

# 共轭梯度自适应波束形成算法<sup>1</sup>

汤 俊 彭应宁

(清华大学电子工程系 北京 100084)

**摘 要** 本文讨论了共轭梯度算法在自适应波束形成中的应用, 指出在时域和空域同时处理, 与仅在时域或空域处理的方法相比, 不仅在性能上得到了改进, 而且放宽了对阵元数目的要求。同时提出了一种前后向平均和多层前后向处理的结构和方法, 使算法在性能上得到了进一步的改善。

**关键词** 共轭梯度法, 自适应阵列, 波束形成

**中图分类号** TN911.7

## 1 引言

自适应波束形成技术是多年来一直很活跃的一个研究领域, 广泛地应用于雷达和声纳技术中。为了得到更好的分辨率和干扰对消的效果, 通常可以采用更大规模的天线阵列。但相应增加的庞大计算量和自适应的收敛速度变慢成为两个重要问题<sup>[1]</sup>。而且, 采用大规模的阵列也使处理结果对阵列的非理想状态更敏感<sup>[2]</sup>。因此, 目前的研究方向主要在于寻找更快, 更准确的算法, 在减小计算量的同时, 保持优良的性能。

共轭梯度法 (CG) 是求解最优化问题的一种常用方法, 在收敛速度和计算复杂性两方面都具有很好的特点。文献 [3] 中讨论了在时域自适应滤波器中共轭梯度法的应用, 指出通过适当选择计算梯度的窗口的长度, 可以使 CG 算法具有可与 RLS 算法相比拟的收敛速度, 且计算量介于 LMS 和 RLS 算法之间, 同时具有良好的数值稳定性。文献 [4] 中基于共轭梯度法提出了一种阵列信号处理中的子孔径波束形成方法。该方法降低了处理的维数, 与 MLMS<sup>[5]</sup> 算法相比, 具有更快的收敛速度。在对干扰进行有效的抑制的同时, 可以在所指定的方向保持恒定的增益。但文中指出, 为保证 CG 算法的正确使用, 必须保证阵列的阵元数不小于所有信号数目的两倍。

CG 算法在自适应波束形成中应用的核心问题是梯度的计算, 计算方法将影响到算法的收敛速度和性能。本文讨论了在自适应波束形成中 CG 算法的应用, 提出在时域和空域同时平均计算梯度的方法。不仅在性能上得到了改进, 而且放宽了上述对阵元数目的要求。同时, 利用前后向平滑处理的概念, 提出一种多层前后向平均计算梯度的结构和方法, 与文献 [4] 中的方法相比, 对阵元数目的限制可进一步放宽, 同时在性能上得到了进一步的改善。计算机仿真的结果证明了方法的正确性。

本文第 2 节介绍自适应波束形成的结构和 CG 算法。第 3 节介绍本文中的处理方法。第 4 节给出仿真结果和结论。

## 2 自适应波束形成和 CG 算法

$M + 1$  阵元的波束形成结构如图 1, 由两部分组成: 预处理器和波束合成器。

预处理器用于保持所需方向的信号, 防止其在自适应过程中被抑制。

令  $s_0(t)$  为理想目标,  $s_i(t) (i = 1, 2, \dots, k-1)$  为干扰信号。  $s_i(t) = A_i \exp[-j(\Phi_i + \Psi(t))]$ , 其中  $\Phi_i$  为  $s_i(t)$  的入射角,  $\Psi(t)$  为随机相位 (在  $0 \sim 2\pi$  间均匀分布, 各信号不相关),  $A_i$  为相应的幅度。

<sup>1</sup> 1998-05-11 收到, 1999-01-17 定稿

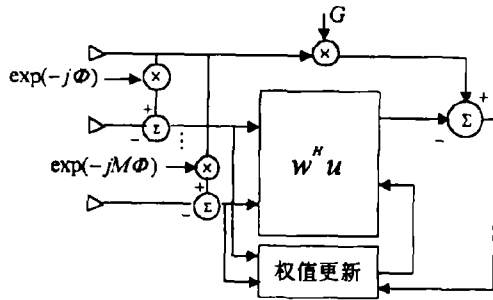


图 1 自适应波束形成结构

令  $S(t) = [s_0(t), s_1(t), \dots, s_{k-1}(t)]^T$ ,  $\mathbf{a}(i) = [1, e^{j\Phi_i}, \dots, e^{j\Phi_i M}]^T$  为对应于干扰信号  $s_i(t)$  的方向矢量, 则  $M+1$  个阵元的接收信号可以表示为  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}s(t) + \mathbf{v}(t)$ , 其中  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(0), \mathbf{a}(1), \dots, \mathbf{a}(k-1)]$ ,  $\mathbf{v}(t)$  为白噪声.

