_2 &= \beta_w / (\sqrt{\beta_n^2 + \beta_v^2 \cos \theta_2}) \\ (\gamma \beta_z)_2 &= (\gamma \beta_z)_1 [(1 + x_1'^2 + y_1'^2) / (1 + x_2'^2 + y_2'^2)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

其中 $x' = dx/dz$, $y' = dy/dz$ 等。

五、计算示例

按照上述的方法和步骤, 本文就两组初始条件 $(x_0, y_0, z_0, \gamma \beta_{x0}, \gamma \beta_{y0}, \gamma \beta_{z0})$ 进行了计算, 结果示于图 4。在计算中, 中心轨道的归一化速度取为 0.93, 两组初始条件分别为 $(1, 1, -5, 0.05, 0.01, 3)$ 和 $(1, 1, -5, 0.5, 0.3, 2.5)$ 。

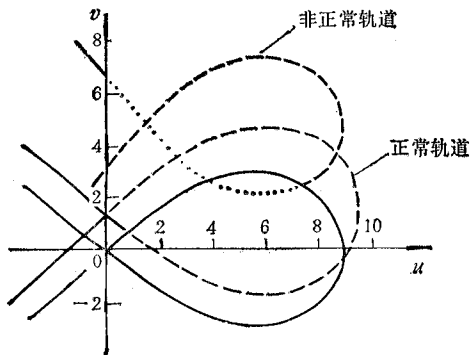


图 4 轨道投影计算示例

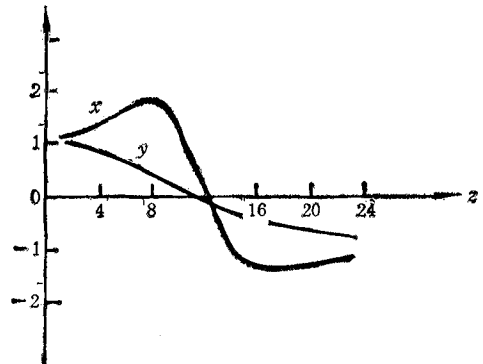


图 5 投影坐标间的关系示例

首先, 我们注意到, 根据入射条件的不同, 非标准粒子的轨道与中心轨道之间的关系可以分为下述三种情形中的一种: (1) 有两个交点; (2) 在某点相切; (3) 不相交也不相切。在后两种情形下, 非标准粒子的轨道是无法投影在中心轨道上的。即使在第一种情形下, 也只有当第一个交点位于下半平面时才可实现投影。由于 α 磁镜是用作动量选择器的, 而动量选择又是通过在水平轴的适当位置处放一狭缝来实现的。因此, 如果非标准粒子的

轨道没有在下半平面内与中心轨道相交,则这个非标准粒子一定不会经过动量选择狭缝。这时的轨道定义为非正常轨道,反之,定义为正常轨道。图4中第一组初始条件的轨道属于正常轨道,即与中心轨道的第一个交点位于下半平面;第二组初始条件的轨道则属于非正常轨道。只有轨道正常的粒子才接受动量选择,轨道不正常的粒子不受动量选择器的作用。

图5示出了在第一组初始条件下,电子的 x 、 y 和三个坐标之间的关系。与图4相比较,可以发现,本文给出的投影计算方法是足够的精度的,因而可以用于对整个射频直线加速器的工作性能进行详尽的模拟。

六、结 论

本文对带电粒子通过 α 磁镜系统的运动作了进一步研究,重点是解决非标准粒子轨道在中心轨道上的投影问题。文中给出了正常轨道的任一微分弧元在中心轨道坐标系中的投影的计算方法,并经大量的数值计算证明是完全可靠的。本工作对于详细模拟带电粒子束通过 α 磁镜系统具有重要意义。

参 考 文 献

- [1] S. V. Benson, et al., *Nucl. Instr. and Meth.*, A250(1986), 39.
- [2] T. C. Marshall, *Free Electron Lasers*, Macmillan, Inc., (1985).
- [3] G. A. Westenskow, J. M. J. Madey, *Lasers and Particle Beams*, 2(1984), 223.
- [4] H. A. Enge, *Rev. Sci. Instr.*, 34(1963), 385.
- [5] G. A. Westenskow et al., HEPL Technical Note TN-86-1, (1986).
- [6] K. L. Brown, R. Belbeoch, P. Bounin, *Rev. Sci. Instr.*, 35(1964), 481.

MOTION OF ELECTRON ACROSS AN ALPHA MAGNETIC MIRROR SYSTEM

Liu Hongxiu

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract Motion of an electron across an alpha magnetic mirror system with arbitrary incident conditions is studied. It is found that when the central trajectory is given, any other trajectories can be distinguished as normal and abnormal ones. Electrons moving along normal trajectories accept filtering of momentum filter slit, while the others along abnormal trajectories will not. The method of computing the projections onto the central trajectory coordinate system of a differential arc element along normal trajectory is given, which is numerically demonstrated with enough precision. This work is of significance for understanding the details of motion of charged particle beam across alpha magnetic mirror system.

Key words Electron optics; Alpha magnetic mirror; Standard particle; Trajectory projection