

矩形同轴带状线电容的计算*

马 西 奎
(西安交通大学)

一、引言

计算矩形同轴带状线的电容是相当困难的,迄今只见到尺寸满足一定条件时的近似解^[1-3],尚未见到一般情况下的准确解。有关计算电容的已有近似公式大多是基于保角变换法导得的,例如, Tippet 和 Chang^[2] 应用变换式 $t = \operatorname{sn}^2(mz, k)$ 将 Z 平面上的 $O-C-D-E$ 区域(图1)变换为 T 平面上的上半平面(图2)。通过一些简化后,导得了当 $a/b > 1$ 时,电容的近似值

$$\frac{C_0}{\epsilon_0} = 4 \left[\frac{w}{b} + \frac{2}{\pi} \ln \left(1 + \coth \frac{\pi g}{2b} \right) \right] - \frac{\Delta C}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

其中 C_0 为单位长度的电容; ΔC 为计及带状线两边缘相互作用效应的修正项。应指出,当 $1/10 < w/b < 1/2$ 时, ΔC 不可忽略。显然,近似公式(1)式的应用范围受到了一定

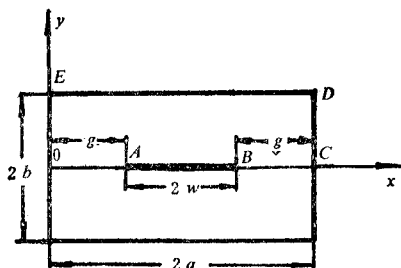


图1 Z平面

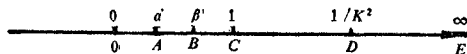


图2 T平面

的限制。

在矩形同轴带状线的工程设计中,人们往往不愿被某些附加条件所困,而希望简便地变更内条带宽的办法来制作矩形同轴带状线。借助于本文的方法就能满意地解决这个问题。

本文的目的在于:首先给出一般情况下计算电容和减小计算误差的方法;然后,利用计算机,通过改变计算程序中的形式参数,计算不同几何尺寸矩形同轴带状线的电容,以便对实验研究和工程应用有实际参考价值。

* 1985年7月15日收到。1986年2月24修改定稿。

二、计算电容 C_0 的方法

1. 电位分布

为了方便起见,本文采用合理坐标系:

(1) 由于矩形同轴带状线截面的对称性,计算电位分布时只需解四分之一区域,如图 3 所示。

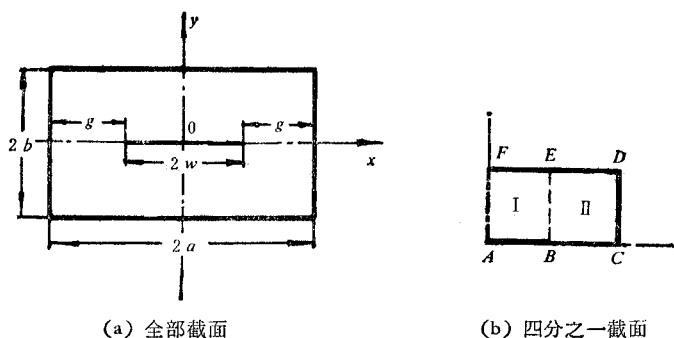


图 3

(2) 如图 3(b) 所示,求解的场域 $A-B-C-D-E-F$ 是有边界的。边界 $A-B$ 为高电位(取单位电压 $u_0 = 1$), 边界 $C-D-E-F$ 为零电位, 也就是说它们都满足第一类边界条件;而边界 $B-C$ 和 $F-A$ 由于对称性分别满足第二类齐次边界条件,即电位的法向导数等于零 ($\partial\varphi/\partial n = 0$), 所以四分之一场域是有边界的。

(3) 由于在边界 $A-C$ 上, AB 段为第一类边界条件, BC 段为第二类边界条件, 所以在整个四分之一场域上,利用分离变数法求得电位 φ 的一个解析式是不可能的。为此,将四分之一区域沿 BE 划分为两个分域,各分域电位分别用 φ_I 和 φ_{II} 表示,则边界条件为

$$\varphi_I = 1 \text{ (在 } AB \text{ 处)}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi_{II}}{\partial y} = 0 \text{ (在 } BC \text{ 处)}, \quad (3)$$

$$\varphi_{II} = 0 \text{ (在 } CDE \text{ 处)}, \quad (4)$$

$$\varphi_I = 0 \text{ (在 } EF \text{ 处)}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial\varphi_I}{\partial x} = 0 \text{ (在 } FA \text{ 处)}; \quad (6)$$