波束形成器需在指定方向保持恒定增益  $G$ , 令  $\mathbf{e}(\Phi)$  为  $\mathbf{a}(0)$  的后  $M$  个元素组成的矢量,  $\mathbf{x}_p(t)$  由  $\mathbf{x}(t)$  的后  $M$  个

元素组成, 即:  $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_0(t); \mathbf{x}_p(t)]^T$ . 预处理器的输出为  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}_0(t)\mathbf{e}(\Phi) - \mathbf{x}_p(t)$ , 问题模型为

$$\min_{\mathbf{w}(t)} \|\mathbf{d}(t) - \mathbf{w}(t)^H \mathbf{u}(t)\|^2, \tag{1}$$

其中  $\mathbf{d}(t) = G\mathbf{x}_0(t)$ . 只要所有信源不相关, 且  $K \leq M$ , 则最优权值可以抑制  $K-1$  个干扰信号.

共轭梯度法本质上是一个求解矩阵方程  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的迭代解法. 问题可描述为

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} / 2 - \mathbf{b}^T \mathbf{x}, \tag{2}$$

其中  $\mathbf{x} : M \times 1$ ,  $\mathbf{A} : M \times M$ ,  $\mathbf{b} : M \times 1$ .

CG 算法过程如下:

步骤 1 设定初始值  $\mathbf{x}_0$ , 估算梯度  $\mathbf{g}_0 = \delta f'(\mathbf{x}_0)$ ,  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{g}_0$ ,  $\mathbf{p}_0 = \delta f'(\mathbf{y}_0)$ ,  $\mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0$ .

步骤 2  $k = 0, 1, \dots, M-1$ , 计算  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$ . 其中  $\alpha_k = \mathbf{g}_k^T \mathbf{d}_k / [\mathbf{d}_k^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{p}_k)]$ ,  $\mathbf{g}_{k+1} = \delta f'(\mathbf{x}_{k+1})$ ,  $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}$ ,  $\mathbf{p}_{k+1} = \delta f'(\mathbf{y}_{k+1})$ . 当  $k \leq M-1$  时,  $\mathbf{d}_{k+1} = -\mathbf{g}_{k+1} + \beta_k \mathbf{d}_k$ , 其中  $\beta_k = \mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{g}_{k+1} / (\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k)$ .

### 3 自适应波束形成中的共轭梯度法

对应问题 (1) 式, 梯度可以有多种估计方法. 文献 [3] 中指出, 若采用 LMS 方法中的瞬时梯度求法, 我们将只能得到一个共轭向量. 这是由于此时的自相关阵的估计为  $\mathbf{u}(t)\mathbf{u}^H(t)$ , 其秩为 1. 所以此时的 CG 法等效于 LMS 法. 为了得到足够的共轭向量, 文献 [3] 中给出在时域自适应滤波器设计中, 梯度估计计算式为时域平均:  $\delta f'(\mathbf{w}_i^H) = \frac{2}{nw} \sum_{t=i-nw+1}^i (\mathbf{w}_i^H \mathbf{u}(t) - d^*(t)) \times \mathbf{u}(t)$ , 此时的共轭向量的数目为  $\min(nw, M-1)$ ,  $nw$  为时域加窗的维数.

在自适应阵列的波束形成技术中, 采用共轭梯度法时, 梯度计算方法的基本形式有:

(1) 时域平均 对应上述时域设计方法, 利用不同的快拍矢量计算梯度, 计算式为  $\delta f'(\mathbf{w}_i^H) = \frac{2}{nw} \sum_{t=i-nw+1}^i (\mathbf{w}_i^H \mathbf{u}(t) - d^*(t)) \times \mathbf{u}(t)$ , 此时的共轭向量的数目为  $\min(nw, M-1)$ ,  $nw$  为快拍矢量数目.

(2) 阵元域 (空域) 平均 [4] 设  $\mathbf{u}(t)$  可以分解为  $p$  个子序列  $\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \dots, \mathbf{u}_p(t)$ , 每一子序列维数为  $kp$ ,  $kp \geq k$ . 其中  $\mathbf{u}_i(t) = [u_i(t), \dots, u_{kp+i-1}(t)]$ , 共轭梯度为  $\delta f'(\mathbf{w}_i^H) = \frac{2}{p} \sum_{i=0}^{p-1} (\mathbf{w}_i^H \mathbf{u}_i(t) - d^*(t)) \times \mathbf{u}_i(t)$ .

同理, 为保证有足够多的共轭向量, 要求  $M \geq 2k$ . 这是因为在  $kp = k$  时, 相关阵  $R = \frac{1}{p} \sum_{m=0}^{M-k} \mathbf{u}_m(t) \mathbf{u}_m^H(t)$  的秩为  $\min(p, k)$ . 若  $p < k$ , 共轭梯度法将无法收敛到最优解.

(3) 空域与时域联合平均法 显然, 若采用空域和时域相结合的方法, 我们可以更有效地利用快拍数据, 改善波束形成的效果. 同时, 对阵元数  $M+1$  也可以放宽要求. 设时域平均的向量的数目为  $nw$ ,  $kp = k$ , 则此时相关阵  $R = \frac{1}{p \times nw} \sum_{m=t-nw+1}^t \sum_{i=1}^{M-k+1} \mathbf{u}_i(m) \mathbf{u}_i^H(m)$  的秩为  $\min(nw \times p, k)$ , 只需  $nw \times p \geq k$  即可.

由  $p = M - k + 1$ ,  $nw \times (M - k + 1) \geq k$ , 可得  $M \geq (nw + 1)k/nw - 1$ .

(4) 前后向平均法 由平滑处理的思想可知, 通过对数据向量  $\mathbf{x}(t)$  的共轭反向向量做处理, 可以更充分地利用所得的采样数据. 过程如下: 令

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{x}_M(t), \mathbf{x}_{M-1}(t), \dots, \mathbf{x}_0(t)]^* = [\mathbf{y}_0(t), \mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_M(t)] = [\mathbf{y}_0(t); \mathbf{y}_p(t)].$$

同前, 令  $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{y}_0(t) \mathbf{e}(\Phi) - \mathbf{y}_p(t)$ ,  $d_1(t) = G \mathbf{y}_0(t)$ , 梯度计算的表达式为

$$\begin{aligned} \delta f'(\mathbf{w}_i^H) &= \frac{1}{p \times nw} \sum_{m=t-nw+1}^t \sum_{r=0}^{M-k} (\mathbf{w}_i^H \mathbf{u}_r(m) - d^*(m)) \times \mathbf{u}_r(m) \\ &+ \frac{1}{p \times nw} \sum_{m=t-nw+1}^t \sum_{r=0}^{M-k} (\mathbf{w}_i^H \mathbf{u}_{1r}(m) - d_1^*(m)) \times \mathbf{u}_{1r}(m). \end{aligned}$$

此时对阵元数的要求为  $2 \times (M - k + 1) \times nw \geq k$ , 即  $M \geq (2nw + 1) \times k/2nw - 1$ .

(5) 多层前后向处理 前述子阵空域平均和前后向平均的方法, 优点在于充分利用了快拍矢量中的信息. 在快拍矢量中, 应用子阵空域平均的思想, 可以得到更多的子阵矢量. 对于  $M+1$  个阵元的阵列, 子阵规模为  $k$  时, 利用前面图 1 的结构, 由快拍矢量  $\mathbf{x}(t)$  可以得到  $d(0) = G \mathbf{x}_0(t)$  和  $M - k + 1$  个  $k$  维的子阵矢量. 同理, 利用  $\mathbf{x}(t)$  的后  $M$  个元素构成的矢量, 同样通过图 1 结构的处理, 可以得到  $d(1) = G \mathbf{x}_1(t)$  和  $M - k$  个  $k$  维的子阵矢量. 以此类推及利用前后向处理的思想, 由单个快拍矢量  $\mathbf{x}(t)$ , 可以得到  $2 \times \sum_{i=1}^{M-k+1} i = (M - k + 1) \times (M - k + 2)$  个  $k$  维子阵矢量, 此时对阵元数的要求为  $(M - k + 1) \times (M - k + 2) \geq k$ , 即  $M \geq (2k - 3 + \sqrt{4k + 1})/2$ .