同时,在交界面 $B-E$ 处有

$$\varphi_I = \varphi_{II}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial\varphi_I}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_{II}}{\partial x} = f(y) \quad (8)$$

(式中 $f(y)$ 为一未知函数),且在四分之一区域内无自由电荷分布,则电位 φ 满足拉氏方程

$$\nabla^2\varphi = 0. \quad (9)$$

如果令区域 I 和 II 中的 φ_I 、 φ_{II} 分别为

$$\varphi_I = \frac{(b-y)}{b} + \sum_{n=1} A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (10)$$

和

$$\varphi_{II} = \sum_{m=1} B_m \operatorname{sh} \frac{(2m-1)(x-a)\pi}{2b} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b}, \quad (11)$$

则泛定方程(9)和边界条件(2)–(6)式均得到满足。由条件(7)和(8)式得

$$\begin{aligned} \frac{(b-y)}{b} + \sum_{n=1} A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi w}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} &= \sum_{m=1} B_m \operatorname{sh} \frac{(2m-1)(w-a)\pi}{2b} \\ &\times \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b} \end{aligned} \quad (12)$$

和

$$\begin{aligned} \sum_{n=1} A_n \frac{n\pi}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi w}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} &= \sum_{m=1} B_m \frac{(2m-1)\pi}{2b} \\ &\times \operatorname{ch} \frac{(2m-1)(w-a)\pi}{2b} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b}. \end{aligned} \quad (13)$$

(12)式两边同乘以 $\sin \frac{n\pi y}{b}$, 并从 0 至 b 对 y 积分, 有

$$\frac{b}{n\pi} + \frac{A_n b}{2} \operatorname{ch} \frac{n\pi w}{b} = \sum_{m=1} B_m r_{m,n} \operatorname{sh} \frac{(2m-1)(w-a)\pi}{2b}, \quad (14)$$

其中

$$r_{m,n} = \begin{cases} \frac{b}{2(2m-1)\pi} [1 - \cos(2m-1)\pi], & \text{当 } 2m-1 = 2n \text{ 时;} \\ \frac{b}{(2n-2m+1)\pi} \left[1 - \cos \frac{(2n-2m+1)\pi}{2} \right] \\ + \frac{b}{(2n+2m-1)\pi} \left[1 - \cos \frac{(2n+2m-1)\pi}{2} \right], & \text{当 } 2m-1 \neq 2n \text{ 时.} \end{cases}$$

同理, (13)式两边同乘以 $\cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b}$, 并从 0 至 b 对 y 积分, 有

$$\frac{B_m b}{2} \cdot \frac{(2m-1)\pi}{2b} \operatorname{ch} \frac{(2m-1)(w-a)\pi}{2b} = \sum_{n=1} A_n \frac{n\pi}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi w}{b} r_{m,n}. \quad (15)$$

联立(14)和(15)式即可解得系数 A_n 和 B_m 的值, 则电位 φ_I 和 φ_{II} 便可确定。

2. 电容 C_0 的计算

在极板 AB 段上电荷分布密度

$$\begin{aligned} \sigma &= -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi_I}{\partial y} \right|_{y=0} \\ &= \varepsilon_0 \left(\frac{1}{b} - \sum_{n=1} A_n \frac{n\pi}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

则 x 方向单位长度上电荷

$$q_0 = \int_0^w \sigma dx$$

$$= \varepsilon_0 \left(\frac{w}{b} - \sum_{n=1} A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi w}{b} \right). \quad (17)$$

又由于对称性,所以矩形同轴带状线内导体单位长度上的总电荷

$$\begin{aligned} Q &= 4q_0 \\ &= 4\varepsilon_0 \left(\frac{w}{b} - \sum_{n=1} A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi w}{b} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

根据电容的定义和内导体上的电压为单位值,有

$$\frac{C_0}{\varepsilon_0} = 4 \left(\frac{w}{b} - \sum_{n=1} A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi w}{b} \right). \quad (19)$$

至此,我们导得了电容 C_0 的计算公式。

从(19)式可以看出,求电容 C_0 即相应于求 A_n 。 A_n 可以通过联立(14)和(15)式得到。实际上,(14)和(15)式中的级数是无穷级数,因此,必须将级数在第 N 项处截断,否则求解 A_n 是不可能的。一般说来,先取级数的前 N_1 项求得一电容值 C_{01} ,再取级数的前 N_2 ($N_2 > N_1$) 项求得另一电容值 C_{02} ,比较 C_{01} 与 C_{02} 间的差值,以判定是否满足工程精度要求。

假定取级数的前 N 项,则(14)和(15)式联立可展开为

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} E_{11} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}, \\ a_{ii} &= \frac{\frac{j\pi}{b} \operatorname{sh} \frac{j\pi w}{b} r_{i,i}}{\frac{(2i-1)\pi}{4} \operatorname{ch} \frac{(2i-1)(w-a)\pi}{2b}}; \end{aligned} \quad (21a)$$

$$E_{12} = E_{21} = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}, \quad (21b)$$

$$\begin{aligned} E_{22} &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{NN} \end{bmatrix}, \\ b_{ii} &= \frac{\operatorname{sh} \frac{(2j-1)(w-a)\pi}{2b} r_{i,i}}{\frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{j\pi w}{b}}; \end{aligned} \quad (21c)$$

$$A = [A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_N]^{-1},$$

$$\begin{aligned}
 B &= [B_1 \ B_2 \cdots B_N]^{-1}, \\
 C &= [0 \ 0 \cdots 0]^{-1}, \\
 D &= [d_1 \ d_2 \cdots d_N]^{-1}, \quad d_i = -\frac{2}{i\pi \operatorname{ch} \frac{i\pi w}{b}}.
 \end{aligned} \quad (21d)$$

本文编写了求解矩阵方程式(20)的计算机程序。计算中只需输入初始数据 a 、 b 、 w 和 N 的值,即可求出 C_0 的值。计算结果如图 4 所示,与(1)式的计算结果吻合较好(见图 4)。

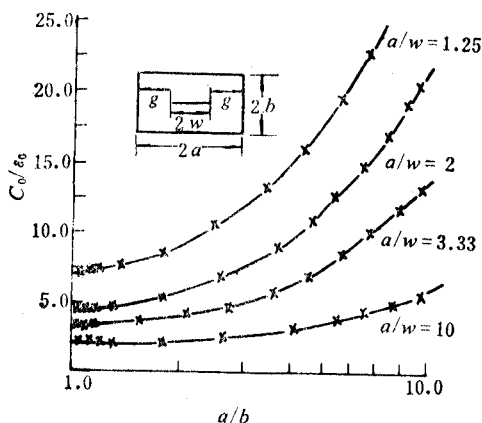


图 4 计算结果

—— (1)式 ××× 本文

从图 4 的曲线可以看出,两种方法所得结果在 a/b 较小(对应于 w/b 较小)时差异较大。本文认为此差异的由来是由于当 w/b 较小时,保角变换法难以准确地计及带状线两边缘相互作用效应的修正项 ΔC ,从而引起了较大的误差;而本文的方法通过增加级数的项数恰好弥补了这一缺点,获得较为精确的电容值,此正是本文方法的优点。

应该注意到,我们在计算上述矩形同轴带状线的电容 C_0 时,把带状线导体板假想为一厚度为零的线段;但实际上,只要对上述方法略加改变后,就不难求得内导体具有一定厚度时的单位长度的电容 C_0 ,详细步骤见附录。

三、结束语

(1) 本文的方法适用范围广,克服了(1)式受 a/w 和 a/b 比值大小约束的缺点;其次可以通过增大 N 值来控制计算误差的大小,以便得到满足工程精度要求的解,这是(1)式难以办到的。

(2) 本文所编计算机程序,避免了应用数值分析法所需的大量初始数据,显得简单方便,有一定的工程应用价值。

附录 考虑内导体厚度时电容 C_0 的计算

内导体厚度为 $2t$ 的矩形同轴带状线的四分之一区域如图 5 所示。将四分之一区域沿 BF 划分为两分域,各分域内电位分别用 φ'_I 和 φ'_{II} 表示,则边界条件为

$$\varphi'_I = 1 \quad (\text{在 } AB \text{ 处}), \quad (A-1)$$

$$\frac{\partial \varphi'_{II}}{\partial y} = 0 \quad (\text{在 } CD \text{ 处}), \quad (A-2)$$

$$\varphi'_{II} = 0 \quad (\text{在 } DEF \text{ 处}), \quad (A-3)$$

$$\varphi'_I = 0 \quad (\text{在 } FG \text{ 处}), \quad (A-4)$$

$$\varphi'_{II} = 1 \quad (\text{在 } BC \text{ 处}), \quad (A-5)$$

$$\frac{\partial \varphi'_I}{\partial x} = 0 \quad (\text{在 } GA \text{ 处}); \quad (A-6)$$