可见, 对阵元数和快拍数据的要求可以进一步降低. 本多层前后向平均的结构可以在仅有少量快拍矢量的情况下, 充分利用快拍矢量中包含的信息, 得到很好的自适应波束形成效果. 仿真结果证明了上述方法和结构的正确性.

#### 4 仿真结果

所需信号入射方向为  $0^\circ$ , SNR 为 10dB. 阵列的阵元数为  $M+1$ ,  $G$  为所需方向信号的增益.  $k$  为信号的数目,  $kp$  为子阵的维数,  $nw$  为采用快拍矢量的数目. 仿真结果均为 50 次独立实验的平均.

第一种干扰环境为两个干扰源, 方向为  $-50^\circ$  和  $50^\circ$ .  $M = 4$ ,  $k = 3$ ,  $kp = 3$ , INR=40dB. 显然此时不满足  $M+1 \geq 2k$  的条件.  $nw = 1$  时, 用文献 [4] 中的阵元域处理方法, 无法利用 CG 法得到最优解. 若采用前后向平均的方法则可以在干扰方向形成零陷, 见图 2.

第二种干扰环境为四个干扰源, 方向:  $-50^\circ, 30^\circ, 50^\circ, 70^\circ$ , INR=40dB,  $M = 8$ ,  $kp = 5$ ,  $k = 5$ ,  $nw = 1$ , 见图 3. 由于  $M+1 < 2k$ , 文献 [4] 中的阵元域平均法无法形成对干扰信号的抑制, 而利用前后向和多层前后向处理, 可以在干扰的方向形成零陷. 显然, 多层前后向处理结构的性能优于简单的前后向处理方法.

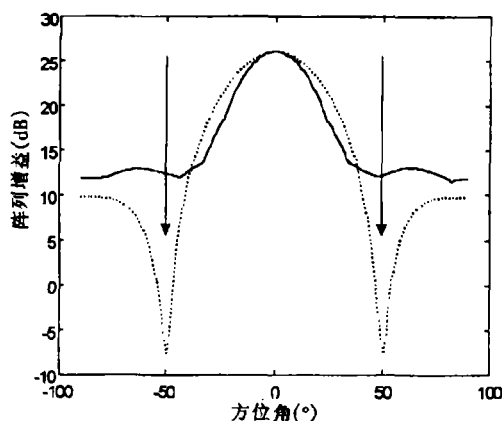


图 2  $M = 4, kp = 3, nw = 1, G = 20$

— 阵元域平均法  
 ... 前后向平均法

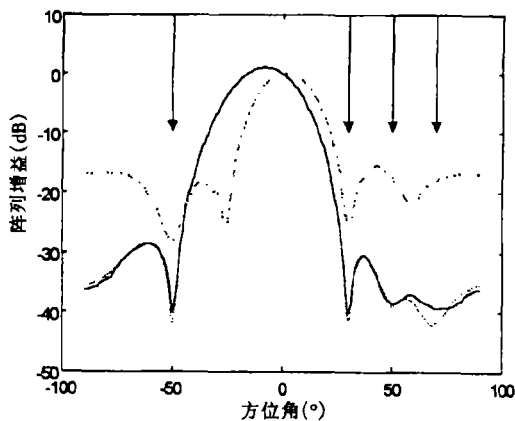


图 3  $M = 8, kp = 5, nw = 1, G = 1$

... 多层前后向平均方法  
 — 前后向平均法  
 - · - 阵元域平均方法  
 - - - 阵元域平均方法

同样在第二种干扰环境下，图 4 给出了在  $M = 7, kp = 5, k = 5, nw = 5$  时的方向图。图 5 中给出了  $M = 15, kp = 5, k = 5, nw = 5$  时的方向图。由图可见，随所用的子阵矢量数目及快拍数增加，波束形成的效果得到了改善。多层前后向处理的方法在两种环境下都形成了最深、最准确的零陷。