同时,在界面 BF 处

$$\varphi'_I = \varphi'_{II}, \quad (A-7)$$

$$\frac{\partial \varphi'_I}{\partial x} = \frac{\partial \varphi'_{II}}{\partial x} = f'(y). \quad (A-8)$$

如果选取 φ'_I 和 φ'_{II} 分别为

$$\begin{aligned} \varphi'_I &= \frac{(b-y)}{(b-t)} + \sum_{n=1} A'_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{(b-t)} \\ &\times \sin \frac{n\pi(y-t)}{(b-t)} \end{aligned} \quad (A-9)$$

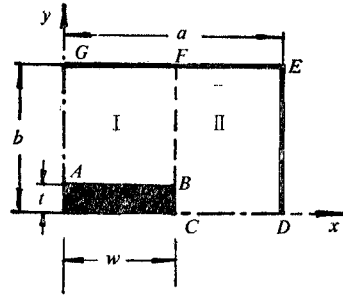


图 5

和

$$\varphi'_{II} = \sum_{m=1} B'_m \operatorname{sh} \frac{(2m-1)(x-a)\pi}{2b} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b}, \quad (A-10)$$

则可使边界条件 (A-1)、(A-2)、(A-3)、(A-4) 和 (A-6) 式均得到满足。

由于 φ' 既可以在 CBF 上表示为 φ'_{II} , 也可以在 CB 上表示为 φ'_{II} , 还可以在 BF 上表示为 φ'_I . 两种表达式的傅氏系数必须恒等, 于是, 当 $x = w$ 时,

$$\begin{aligned} \int_0^b \varphi'_{II} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b} dy &= \int_0^t \varphi'_{II} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b} dy \\ &+ \int_t^b \varphi'_I \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b} dy; \end{aligned}$$

利用边界条件 (A-5) 式, 即有

$$\begin{aligned} \int_0^b \varphi'_{II} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b} dy &= \int_0^t \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b} dy \\ &+ \int_t^b \varphi'_I \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b} dy. \end{aligned} \quad (A-11)$$

同理, 越过界面 FB 时, 由 $\partial \varphi' / \partial x$ 的连续性, 可以给出, 当 $x = w$ 时,

$$\int_t^b \frac{\partial \varphi'_I}{\partial x} \sin \frac{n\pi(y-t)}{(b-t)} dy = \int_t^b \frac{\partial \varphi'_{II}}{\partial x} \sin \frac{n\pi(y-t)}{(b-t)} dy. \quad (A-12)$$

联立求解 (A-11) 和 (A-12) 式便可得系数 A'_n 和 B'_m 的值. 最后, 得到电位 φ'_I 和 φ'_{II} 的解答, 进而不难求得单位长度上的电容

$$\begin{aligned} \frac{C_0}{\epsilon_0} &= 4 \left(\frac{w}{b-t} - \sum_{n=1} A'_n \operatorname{sh} \frac{n\pi w}{b-t} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=1} B'_m \sin \frac{(2m-1)\pi t}{2b} \right). \end{aligned} \quad (A-13)$$

至此,导得了考虑内导体厚度时,计算单位长度上电容 C_0 的公式。显然,当 $2t = 0$ 时,(A-13) 式与(19)式完全相同,由此可间接说明 (A-13) 式的正确性。

参 考 文 献

- [1] S. B. Cohn, *IRE Trans. on MTT*, **MTT-2** (1954), 52.
- [2] J. C. Tippet and D. C. Chang, *ibid.*, **MTT-24** (1976), 602.
- [3] J. Ribbet, *ibid.*, **MTT-29** (1981), 661.

CALCULATION OF THE CAPACITANCE OF A RECTANGULAR COAXIAL STRIP TRANSMISSION LINE

Ma Xikui

(Xi'an Jiaotong University)

The field matching method for calculating the capacitance of a rectangular coaxial strip transmission line is presented. The method is not only simple, easy to use and commonly adaptive but also efficient for reducing the calculating error.