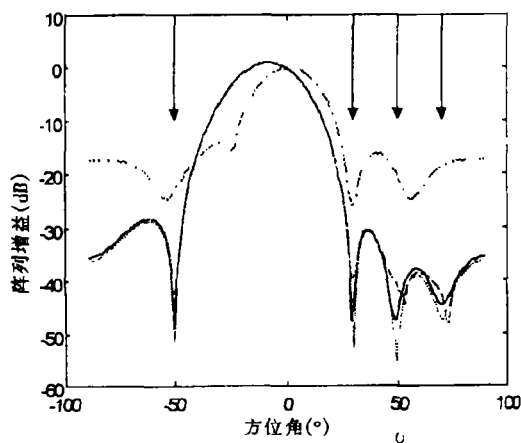


图 4  $M = 7, kp = 5, nw = 5, G = 1$

... 多层前后向平均方法  
 — 前后向平均法  
 - · - 阵元域平均方法  
 - - - 阵元域 + 时域平均

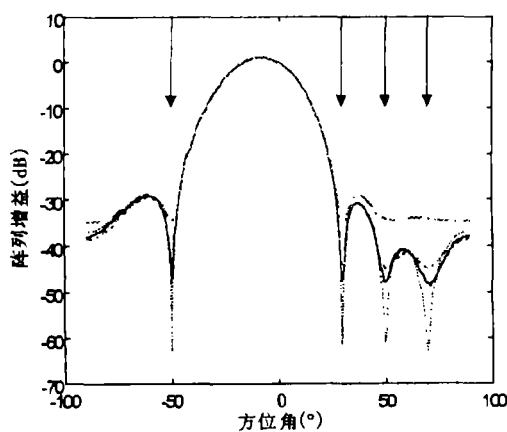


图 5  $M = 15, kp = 5, nw = 5, G = 1$

... 多层前后向平均方法  
 - · - 阵元域平均方法  
 - - - 阵元域 + 时域平均  
 — 前后向平均法

仿真结果表明，各种方法均可以在所需信号方向保持恒定增益。而阵元域和时域相结合的方法可以放宽对阵元数的要求，与只用阵元域平均或时域平均的方法相比，可以保持主波束，并具有更低的旁瓣，有更好的干扰抑制效果。若在此基础上采用前后向平均的方法和多层前后向处理的结构，更充分地利用了快拍矢量中的信息，可进一步改善波束形成的效果。

## 5 结束语

本文讨论了共轭梯度法在自适应波束形成技术中的应用。提出了在时域和阵元域同时平均计算梯度的方法和前后向处理的思想,同时给出了一种多层前后向处理的结构和方法。仿真结果表明,共轭梯度法具有收敛快,计算量小的优点。阵元域和时域同时平均和多层前后向处理的方法可以放宽文献 [4] 中对阵元数的要求,同时可以更充分地利用快拍矢量中的信息,改善波束形成的效果。

## 参 考 文 献

- [1] Monzingo R A, Miller T W. Introduction to Adaptive Arrays. New York: Wiley, 1980, Ch.1.
- [2] Chapman D J. Partial adaptive array techniques. IEEE Trans on AP, 1978, AP-26(5): 823-833.
- [3] Boray G K, Srinath M D. Conjugate gradient techniques for adaptive filtering. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1992, 39(1): 1-10.
- [4] Mandyam G D. Adaptive beamforming based on the conjugate gradient algorithm. IEEE Trans on AES, 1997, AES-33(1): 343-347.
- [5] Griffiths L J. Adaptive lattice structure for noise-canceling applications. ICASSP, Tulsa, Okla: 1978, 87-90.

## CONJUGATE GRADIENT ADAPTIVE BEAMFORMING ALGORITHM

Tang Jun Peng Yingning

(SDP Division, Dept. of Electron. Eng., Tsinghua University, Beijing 100084)

**Abstract** In this paper, the application of conjugate gradient method in adaptive array beamforming is studied. The combination of temporal and spatial averaging for calculating the gradient improves the beamforming performance and releases the constraint given by G.D.Mandyam(1997) that the number of elements must be twice larger than the number of signals. New forward and backward averaging (FB) method and multilayer FB structure are proposed which further improve the beamforming performance. Several simulation results are included for illustration and comparison.

**Key words** Conjugate gradient method, Adaptive array, Beamforming

汤 俊: 男, 1973 年生, 博士生, 目前主要研究方向为阵列信号处理, 高速实时信号处理系统, 并行信号处理。

彭应宁: 男, 1939 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为雷达信号处理, 高速实时信号处理系统, 并行信号处理, 阵列信号处理, 微光夜视图像处理。